УДК 517.984.54

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

А.И. Седов

ABOUT THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF THE SPECTRAL ANALYSIS FOR LAPLACE OPERATOR

A.I. Sedov

Приведены достаточные условия, налагаемые на последовательность комплексных чисел, для которой существует возмущенный оператор Лапласа такой, что его спектр совпадает с данной последовательностью. Приводится алгоритм приближенного нахождения возмущающего оператора.

Ключевые слова: оператор Лапласа, ядерный оператор, спектр, след, возмущение, собственные числа

We give the sufficient conditions imposed on a sequence of complex numbers for which there exists such pertubatied Laplace operator, that its spectrum is equal to the given sequence. The algorithm for the approximate finding of the pertubation operator is given.

Keywords: Laplace operator, operator of trace class, spectrum, trace, perturbation, eigenvalue

Введение

Известно много различных результатов, относящихся к обратной задаче спектрального анализа (см. например [1]) для обыкновенных дифференциальных операторов. Для операторов с частными производными результатов значительно меньше. В основном рассматривается степень оператора Лапласа, поскольку резольвента оператора Лапласа не ядерная. Так, в работах [2 – 7] решена обратная задача для степени оператора Лапласа больше 2 на прямоугольнике. В работах [8, 9] поставленная задача решена для степени больше 3/2. В работе [10] – для степени равной 1. В [11] рассмотрена не прямоугольная область. Во всех перечисленных работах [2 – 11] на возмущающий оператор накладывались условия малости. В представленной работе этот существенный недостаток устранен. Кроме того, впервые предлагается алгоритм приближенного нахождения решения обратной задачи.

1. Постановка задачи

Пусть Π — прямоугольник со сторонами a и b, $\dfrac{a^2}{b^2}$ — иррациональное. Рассмотрим самосопряженный неотрицательный оператор T_0, порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0, $\beta > 3/2$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Известно, что собственным числам $\lambda_{kl} = \left(\frac{\pi^2k^2}{a^2} + \frac{\pi^2l^2}{b^2}\right)^\beta$ оператора T соответствуют ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции $v_{kl}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{\pi kx}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi ly}{b}\right)$; $k, l \in \mathbb{N}$.

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in L_2(\Pi) = H$, вещественность p не предполагается. Эту функцию часто называют потенциалом, $\operatorname{dom} P = \{p : p \in L_2, (T+P)y \in L_2, \text{где } y \in L_2\}$. Обозначим через μ_{kl} собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через u_{kl} — соответствующие ортонормированные в $H = L_2(\Pi)$ собственные функции.

Поскольку a^2/b^2 иррациональное число, то спектр $\sigma(T)$ оператора T однократный. Для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа и связанные с ними спектральные объекты одним натуральным индексом.

Обозначим $\Pi_4 = \{(x,y)| \quad 0 \le x \le a \cdot 2^{-1}, \quad 0 \le y \le b \cdot 2^{-1}\}$ — вспомогательный прямоугольник и введем полную ортонормированную в $L_2(\Pi_4)$ систему функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\varphi_n(x,y) = \varphi_{kl}(x,y) = \frac{4}{\sqrt{ab}}\cos\frac{2\pi kx}{a}\cos\frac{2\pi ly}{b}$, где $\lambda_n = \left(\frac{\pi^2k^2}{a^2} + \frac{\pi^2l^2}{b^2}\right)^\beta$, $k, l = \overline{1,\infty}$.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа: *пусть ряд* $\sum\limits_n |\lambda_n - \xi_n|$ *сходится. Для последовательности* $\{\xi_n\}$ *требуется доказать существование такого оператора* $T+P$*, что его спектр* $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}$ *совпадает с данной последовательностью* $\{\xi_n\}$.

2. Основные утверждения

Введем следующие обозначения: $r_n = \frac{1}{2}\min\{\lambda_{n+1} - \lambda_n; \lambda_n - \lambda_{n-1}\}$, $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| = r_n\}$, $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = \lambda_n\}$, $\Omega_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| \ge r_n\}$, $\Omega_N = \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \Omega_n$, $R_0(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}$, $R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1}$; $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ — ядерная норма и норма Гильберта–Шмидта соответственно.

