УДК 517.9 + 519.216.2

ИЗУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С БЕЛЫМ ШУМОМ МЕТОДАМИ ПРОИЗВОДНЫХ В СРЕДНЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ю.Е. Гликлих

Уравнение леонтьевского типа с белым шумом мы понимаем как выражение $L\dot{\xi}(t) = M\xi(t)+\dot{w}(t)$, где L – вырожденная матрица $n\times n$, M – невырожденная матрица $n \times n$, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс и $\dot{w}(t)$ – белый шум. Поскольку производная $\dot{\xi}(t)$ и белый шум корректно определены только в терминах обобщенных функций, прямое исследование подобного уравнения весьма сложно. Мы привлекаем к исследованию два приема: сначала мы переходим к стохастическому дифференциальному уравнению $L\xi(t) = M\int_0^t \xi(s)ds + w(t)$, где $w(t)$ – винеровский процесс, и затем используем для описания решений этого уравнения так называемые производные в среднем от случайных процессов по Нельсону, которые вводятся без привлечения обобщенных функций. Этим способом получены формулы для решений уравнений леонтьевского типа с белым шумом.

Ключевые слова: производная в среднем, текущая скорость, белый шум, винеровский процесс, уравнение леонтьевского типа.

Введение

Отправной точкой для настоящей работы послужили статьи [1, 2], в которых для изучения динамически искаженных сигналов разработан новый подход, основанный на дифференциальных уравнениях леонтьевского типа. Дальнейшее развитие этого подхода потребовало учета помех, т.е. включения в уравнения так называемого белого шума. Однако белый шум, как случайный процесс, описывается только в терминах обобщенных функций, что делает прямое исследование включающих его леонтьевских уравнений необозримо сложным. В частности, большие проблемы возникают при попытке использовать производные достаточно высоких порядков от белого шума, которые существуют в смысле обобщенных функций, но крайне трудны для использования в конкретных уравнениях.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования уравнений леонтьевского типа с белым шумом основан на следующих соображениях. Прежде всего, мы применяем стандартный прием современного стохастического анализа, состоящий в переходе от белого шума к винеровскому процессу, т.е. в переходе к уравнениям в интегральной форме (формально говоря, белый шум является производной винеровского процесса). При этом полученные уравнения оказываются весьма специфическими стохастическими дифференциальными уравнениями в форме Ито (напомним, что стохастические дифференциальные уравнения всегда имеют смысл только в интегральной форме).

Второе соображение состоит в том, что к исследованию полученных уравнений удается применить теорию производных в среднем, введенных в 60-х годах XX века Э. Нельсоном для нужд созданной им стохастической механики (вариант квантовой механики). Впоследствии оказалось, что уравнения с производными в среднем естественно возникают и в других прикладных разделах (и настоящее исследование является этому хорошим примером), в связи с чем теория таких уравнений к настоящему моменту получила заметное развитие. Отметим, что для описания производных в среднем не задействованы обобщенные функции.

С помощью указанных двух приемов в статье получены формулы для решений уравнений леонтьевского типа с белым шумом в терминах симметрических производных в среднем винеровского процесса.

Кроме настоящего введения, статья содержит два параграфа. Первый посвящен изложению основ теории производных в среднем в объеме, необходимом для целей настоящей статьи. Отметим особо новые результаты по вычислению симметрических производных в среднем высокого порядка для винеровского процесса.

Второй параграф посвящен собственно исследованию уравнений леонтьевского типа с белым шумом.

Более подробно предварительные сведения об аппарате производных в среднем изложены в [6, 7].

1. Производные в среднем

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$, $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной для всех t.

Каждый случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$, $t \in [0, l]$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:
(i) «прошлое» $\mathcal{P}_t^\xi$ – порожденное прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $0 \leq s \leq t$;
(ii) «будущее» $\mathcal{F}_t^\xi$ – порожденное аналогичным образом для $t \leq s \leq l$;
(iii) «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$ – порожденное самим отображением $\xi(t)$.
Все семейства мы считаем полными, то есть пополняем всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через $E_t^\xi(\cdot)$.

Обычное («безусловное») математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону (см., например, [3, 4, 5]) мы даем следующее:

Определение 1. *(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}\right), \tag{1}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к 0 и $\Delta t > 0$.

(ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t}\right), \tag{2}$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\Delta t \to +0$ означает, что $\Delta t \to 0$ и $\Delta t > 0$.

