УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

А.С. Шипилов

Описаны экспоненциальные дихотомии решений уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной, определенных на геометрическом графе.

Ключевые слова: *уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, геометрический граф, относительно p-ограниченные операторы, экспоненциальные дихотомии.*

Введение

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество ребер, причем, каждому ребру E_j сопоставлены два положительных числа $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$, которые удобно трактовать как длину и площадь поперечного сечения соответственно. Такой граф $\mathbf{G}$ предложено называть *геометрическим графом* [1]. Пусть на каждом ребре E_i задано уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \alpha u_{jxx} - \beta u, \tag{0.1}$$

где производные берутся по $x \in (o, l_i)$ и $t \in \mathbb{R}$. В каждой вершине V_i зададим *условия непрерывности*

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i),\ E_m, E_n \in \mathfrak{E}^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{0.2}$$

и *условия баланса потоков*

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in \mathfrak{E}^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{0.3}$$

где через $\mathfrak{E}^\alpha(V_i)$ и $\mathfrak{E}^\omega(V_i)$ обозначено множество ребер, «выходящих» из вершины V_i, и, соответственно, «входящих» в вершину V_i. Физический смысл задачи (0.1) – (0.3) объяснен в [2]. Кстати сказать, термин «отсутствовать» в контексте условий непрерывности не означает «быть равным нулю». Скажем, если из вершины V_i не «выходит» ни одно ребро, то первые два равенства в (0.2) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Более того, если в вершину V_i «входит» (или «выходит» из нее) только одно ребро, то условия (0.2) для этой вершины «отсутствуют».

Впервые уравнения в частных производных на геометрических графах начали изучаться в конце прошлого века в связи с моделированием процессов «реакции-диффузии» в трубчатых реакторах, а также динамики давления и влагопереноса в «тонких» областях. Первая монография [1] по классическим уравнениям на геометрических графах вышла в 2004 г. Первая статья [3], в которой рассмотрены неклассические уравнения – уравнения соболевского типа, появилась в 2002 г. Первая диссертация [4], в которой описаны фазовые пространства некоторых уравнений соболевского типа, защищена в 2005 г. В данной статье впервые исследуется устойчивость и неустойчивость (в зависимости от параметров

$\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$) решений задачи (0.1) – (0.3). Статья, кроме вводной части и списка литературы, сдержит два параграфа. В первом приводятся вспомогательные сведения о дихотомиях решений уравнений соболевского типа, почерпнутые из гл.7 [5], куда они попали из [6]. Во втором параграфе описываются дихотомии решений задачи (0.1) – (0.3).

1. Инвариантные пространства и дихотомии решений

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, причем, оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (т. е. M (L,σ)-ограничен, и ∞ – несущественная особая точка L-резольвенты оператора M; если $p \in \mathbb{N}$, то p – порядок полюса в ∞, а если $p = 0$, то ∞ – устранимая особая точка).

Рассмотрим уравнение

$$L\dot{u} = Mu. \tag{1.1}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую ему (1.1), назовем *решением*. Решение $u = u(t)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее еще и начальному условию Коши

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

назовем *решением задачи* (1.1), (1.2).

Определение 1. *Множество* $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ *называется* фазовым пространством уравнения *(1.1), если*

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1.1) лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P}$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

(ii) для любой точки $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1.1), (1.2).

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$, то фазовым пространством уравнения (1.1) служит пространство $\mathfrak{U}$. Если оператор L необратим, в частности, $kerL \neq \{0\}$, то описание фазового пространства — нетривиальная задача.

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (1.1) является образ ImP проектора*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R^L_\mu(M) d\mu.$$

Здесь $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ – правая L-резольвента *оператора M, а контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую L-спектр оператора M.*

Заметим, что если оператор $L : \mathfrak{U} \to \{0\}$, то фазовое пространство $\mathfrak{P} = \{0\}$, поскольку в этом случае оператор M непрерывно обратим.

