УДК 514.174.2 DOI: 10.14529/mmp170306

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПАКОВОК В ЭЛЛИПСЫ

В.Н. Ушаков, П.Д. Лебедев, Н.Г. Лавров
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, г. Екатеринбург

В задачах теории управления часто требуется проводить аппроксимацию множеств наборами из конгруэнтных элементов. Одним из вариантов такой аппроксимации служит упаковка в фигуры на плоскости набора кругов равного радиуса. В статье рассмотрены два варианта задачи о построении оптимальной упаковки в эллипсы различной формы: в первом фиксировано число элементов и требуется максимизировать их радиус, во втором фиксирован радиус кругов и требуется максимизировать их число. В первом варианте применяются итерационные методы, имитирующие отталкивание центров кругов друг от друга и от границы множества. В них используются конструкции чебышевского центра, ортогональных проекций и отталкивания точек. Во втором – рассматриваются упаковки с гексагональной решеткой, которые близки к оптимальным. Реализован программный комплекс построения упаковок для эллипсов с различным соотношением осей.

Ключевые слова: упаковка; хаусдорфово отклонение; максимизация; чебышевский центр; производная по направлению.

Введение

При изучении задач управления и дифференциальных игр [1] возникают множества сложной геометрии, даже если ограничиться двумерным фазовым пространством. Для работы с ними, например, для построения оптимального прицеливания на них или оценки их свойств стабильности, необходимо выполнить их аппроксимацию более регулярным фигурами, по возможности наиболее близкими к исходным множествам [2]. Одним из путей аппроксимации служит замена плоских компактов эллипсами; данное направление активно разрабатывается в научной школе А.Б. Куржанского [3]. Другим способом служит построение аппроксимирующего набора конгруэнтных кругов. При чем возможны аппроксимации фигур как внешние – покрытия, так и внутренние – упаковки [4]. Естественно, возникает вопрос о том, насколько успешно можно выполнить переход от некоторого эллипса к объединению кругов. Если ограничиться рассмотрением упаковок, то возможны две постановки об отыскании оптимальной упаковки набора кругов в эллипс. В первой постановке требуется при фиксированном числе элементов максимизировать их радиус, во второй требуется при заданном радиусе максимизировать число элементов. Для решения в первом случае привлекаются итерационные алгоритмы поэтапной максимизации радиуса кругов, во втором – алгоритмы конструирования гексагональных упаковок. Статья продолжает исследования, начатые в [5, 6].

1. Постановка задач

Ограничимся рассмотрением контейнеров (т.е. множеств, в которые выполняется упаковка) на плоскости.

Определение 1. *Упаковкой* U_n *компактного множества* $M \subset \mathbb{R}^2$ *из* n *шаров радиуса* r *называется объединение* $O(\mathbf{x}_1, r) \cup O(\mathbf{x}_2, r) \cup \ldots \cup O(\mathbf{x}_n, r_n)$ *из* n *кругов, для которых выполняются условия*

$$\forall i = \overline{1, n} \quad O(\mathbf{x}_i, r) \subseteq M,$$

$$\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n}, (i \neq j) \quad \operatorname{int} O(\mathbf{x}_i, r) \cap \operatorname{int} O(\mathbf{x}_j, r) = \varnothing.$$

Здесь int означает внутренность множества в $\mathbb{R}^2$. Таким образом, набор шаров является упаковкой множества M в том случае, если все они вложены в M и все попарно пересекаются только по своим границам (либо не имеют общих точек).

Ограничимся изучением множества $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ компактов в $\mathbb{R}^2$ (причем только выпуклых). Рассматриваются наборы кругов $\Xi(X, r)$, состоящие из n кругов $\{O(\mathbf{x}_i, r)\}_{i=1}^n$, массив центров которых имеет вид $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$.

Задача 1. Пусть заданы выпуклое множество $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ и число $n \in \mathbb{N}$. Требуется найти упаковку множества M из n кругов максимального радиуса $r > 0$.