Следует отметить, что вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [8]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t,x) = \lim_{\Delta t\to+0} E(\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}|\xi(t)=x),$$

$$Y^0_*(t,x) = \lim_{\Delta t\to+0} E(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}|\xi(t)=x) \quad (3)$$

на $\mathbb{R}^n$, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y^0_*(t,\xi(t))$.

Производные в смысле Определения 1 являются частными случаями объектов, определенных следующим образом. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – L_1-стохастические процессы в $\mathbb{R}^n$, заданные на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$. Введем y-производную от $x(t)$ справа формулой

$$D^y x(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E^y_t(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}) \quad (4)$$

и y-производную от $x(t)$ слева формулой

$$D^y_* x(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E^y_t(\frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}), \quad (5)$$

где, конечно, пределы должны существовать в $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$.

Напомним, что процесс $\xi(t)$ называется мартингалом (в нашем случае, относительно его прошлого $\mathcal{P}^\xi_t$), если для любых моментов времени $0\le s<t\le l$ выполняется соотношение $E(\xi(t)\mid\mathcal{P}^\xi_s)=\xi(s)$.

Лемма 1. *Пусть $\xi(t)$ является мартингалом относительно его прошлого $\mathcal{P}^\xi_t$. Тогда $D\xi(t)=0$.*

Доказательство. По свойствам условного математического ожидания $E^\xi_t(E(\cdot\mid\mathcal{P}^\xi_t)) = E^\xi_t(\cdot)$. Тогда $E^\xi_t(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)) = E^\xi_t(E(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\mid\mathcal{P}^\xi_t)) = E^\xi_t(\xi(t)-\xi(t))=0$. □

Определение 2. *Производная $D_S=\frac{1}{2}(D+D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A=\frac{1}{2}(D-D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t,x)=\frac{1}{2}(Y^0(t,x)+Y^0_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x)=\frac{1}{2}(Y^0(t,x)-Y^0_*(t,x))$.

Определение 3. *$v^\xi(t)=v^\xi(t,\xi(t))=D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t)=u^\xi(t,\xi(t))=D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.*

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов (см., например, [3, 4, 5, 6, 7]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс, который мы обозначаем символом $w(t)$. Напомним, что процесс $w(t)$ является винеровским (в нашем случае, относительно его прошлого $\mathcal{P}^w_t$), если

1) выборочные траектории $w(t)$ почти наверное (п.н.) непрерывны по t;

2) $w(t)$ является квадратично-интегрируемым мартингалом относительно $\mathcal{P}^w_t$, причем $w(0)=0$ и $E((w(t)-w(s))^2|\mathcal{P}^w_t)=t-s$ при $t\ge s$.

Теорема 1. [Леви] *Винеровский процесс $w(t)$ имеет стационарные независимые гауссовские приращения, и для него выполняются равенства*

$$E(w(t)-w(s))=0, \qquad E((w(t)-w(s))^2)=t-s$$

при $t \geq s$.

Иными словами, приращение $w(t)-w(s)$ при $t \geq s$ не зависит от $\mathcal{P}_s^w$ и имеет то же распределение, что и сам процесс $w(t-s)$.

Показано, что плотность распределения $\rho^w(t,x)$ винеровского процесса в $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\rho^w(t,x)=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{6}$$

Отметим, что п.н. выборочные траектории винеровского процесса почти при всех t не дифференцируемы и на любом сколь угодно малом интервале времени имеют неограниченную вариацию. Поэтому производная винеровского процесса в обычном смысле существует только в обобщенных функциях. Эта производная называется белым шумом. Мы обозначаем ее символом $\dot{w}(t)$.

В дальнейшем мы будем часто иметь дело с процессами вида

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t \beta(s)ds+w(t), \tag{7}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс. Для таких процессов указанные выше «физические» свойства текущей и осмотической скоростей можно лучше понять из следующих утверждений.