Определение 2. *Множество $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{P}$ называется* инвариантным пространством уравнения *(1.1), если для любого $u_0 \in \mathfrak{I}$ решение задачи (1.1), (1.2) лежит в $\mathfrak{I}$ поточечно.*

В частности, фазовое пространство является инвариантным пространством, однако обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Пусть L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M расщепляется на две компоненты $\sigma^L(M) = \sigma^L_0(M) \cup \sigma^L_1(M)$ так, что существует контур $\gamma_0 \subset \mathbb{C}$, ограничивающий область, содержащую $\sigma^L_0(M)$, причем, $\gamma_0 \cap \sigma^L_1(M) = \varnothing$.*

Тогда существует инвариантное пространство $\mathfrak{I}_0$ уравнения (1.1), совпадающее с образом ImP_0 проектора

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R^L_\mu(M)d\mu.$$

Определение 3. *Говорят, что* решения уравнения *(1.1)* имеют экспоненциальную дихотомию, *если*

(i) фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения (1.1) расщепляется в прямую сумму двух инвариантных пространств, $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}^s \oplus \mathfrak{I}^u$;

(ii) существуют константы $a, C \in \mathbb{R}_+$ такие, что при любом $u_0 \in \mathfrak{I}^s$ ($u_0 \in \mathfrak{I}^u$) и любом $t \in \mathbb{R}_+$ ($t \in \mathbb{R}_-$)

$$\|u(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq Ce^{-at}\|u_0\|_{\mathfrak{U}} \quad (\|u(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq Ce^{at}\|u_0\|_{\mathfrak{U}}).$$

Термин "«дихотомия» предполагает некоторую «раздвоенность» фазового пространства. Однако в приложениях нередко возникает ситуация, когда либо $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}^s$, либо $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}^u$. Поэтому в таких ситуациях мы будем говорить либо об экспоненциальной устойчивости решений, либо об их экспоненциальной неустойчивости соответственно.

Теорема 3. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, и*

$$\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \varnothing. \tag{1.3}$$

Тогда если

(i) $\sigma^L(M) \subset \{Re\mu < 0\} = \mathbb{C}_-$, то решения уравнения (1.1) экспоненциально устойчивы.

(ii) $\sigma^L(M) \subset \{Re\mu > 0\} = \mathbb{C}_+$, то решения уравнения (1.1) экспоненциально неустойчивы.

(iii) $(\sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_- \neq \varnothing) \wedge (\sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_+ \neq \varnothing) \wedge (\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \varnothing)$, то решения уравнения (1.1) имеют экспоненциальную дихотомию.

2. Устойчивость и неустойчивость решений

Здесь мы редуцируем задачу (0.1) – (0.3) к уравнению (1.1), а затем применим результаты из п. 1. Для этого согласно [2], введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_j, \ldots) : g_j \in L_2(E_j)\}$ со скалярным произведением

$$< g, h > = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

и банахово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(E_j)$ и выполнено (0.2)$\}$ с нормой

$$\|u\|^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2)dx.$$

Очевидно, вложение $\mathfrak{U} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ плотно и компактно, поэтому обозначим через $\mathfrak{F}$ сопряженное к $\mathfrak{U}$ относительно двойственности $< \cdot, \cdot >$ пространство.

Формулой

$$< Au, v > = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u_{jx} v_{jx} dx, \; u, v \in \mathfrak{U}$$

зададим оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, чей спектр $\sigma(A)$ неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке $+\infty$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора A, занумерованные по убыванию с учетом кратности. Заметим, что первое собственное значение $\lambda_1 = 0$ однократно, причем соответствующий нормированный (в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$) собственный вектор имеет следующий вид:

$$\varphi_1 = (\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j)^{-\frac{1}{2}}(1, 1, \dots, 1, \dots).$$

Далее построим операторы $< Lu, v >= \lambda < u, v > + < Au, v >$ и $< Mu, v >= -\alpha < Au, v > -\beta < u, v >$. По построению операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, и выполнено одно из следующих условий:*

(i) при всех $k \in \mathbb{N}$ $\lambda \neq -\lambda_k$,

(ii) существует $k \in \mathbb{N}$, что $\lambda = \lambda_k$, но $\beta \neq \alpha\lambda$.

Тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен.

Доказательство леммы 1 принципиально не отличается от доказательства леммы (3.1) [2]. Заметим лишь, что в данном случае L-спектр оператора M состоит из объединения точек вида

$$\mu_k = -\frac{\alpha\lambda_k + \beta}{\lambda + \lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N} \backslash \{l : \lambda = -\lambda_l\}. \tag{2.1}$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ множество ортонормированных (в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$) собственных векторов оператора A.Тогда в силу теоремы 1 справедлива

Теорема 4. *Если выполнено условие (i) леммы 1, то фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит все пространство $\mathfrak{U}$. Если выполнено условие (ii) леммы 1, то фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит образ проектора*

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\lambda = -\lambda_k} < \cdot, \varphi_k > \varphi_k.$$

Перейдем к изучению устойчивости решений задачи (0.1) – (0.3). Для этого потребуем, чтобы параметры α и β были положительны, это хорошо согласуется с физическим смыслом задачи. Кроме того, положительность этих параметров обеспечивает выполнение условия $\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$. Теперь применим теорему 3, разбив ее на четыре части для того, чтобы снабдить каждую часть некоторыми комментариями.