Лемма 1. *[11] При $n \gg 1$, $\beta > 3/2$, имеет место оценка:*

$$\|R_0(\lambda)\|_2^2 \le \|R_0(\lambda)\|^2 + \frac{1}{r_n^2}\left(2 + \frac{\beta C}{2} + \frac{1}{C^{1/\beta}}\right), \quad \lambda \in \gamma_n.$$

Следствие 1. *[11] При $\beta > 3/2$ ряд $\sum\limits_n r_n^2 \left(\max\limits_{\lambda\in\gamma_n} \|R_0(\lambda)\|_2\right)^4$ сходится.*

Лемма 2. *[11] Существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что*
1) для любых $n \le N$ все собственные числа λ_n и μ_n будут находится внутри контура Γ_N,
2) для любых $n > N$ внутри контуров γ_n будут находится ровно по одному λ_n и μ_n.

Рассмотрим операторное тождество

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)PR_0(\lambda) + R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2, \ \lambda \in \Omega_N.$$

Умножим его на $\frac{\lambda}{2\pi i}$, проинтегрируем по контуру γ_n и найдем след. В итоге получим:

$$\mu_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \alpha_n(p), \quad n > N,$$

где

$$\alpha_n(p) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \lambda\,\mathrm{Sp}\,\left[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2\right] d\lambda.$$

Аналогично, умножая на $\frac{\lambda^q}{2\pi i}$ и интегрируя по Γ_N, получим

$$\sum_{n=1}^{N}\mu_n^q = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n^q + \sum_{n=1}^{N} q\lambda_n^{q-1}(Pv_n, v_n) + \alpha_q(p), \quad q \le N, \tag{1}$$

где

$$\alpha_q(p) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} \lambda^q\,\mathrm{Sp}\,\left[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2\right] d\lambda.$$

Можно показать, что оператор $R(\lambda)$ ядерный, и для него справедливо разложение в сходящийся по норме ряд

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k,\ \lambda \in \Omega_N. \tag{2}$$

Подставим ряд (2) в α_n. Получим $\alpha_n(p) = \sum\limits_{k=2}^{\infty}\alpha_n^{(k)}(p)$, где

$$\alpha_q^{(k)}(p) = -\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} \lambda^q\,\mathrm{Sp}\,\left[R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda, \quad q \le N,$$

$$\alpha_n^{(k)}(p) = -\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \lambda\,\mathrm{Sp}\,\left[R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda, \quad n > N.$$

Интегрируя по частям, легко получить следующую формулу:

$$\mathrm{Sp}\int_{\gamma_n} g(\lambda)R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k d\lambda = \frac{-1}{k}\,\mathrm{Sp}\int_{\gamma_n} g'(\lambda)(PR_0(\lambda))^k d\lambda.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_q^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k q}{2\pi i k}\int_{\Gamma_N} \lambda^{q-1}\,\mathrm{Sp}\,\left[(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda, \quad q \le N,$$

$$\alpha_n^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i k}\int_{\gamma_n} \mathrm{Sp}\,\left[(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda, \quad n > N.$$

Запишем (1) в матричном виде. $WV = M$, где

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} (Pv_1, v_1) \\ (Pv_2, v_2) \\ \dots \\ (Pv_N, v_N) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{pmatrix},$$

$m_q = \frac{1}{q}\Big[\sum\limits_{n=1}^{N}(\mu_n^q - \lambda_n^q) - \alpha_N^q(p)\Big]$. Определитель Вандермонда $|W| \ne 0$, поэтому матрица W обратима, и $V = W^{-1}M$. Обозначим через w_{nq}^- элементы обратной матрицы W^{-1}.

Таким образом, получаем $(Pv_n, v_n) = \sum\limits_{q=1}^{N} w_{nq}^- m_q$, $n \le N$.