Обозначим через $\rho^\xi(t,x)$ плотность процесса (7) относительно лебеговой меры λ на $[0,l]\times\mathbb{R}^n$. Это означает это для любой непрерывной интегрируемой функции $f(t,x)$ на $[0,l]\times\mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\int_{[0,l]\times\mathbb{R}^n} f(t,x)\rho^\xi(t,x)d\lambda=\int_{\Omega\times[0,l]} f(t,\xi(t))d\mathsf{P}dt.$$

Лемма 2. *Для процесса (7) в $\mathbb{R}^n$ векторное поле $u^\xi(t,x)$ представимо в виде*

$$u^\xi(t,x)=\frac{1}{2}\mathrm{grad}\, ln\,\rho^\xi(t,x). \tag{8}$$

Лемма 3. *Для процесса (7) в $\mathbb{R}^n$ векторное поле $v^\xi(t,x)$ и плотность $\rho^\xi(t,x)$ удовлетворяют уравнению непрерывности*

$$\frac{\partial\rho^\xi(t,x)}{\partial t}=-\mathrm{div}(\rho^\xi v^\xi). \tag{9}$$

Доказательства Лемм 2 и 3 в нужной нам общности имеются в [6, 7].

Поскольку винеровский процесс $w(t)$ – мартингал, то $Dw(t)=0$, $t\in[0,l)$ (см. выше).

Лемма 4. *Для $t\in(0,l]$ имеет место равенство $D_*w(t)=\frac{w(t)}{t}$.*

Доказательство. В этом случае, из определения осмотической скорости $u^w(t,w(t))$ следует, что $D_*w(t)=-2u^w(t,w(t))$. Так как плотность $\rho^w(t,X)$ задается формулой (6): $\rho^w(t,x)=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$, то по формуле (8) мы имеем $u^w(t,x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{t}$, откуда $D_*w(t)=\frac{w(t)}{t}$. □

Следствие 1. $D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$.

Замечание 1. Г.А. Свиридюк обратил мое внимание на следующее обстоятельство. Так как для винеровского процесса $E(w(t)^2) = t$, то на феноменологическом уровне рассуждений можно сказать, что средний пробег частицы винеровского процесса за время t равен $\sqrt{t}$ и, следовательно, у белого шума $\dot{w}(t)$ он равен $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Но для текущей скорости $D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$ аналогичные феноменологические рассуждения дают тот же результат для среднего пробега частицы: $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Это в каком-то смысле естественное соотношение между производной $\dot{w}(t)$ винеровского процесса (напомним, существующей только в смысле обобщенных функций) и его текущей скоростью, которая, как было сказано выше, является естественным аналогом обычной физической скорости.

Обратимся к вычислению симметрических производных в среднем высших порядков от винеровского процесса. Следуя системе обозначений из [6, 7], производную порядка k мы будем искать как D^w, D^w_* или D^w_S (см. формулы (4) и (5)) от производных порядка $k-1$. Эти обозначения подчеркивают, что мы всегда используем σ-алгебру «настоящее» именно винеровского процесса $w(t)$.

Лемма 5. *(i)* $D^w \frac{w(t)}{t} = -\frac{w(t)}{t^2}$ *для* $t \in (0, l)$.
(ii) $D^w_* \frac{w(t)}{t} = 0$ *для* $t \in (0, l]$.
(iii) $D^w_S \frac{w(t)}{t} = -\frac{w(t)}{2t^2}$ *для* $t \in (0, l]$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$D^w \frac{w(t)}{t} = (\frac{d}{dt}\frac{1}{t})w(t) + \frac{1}{t}Dw(t) = -\frac{w(t)}{t^2}$$

и

$$D^w_* \frac{w(t)}{t} = (\frac{d}{dt}\frac{1}{t})w(t) + \frac{1}{t}D_* w(t) = -\frac{w(t)}{t^2} + \frac{w(t)}{t^2} = 0.$$

Утверждение (iii) следует из последних двух формул. □

Лемма 6. *(i)* $D^w(\frac{w(t)}{t^k}) = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}}$;
(ii) $D^w_*(\frac{w(t)}{t^k}) = -(k-1)\frac{w(t)}{t^{k+1}}$
(iii) $D^w_S(\frac{w(t)}{t^k}) = -\frac{2k-1}{2}\frac{w(t)}{t^{k+1}}$.