Теорема 5. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}_+$, тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит пространство $\mathfrak{U}$, причем, решения этой задачи экспоненциально устойчивы.*

Действительно, при любом $u_0 = (u_{10}, u_{20}, \dots, u_{j0}, \dots) \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (0.1) – (0.3) с начальными данными Коши, которые здесь имеют вид

$$u_j(x, 0) = u_{j0}(x), \quad x \in (0, l_j). \tag{2.2}$$

Решение к тому же имеет вид $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} < u_0, \varphi_k > \varphi_k(x)$. Экспоненциальная устойчивость таких решений в силу теоремы 5 очевидна.

Теорема 6. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = 0$. Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит множество $\mathfrak{P} = \{u \in \mathfrak{U} :< u, \varphi_1 >= 0\}$, причем, решения этой задачи экспоненциально устойчивы.*

Фазовое пространство находим из теоремы 4. Ввиду однократности первого собственного значения оператора A оно действительно ортогонально вектору φ_1. Аналогично предыдущему, решение задачи (0.1) – (0.3) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=2}^{\infty} e^{\mu_k t} < u_0, \varphi_k > \varphi_k(x),$$

и оно, очевидно, экспоненциально устойчиво.

Теорема 7. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}_- \backslash \{-\lambda_k\}$. Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) является $\mathfrak{U}$, причем, решения этой задачи имеют экспоненциальную дихотомию.*

Пусть $u_0 \in \mathfrak{U}$, тогда единственное решение задачи (0.1) – (0.3), удовлетворяющее 5, имеет вид

$$u(x,t) = \Big(\sum_{\lambda_k > -\lambda} + \sum_{\lambda_k < -\lambda} \Big) \exp\Big(-\frac{\alpha\lambda_k + \beta}{\lambda + \lambda_k} t\Big) < u_0, \varphi_k > \varphi_k(x). \quad (2.3)$$

Устойчивые $\mathfrak{I}^s$ и неустойчивые $\mathfrak{I}^u$ инвариантные пространства ортогональны в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$, причем, $\mathfrak{I}^u = span\{\varphi_k : \lambda_k < -\lambda\}$, т. е. конечномерно.

Теорема 8. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ и существует натуральное число $l > 1$ такое, что $\lambda = -\lambda_l$. Тогда фазовым пространством задачи (0.1) – (0.3) служит множество $\mathfrak{P} = \{u \in \mathfrak{U} :< u, \varphi_k >= 0, \lambda_k = -\lambda\}$, причем, решения имеют экспоненциальную дихотомию.*

Этот, на вид самый трудный, случай исследуется аналогично предыдущему. Инвариантные пространства здесь имеют следующий вид: $\mathfrak{I}^s = \{u \in \mathfrak{U} :< u, \varphi_k >= 0, \lambda_k \leq -\lambda\}$, $\mathfrak{I}^u = span\{\varphi_k : \lambda_k < -\lambda\}$. Они, очевидно, ортогональны, причем, $\mathfrak{I}^s \oplus \mathfrak{I}^u = \mathfrak{P}$. Любое решение задачи (0.1) – (0.3) имеет вид 6, где $u_0 \in \mathfrak{P}$.

Литература

1. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.
2. Свиридюк, Г.А. Уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Вестн. МАГУ. Сер. Математика – 2003. – №4. – С.129 – 139.
3. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах. / Г.А. Свиридюк // Некласс. уравн. матем. физики – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
4. Шеметова, В.В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах дис.... канд. физ.-мат. наук / В. В. Шеметова. – Магнитогорск, 2005.
5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.T. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk , V.T. Fedorov. – Utrect, Köln, Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.
6. Свиридюк Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика. – 1997. – №5. – С. 60 – 68.

Кафедра математического анализа
Южно-Уральский государственный университет
9226348588@mail.ru

Поступила в редакцию 5 марта 2008 г.