Решение задачи 1 сводится к отысканию координат n точек. А именно, необходимо найти такой набор из n точек $S_n \subset M$, на котором достигается максимальное значение функции

$$R_M(S_n) = \min_{i=\overline{1,n}} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i). \tag{1}$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \min\left\{\psi^{(i)}(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}, \partial M)\right\}, \tag{2}$$

$$\psi^{(i)}(\mathbf{x}) = \min\left\{\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|}{2} : j = \overline{1, n}, j \neq i\right\}, \tag{3}$$

$\rho(\mathbf{x}, M) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| : \mathbf{m} \in M\}$ – расстояние от точки $\mathbf{x}$ до замкнутого множества M, $\|\mathbf{x}\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{x}$.

Наряду с задачей 1, часто встречается и задача, в некотором смысле к ней обратная.

Задача 2. Пусть заданы выпуклое множество $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ и число $r > 0$. Требуется найти упаковку множества M из n кругов, радиусы которых равны r, при максимально возможном $n \in \mathbb{N}$.

Решение задачи 2 сводится к отысканию максимальных n и n-сети $S_n \subset M$, для которых выполняется оценка

$$R_M(S_n) \geqslant r. \tag{4}$$

2. Методы решения задачи 1

2.1. Условия максимума радиуса кругов упаковки

Аналитическое решение задачи 1 возможно только в самых простых случаях. Поэтому рассмотрим численные итерационные методы построения наборов точек, на которых достигает минимум функция (1). Будем применять методы поочередной максимизации функций $\varphi^{(i)}(\cdot)$ при всех $i = \overline{1, n}$. Заметим, что каждую из них можно записать в виде

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \min\left\{\frac{1}{2}\rho(\mathbf{x}, S_n^{(i)}), \rho(\mathbf{x}, \partial M)\right\}, \tag{5}$$

где

$$S_n^{(i)} = S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}.$$

Формула (5) показывает, что $\varphi^{(i)}(\cdot)$ есть минимум из конечного числа евклидовых расстояний до ограниченного множества, умноженных на положительные числа. Это позволяет получить аналитическое выражение некоторых дифференциальных свойств функции в точках.

Определение 2. *Супердифференциалом* [7] *функции $u(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$ называется выпуклое компактное множество $D^+u(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^2$, для которого выполняется*

$$\forall \mathbf{g} \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \ \frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \min\{\langle \mathbf{g}, \mathbf{d}\rangle \colon \mathbf{d} \in D^+u(\mathbf{x})\}.$$

Здесь введено обозначение для производной функции $u(\mathbf{x})$ по направлению $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ в точке $\mathbf{x}_0$

$$\frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \lim_{\lambda \to 0, \lambda > 0} \frac{u(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{g}) - u(\mathbf{x}_0)}{\lambda}.$$

Если супердифференциал функции $u(\mathbf{x})$ состоит из одной точки, то это значит, что $u(\mathbf{x})$ дифференцируема и имеет градиент, совпадающий с этой точкой.

Для функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ евклидового расстояния супердифференциал определен в всех точках $\mathbb{R}^2 \setminus M$, и ее супердифференциал имеет вид

$$D^+u(\mathbf{x}) = \operatorname{co}\left\{\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\rho(\mathbf{x}, M)} \colon \mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})\right\}, \tag{6}$$

где $\Omega_M(\mathbf{x})$ – множество ближайших к $\mathbf{x}$ в евклидовой метрике точек из M, $\operatorname{co}(M)$ – выпуклая оболочка множества M (подробнее см. [7]). Известно [8], что если на некотором множестве X заданы две супердифференцируемые функции $u_1(\mathbf{x})$ и $u_2(\mathbf{x})$, то и функция $u_m(\mathbf{x}) = \min\{u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x})\}$ также является супердифференцируемой на X. При этом если в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in X$ имеет место $u_1(\mathbf{x}_0) = u_2(\mathbf{x}_0)$, то для супердифферинциала (6) справедлива формула

$$D^+u_m(\mathbf{x}_0) = \operatorname{co}\big(D^+u_1(\mathbf{x}_0) \cup D^+u_2(\mathbf{x}_0)\big). \tag{7}$$

Если же $u_1(\mathbf{x}_0) \neq u_2(\mathbf{x}_0)$, то супердифференциал $D^+u_m(\mathbf{x}_0)$ минимума из двух функций совпадает с супердифференциалом той из них, которая имеет меньшее значение.