Доказательство. (i) $D^w(\frac{w(t)}{t^k}) = \frac{d}{dt}\frac{1}{t^k}w(t) + \frac{1}{t^k}Dw(t) = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}} + 0 = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}}$

(ii) $D^w_*(\frac{w(t)}{t^k}) = \frac{d}{dt}\frac{1}{t^k}w(t) + \frac{1}{t^k}D_* w(t) = -k\frac{w(t)}{t^{k+1}} + \frac{1}{t^k}\frac{w(t)}{t} = -(k-1)\frac{w(t)}{t^{k+1}}$;

(iii) Из последних двух формул получаем, что $D^w_S(\frac{w(t)}{t^k}) = -\frac{2k-1}{2}\frac{w(t)}{t^{k+1}}$. □

Лемма 7. *При целом* $k \geq 2$

$$D^k_S w(t) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^{k-1}} \cdot \frac{w(t)}{t^k}.$$

Эта формула доказывается по индукции, исходя из утверждений Следствия 1, Леммы 6 (iii) и Леммы 7 (iii).

2. Уравнения леонтьевского типа с белым щумом

Однородное уравнение леонтьевского типа – это дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^n$ вида $L\dot{x}(t) = Mx(t)$, где $x(t)$ и – n-мерный вектор, L и M – $n \times n$ матрицы, причем L вырождена (имеет нулевой определитель), а M – невырождена.

Если пучок $L + \lambda M$ регулярен, преобразованием Кронекера-Вейерштрасса матрицы L и M приводятся к квази-диагональному виду (см. [9]), причем, при соответствующей нумерации векторов базиса, в L сначала вдоль главной диагонали стоят жордановы клетки с нулями по диагонали, а последняя матрица вдоль диагонали – единичная. В M в строках, соответствующих жордановым клеткам, стоит единичная матрица, а последний блок вдоль диагонали представляет собой некоторую невырожденную матрицу.

Всюду в дальнейшем в этой статье мы считаем, что матрицы L и M уже приведены к указанному виду относительно некоторого ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$. Для удобства ссылок в дальнейшем мы приведем матрицы L и M в общем явном виде:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n-q} & a_{n-q+1}^{n-q} & \dots & a_n^{n-q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n-q+1} & a_{n-q+1}^{n-q+1} & \dots & a_n^{n-q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n} & a_{n-q+1}^{n} & \dots & a_n^{n} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Неоднородное уравнение леонтьевского типа имеет вид $L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t)$, где $f(t)$ – n-мерный вектор. Уравнение леонтьевского типа с белым шумом получается из предыдущего уравнения, если $f(t)$ заменено на белый шум $\dot{w}(t)$, т.е. оно имеет вид

$$L\dot{\xi}(t) = M\xi(t) + \dot{w}(t), \tag{12}$$

где $\xi(t)$ – случайный процесс, у которого, вообще говоря, как и у винеровского процесса, производные существуют только в смысле обобщенных функций.

Воспользуемся стандартным для стохастического анализа переходом от (12) к стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ито типа (7) вида

$$L\xi(t) = M\int_0^t \xi(s)ds + w(t). \tag{13}$$

В этой статье мы исследуем задачу, описываемую уравнением (13), оставляя в стороне изучение непосредственно уравнения (12). Из вида (13) понятно (ср. (7)), что (для простоты) начальное условие для решения (13) предполагается вида $\xi(0) = 0$. Отметим сразу, что построенные нами ниже решения этому условию не удовлетворяют и, более того, при $t = 0$ они не определены. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, который удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Замечание 2. Переписав (13) в виде $L\xi(t) - M\int_0^t \xi(s)ds = w(t)$, мы видим, что «настоящее» для процесса $L\xi(t) - M\int_0^t \xi(s)ds$ совпадает с «настоящим» для $w(t)$. Поэтому последнюю σ-алгебру мы и будем использовать при нахождении производных в среднем, т.е. применять к (13) производные D^w, D^w_* или D^w_S.

Учитывая структуру матриц (10) и (11), нетрудно видеть, что (13) распадается на несколько независимых систем уравнений. Самое «нижнее» из них соответствует единичному отрезку диагонали в L и блоку, состоящему из невырожденной матрицы в правом нижнем углу в M. Обозначим последнюю матрицу через K, через $\zeta(t)$ обозначим вектор размерности $q+1$, составленный из последних $q+1$ координат вектора $\xi(t)$. Тогда $\zeta(t)$ описывается уравнением

$$\zeta(t) = K\int_0^t \zeta(s)ds + w(t) \tag{14}$$

в $\mathbb{R}^{q+1}$. Здесь $w(t)$ – $q+1$-мерный винеровский процесс, составленный из последних $q+1$ координат винеровского процесса в $\mathbb{R}^n$. Для уравнения (14) известна аналитическая формула для решений: $\zeta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)}dw(\tau)$.