Лемма 3. *Если функция p удовлетворяет условиям:*

(i) $p(x, b-y) = p(x,y) = p(a-x,y)$, *для почти всех* $(x,y) \in \Pi$,

(ii) $(p, \varphi_{0k})_{L_2(\Pi)} = (p, \varphi_{k0})_{L_2(\Pi)} = 0$, $k = \overline{0, \infty}$, *то*

$$(Pv_n, v_n)_{L_2(\Pi)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}(p, \varphi_n)_{L_2(\Pi_4)}.$$

Пусть $r = \min\{\|P_1\|, \|P_2\|\}$. Оценим разности $|\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)|$ при $n > N$.

$$|\alpha_n^{(k)}(p_1) - \alpha_n^{(k)}(p_2)| = \frac{1}{2\pi k}\left|\int_{\gamma_n} \operatorname{Sp}\left[(P_1R_0(\lambda))^k - (P_2R_0(\lambda))^k\right] d\lambda\right| \leq$$

$$\frac{r_n}{k}\max_{\lambda\in\gamma_n}\left\|(P_1R_0(\lambda))^k - (P_2R_0(\lambda))^k\right\|_1 \leq$$

$$\frac{r_n}{k}\max_{\lambda\in\gamma_n}\left\|\sum_{s=0}^{k-1}(P_2R_0(\lambda))^s(P_1-P_2)R_0(\lambda)(P_1R_0(\lambda))^{k-s-1}\right\|_1 =$$

$$\frac{r_n}{k}\max_{\lambda\in\gamma_n}\left(\sum_{s=0}^{k-1}\|P_1-P_2\|r^{k-1}\|R_0(\lambda)\|_2^2\,\|R_0(\lambda)\|^{k-2}\right) =$$

$$r_n\|P_1-P_2\|r^{k-1}\max_{\lambda\in\gamma_n}\left(\|R_0(\lambda)\|_2^2\,\|R_0(\lambda)\|^{k-2}\right).$$

Далее оценим модуль разности:

$$|\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)| \leq r_n r\|P_1-P_2\|\max_{\lambda\in\gamma_n}\|R_0(\lambda)\|_2^2\sum_{k=0}^{\infty}r^k\max_{\lambda\in\gamma_n}\|R_0(\lambda)\|^k \leq$$

$$\|P_1-P_2\|\max_{\lambda\in\gamma_n}\|R_0(\lambda)\|_2^2\frac{rr_n}{1-r/r_n}.$$

Аналогично, при $q \leq N$ получаем

$$|\alpha_q(p_1) - \alpha_q(p_2)| \leq \|P_1-P_2\|\max_{\lambda\in\Gamma_N}\|R_0(\lambda)\|_2^2\frac{qrr_N^q}{1-r/r_N}.$$

3. Существование

Теорема 1. *Если для последовательности $\{\xi_n\}$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{q=1}^{N}\frac{w_{nq}^-}{q}\sum_{s=1}^{N}(\xi_s^q - \lambda_s^q)\right|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty}|\xi_n - \lambda_n|^2 \leq r_N^2 w^2 ab,$$

где $w \in (0,1)$, то существует оператор P такой, что спектр $\sigma(T+P)$ совпадает с последовательностью $\{\xi_n\}$.

Доказательство. В пространстве $H_1 = L_2(\Pi_4)$ рассмотрим уравнение относительно p:

$$p = \alpha_0 - \alpha(p),$$

где

$$\alpha_0 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\frac{w_{nq}^-}{q}\sum_{s=1}^{N}(\xi_s^q - \lambda_s^q)\varphi_n + \sum_{n=N+1}^{\infty}(\xi_n - \lambda_n)\varphi_n,$$

$$\alpha(p) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\frac{w_{nq}^{-}}{q}\alpha_q(p)\varphi_n + \sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n(p)\varphi_n.$$

Введем оператор $A : H_1 \to H_1$:

$$Ap = \alpha_0 - \alpha(p).$$

Найдем

$$\|\alpha(p_1)-\alpha(p_2)\|_{H_1}^2 \le \sum_{n=1}^{N}\Big[\sum_{q=1}^{N}|w_{nq}^{-}|\|P_1-P_2\|\max_{\lambda\in\Gamma_N}\|R_0(\lambda)\|_2^2\frac{rr_N^q}{1-r/r_N}\Big]^2+$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\Big[\|P_1-P_2\|\max_{\lambda\in\gamma_n}\|R_0(\lambda)\|_2^2\frac{rr_n}{1-r/r_n}\Big]^2=$$

$$r^2\|P_1-P_2\|^2\Big\{\Big[\max_{\lambda\in\Gamma_N}\|R_0(\lambda)\|_2^2\frac{1}{1-r/r_N}\Big]^2\sum_{n=1}^{N}\Big[\sum_{q=1}^{N}|w_{nq}^{-}|r_N^q\Big]^2+$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\max_{\lambda\in\gamma_n}\|R_0(\lambda)\|_2^2\frac{r_n}{1-r/r_n}\Big]^2\Big\} = \|p_1-p_2\|_{H_1}^2\omega^2,$$

где

$$\omega^2 = \frac{4r^2}{ab}\Big\{\dots\Big\}.$$

Выберем r таким, чтобы выполнялось неравенство $\omega < 1$. Тогда α — оператор сжатия.

Положим $R = \min\{r, r_N\sqrt{ab}(1-w)\}$. Так как оператор α_0 является вполне непрерывным, то по комбинированному принципу уравнение в шаре $U(\alpha_0, R) \subset H_1$ будет иметь решение. Отметим, что комбинированный принцип не гарантирует единственности решения.

Пусть p — решение уравнения, P — оператор умножения на функцию p, $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}$ спектр найденного оператора. Из построения уравнения очевидно, что последовательности $\{\mu_n\}$ и $\{\xi_n\}$ совпадают. □

4. Приближенное решение

Приближенное решение будем находить методом последовательных приближений. Выберем M первых собственных чисел из последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{M}$. Число выбираем произвольно, чем оно больше, тем точнее будет найдено приближенное решение. Далее, вместо рядов α_0 и $\alpha(p)$, а также всех других рядов, встречающихся при вычислениях, будем писать суммы до M.

1. Положим $p_0 \equiv 0$.
2. $p_1 = \alpha_0 - \alpha(p_0) = \alpha_0$.
3. $p_{j+1} = \alpha_0 - \alpha(p_j)$, $j = 1, 2, \dots$.
4. Найдем каким-либо способом, например, описанным в [12], спектр $\sigma(T + P_j) = \{\mu_n^j\}$.

Получим множество $\{\sigma(T + P_j)\}_{j=1}^{K}$, где K большое число. При увеличении K будет нарастать вычислительная погрешность.

Вычислительный процесс остановим, когда $\sum_{n=1}^{M}|\mu_n^j - \xi_n|$ будет наименьшая. Найденное p_j будем считать приближенным решением обратной задачи.

Литература

1. Юрко, В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения / В.А. Юрко. – Саратов: Изд-во СГПИ, 2001.
2. Дубровский, В.В. К обратной задаче для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 9. – С. 1563 – 1567.
3. Дубровский, В.В. Устойчивость решения обратных задач спектрального анализа / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 839 – 843.
4. Дубровский, В.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из L^2 / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 1552 – 1561.
5. Дубровский, В.В. Теорема существования в обратной задаче спектрального анализа / В.В. Дубровский // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1702 – 1703.
6. Дубровский, В.В. Теорема о существовании решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа / В.В. Дубровский, А.С., Великих // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 5. – С. 6 – 9.
7. Дубровский, В.В. Обратная задача спектрального анализа и интерполяция по Л. Карлесону / В.В. Дубровский // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, вып. 3. – С. 468 – 471.
8. Садовничий, В.А. Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // ДАН. – 1999. – Т. 367, № 3. – С. 307 – 309.
9. Садовничий, В.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, Е.А. Пузанкова // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1695 – 1698.
10. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой / А.И. Седов, В.В. Дубровский (мл.) // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т. 10, № 1–2. – С. 1 – 8.
11. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестн. СамГУ. Естественно-науч. сер. – 2008. – № 2. – С. 34 – 42.
12. Вычисление первых собственных чисел дискретного оператора / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т.3, № 2. – С. 6 – 8.

Кафедра математических методов в экономике,
Магнитогорский государственный университет
sedov-ai@yandex.ru

Поступила в редакцию 13 марта 2010 г.