Другие системы соответствуют клеткам Жордана в L и единичным матрицам соответствующей размерности, выбранным из строк и столбцов M. Рассмотрим этот случай на примере $(p+1)\times(p+1)$ матрицы (жордановой клетки) N в левом верхнем углу (10)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

и соответствующей ей единичной матрице в (11). Через $\xi_{(p+1)}(t)$ обозначим $(p+1)$-мерный вектор с координатами $(\xi^1(t), \dots, \xi^{p+1}(t))$, составленный из первых $(p+1)$ координат вектора $\xi(t)$. Тогда $\xi_{(p+1)}(t)$ описывается уравнением

$$N\xi_{(p+1)}(t) = \int_0^t \xi_{(p+1)}(s)ds + w(t),$$

где $w(t)$ – $(p+1)$-мерный винеровский процесс, составленный из первых $(p+1)$ координаты n-мерного винеровского процесса. В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(t) \\ \xi^2(t) \\ \vdots \\ \xi^p(t) \\ \xi^{p+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t \xi^1(s)ds \\ \int_0^t \xi^1(s)ds \\ \vdots \\ \int_0^t \xi^p(s)ds \\ \int_0^t \xi^{p+1}(s)ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Из последнего уравнения системы (15) получаем, что

$$\int_0^t \xi^{p+1}(s)ds = -w^{p+1}(t). \tag{16}$$

Так как именно текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\xi^{p+1}(t)$ применением к обеим частям равенства производной D_S^w. Легко видеть, что применение производных в среднем D^w и D_*^w (и, следовательно, D_S^w) к интегралу в левой части дает одинаковый результат $\xi^{p+1}(t)$. Таким образом, мы получаем, что

$$\xi^{p+1}(t) = -D_S^w w^{p+1}(t) = -\frac{w^{p+1}(t)}{2t}. \tag{17}$$

Из предпоследнего уравнения системы (15) получаем, что

$$\xi^{p+1}(t) = \int_0^t \xi^p(s)ds + w^p(t), \tag{18}$$

откуда, проведя рассуждения, аналогичные сделанным выше, выводим

$$\xi^p(t) = D_S^w \xi^{p+1}(t) - D_S^w w^p(t).$$

Подставив в последнее равенство выражение для $\xi^{p+1}(t)$ из (17) и использовав Лемму 5, получим

$$\xi^p(t) = \frac{w^{p+1}(t)}{2t^2} - \frac{w^p(t)}{2t}. \tag{19}$$

В точности аналогично, для $1 \leq i \leq p$ мы получаем рекуррентную формулу

$$\xi^i(t) = D_S^w \xi^{i+1}(t) - D_S^w w^i(t). \tag{20}$$

С помощью Лемм 6 и 7 по формуле (20) нетрудно получить явное выражение для любого $\xi^i(t)$.

Вернемся к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (15). Из определения симметрических производных в среднем видно, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции задействованы как приращения по времени вправо, так и влево. Принимая во внимание Леммы 5, 6 и 7, а также формулы (17), (19) и (20), нетрудно видеть что полученные выше решения $\xi^i(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geq 1$. Так что решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, то есть значения решений при $t = 0$ не существуют.

Один из вариантов разрешения указанной ситуации состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, l)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0 & \text{если} \quad 0 \le t \le t_0; \\ t & \text{если} \quad t_0 \le t. \end{cases}$$

Элементы $\frac{w^j(t)}{t^k}$ в формулах (17), (19) и (20) заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени 0 будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t > t_0$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t > max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п.н. совпадают.

Замечание 3. Напомним, что значения производных в среднем существенно зависят от того, σ-алгебру «настоящее» какого процесса мы используем. Проиллюстрируем это на примере полученных выше формул. В Замечании 2 мы обосновали использование σ-алгебры «настоящее» n-мерного винеровского процесса (т.е. использование производной D_S^w), исходя из рассмотрения (13) как единой системы. Однако, вообще говоря, в условие конкретной задачи может входить требование об использовании какой-нибудь другой σ-алгебры. Тогда формулы для решений изменятся. Например, так произойдет, если рассматривать уравнения системы (15) по отдельности. Уравнение (16) не зависит от других уравнений системы (15) и может исследоваться отдельно от (15). В этом случае, рассуждая как в Замечании 2, можно прийти к выводу, что в конструкции производных в среднем для процессов $\xi^{p+1}(t)$ и $w^{p+1}(t)$ надо использовать σ-алгебру «настоящее» процесса $w^{p+1}(t)$. Перепишем затем уравнение (18) в виде $\xi^{p+1}(t) - \int_0^t \xi^p(s)ds = w^p(t)$. Опять рассуждая аналогично Замечанию 2, придем к выводу, что для производных в среднем процессов из этого уравнения надо использовать σ-алгебру «настоящее» процесса $w^p(t)$ и т.д. Напомним, что координаты n-мерного процесса $w(t)$ являются независимыми 1-мерными винеровскими процессами. По свойствам условного математического ожидания это означает, что $E_t^{w^i}(w^j(t)) = E(w^j(t)) = 0$ при $i \ne j$. Аналог рекуррентной формулы (20) примет вид $\xi^i(t) = D_S^{w^i}\xi^{i+1}(t) - D_S^{w^i}w^i(t)$. Однако из сказанного выше и конструкции производных в среднем вытекает, что $D_S^{w^i}\xi^{i+1}(t) = 0$, т.е. $\xi^i(t) = -D_S^{w^i}w^i(t) = -\frac{w^i(t)}{2t}$ при всех $i = 1, \ldots, p+1$.

Исследование частично поддержано грантами РФФИ 10-01-00143 и 12-01-00183.

Литература

1. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – №16(192), вып. 5. – С. 116–120.
2. Шестаков, А.Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – №17(234), вып. 8. – С. 70–75.
3. Nelson, E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews. – 1966. – V. 150, №4. – P. 1079–1085.
4. Nelson, E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.
5. Nelson, E. Quantum fluctuations / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1985. – 147 p.
6. Гликлих, Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю.Е. Гликлих. – М.: КомКнига, 2005. – 416 с.

7. Gliklikh, Yu.E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics / Yu.E. Gliklikh. – London: Springer-Verlag, 2011. – 460 p.
8. Партасарати, К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Партасарати. – М.: Мир, 1988. – 343 с.
9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит,1967. – 575 с.

Юрий Евгеньевич Гликлих, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра алгебры и топологических методов анализа, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), yeg@math.vsu.ru.

MSC 60H30

Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes

Yu.E. Gliklikh, Voronezh State University (Voronezh, Russian Federation)

We understand the Leontieff type equation with white noise as the expression of the form $L\dot{\xi}(t) = M\xi(t) + \dot{w}(t)$ where L is a degenerate matrix $n \times n$, M is a non-degenerate matrix $n\times n$, $\xi(t)$ is a stochastic process we are looking for and $\dot{w}(t)$ is the white noise. Since the derivative $\dot{\xi}(t)$ and the white noise are well-posed only in terms of distributions, the direct investigation of such equations is very complicated. We involve two methods in the investigation. First, we pass to the stochastic differential equation $L\xi(t) = M\int_0^t \xi(s)ds + w(t)$, where $w(t)$ is Wiener process, and then for describing solutions of this equations we apply the so called Nelson mean derivatives that are introduced without using the distributions. By these methods we obtain formulae for solutions of Leotieff type equations with white noise.

Keywords: mean derivative, current velocity, white nose, Wiener process, Leontieff type equation.

References

1. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measuring Dynamically Distorted Signals. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫ – Bulletin of South Ural State University. Seria ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2010, no. 16 (192), issue 5, pp. 116–120. (in Russian)

2. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya ≪Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie≫ – Bulletin of South Ural State University. Seria ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2011, no. 17(234), issue 8, pp. 70–75.

3. Nelson E. Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics. *Phys. Reviews,* 1966, vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085.

4. Nelson E. *Dynamical Theory of Brownian Motion.* Princeton, Princeton University Press, 1967. 142 p.

5. Nelson E. *Quantum Fluctuations.* Princeton, Princeton University Press, 1985. 147 p.

6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis in Problems Mathematical Physics.* Moscow, KomKniga, 2005. 416 p. (in Russian)

7. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.* London, Springer-Verlag, 2011. 460 p.

8. Partasarati K. *An Introduction to Probability Theory and Measure Theory.* Moscow, Mir, 1988. 343 p. (in Russian)

9. Gantmakher F.R. *The Theory of Matrices.* Moscow, Fizmatlit, 1967. 575 p. (in Russian)

Поступила в редакцию 31 мая 2012 г.