Определение 3. *Множеством значимых точек $\Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$ для функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$ в точке $\mathbf{x} \in M$ назовем*

$$\Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) = \{\mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} \colon \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\| = 2\varphi^i(\mathbf{x})\} \cup \{\mathbf{m} \in \partial M \colon \|\mathbf{m} - \mathbf{s}_i\| = \varphi^{(i)}(\mathbf{x})\}.$$

Теорема 1. *Функция $\varphi^{(i)}(\cdot)$ достигает максимума в точке $\mathbf{x} \in M$ только в том случае, если выполнены условия*

$$\mathbf{x} \notin (S_n^{(i)} \cup \partial M) \tag{8}$$

и

$$\mathbf{x} \in \operatorname{co}\Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M). \tag{9}$$

Доказательство. Условие (8) является необходимым, поскольку если оно не выполняется, то $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = 0$. Из того, что оно выполняется, следует: функция $\varphi^{(i)}(\cdot)$ в $\mathbf{x}$ супердифференцируема, то есть определен супердифференциал $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$. Он равен (по формуле (7))

$$D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathrm{co}(D_1 \cup D_2), \tag{10}$$

где

$$D_1 = \mathrm{co}\left\{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{s}_j}{2\|\mathbf{x}-\mathbf{s}_j\|} \colon \left(\mathbf{s}_j \in S_n^{(i)}\right) \& \left(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}_j\| = 2\varphi^{(i)}(\mathbf{x})\right)\right\},$$

$$D_2 = \mathrm{co}\left\{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{m}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|} \colon (\mathbf{m} \in \partial M) \& \left(\|\mathbf{x}-\mathbf{m}\| = \varphi^{(i)}(\mathbf{x})\right)\right\}.$$

В случае, если $\rho(\mathbf{x}, S_n^{(i)}) = 2\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, D_1 есть супердифференциал функции $\rho(\mathbf{x}, S_n^{(i)})/2$, если же $\rho(\mathbf{x}, S_n^{(i)}) > 2\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, то $D_1 = \varnothing$. Аналогично, если $\rho(\mathbf{x}, \partial M) = \varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, то D_2 есть супердифференциал функции $\rho(\mathbf{x}, \partial M)$, если же $\rho(\mathbf{x}, \partial M) > \varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, то $D_2 = \varnothing$. Поэтому в случае, если $\rho(\mathbf{x}, \partial M) = \rho(\mathbf{x}, S_n^{(i)})/2$, супердифференциал $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ есть выпуклая оболочка объединения двух супердифференциалов. В противном случае он совпадает с супердифференциалом той функции, значение которой меньше.

Можно записать формулу (10) в виде

$$D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathrm{co}\left(\left\{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{s}_j}{2\|\mathbf{x}-\mathbf{s}_j\|} \colon \mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right\} \cup \right.$$

$$\left. \cup \left\{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{m}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|} \colon \mathbf{m} \in \partial M \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right\}\right).$$

Из свойств произвольной супердиффеницируемой функции известно, что она достигает максимума во внутренней точке множества своей области определения только в том случае, если нулевой вектор $\mathbf{0} = (0, 0)$ принадлежит ее супердифференциалу [9]. Поэтому необходимое условие максимума можно записать в виде

$$\mathbf{0} \in \mathrm{co}\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - (S_n^{(i)} \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right) \cup \left(\mathbf{x} - (\partial M \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right)\right), \tag{11}$$

Покажем, что если выполняется условие (11), то имеет место

$$\mathbf{0} \in \mathrm{co}\left(\mathbf{x} - \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right). \tag{12}$$

Действительно, согласно теореме Каратеодори [10] найдутся g точек $\mathbf{g}_k, k = \overline{1, g}$ из множества $\frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - (S_n^{(i)} \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right) \cup \left(\mathbf{x} - (\partial M \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right)$, такие что $\mathbf{0} \in \mathrm{co}\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_g\}$. При этом g не превосходит размерность евклидового пространства более, чем на 1, то есть $g \leqslant 3$. Если точка $\mathbf{g}_k$ принадлежит $(\mathbf{x} - (\partial M \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M))$, то естественно выполняется и $\mathbf{g}_k \in (\mathbf{x} - \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M))$. Если же $\mathbf{g}_k$ принадлежит $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - (S_n^{(i)} \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M))$, то имеет место $2\mathbf{g}_k \in (\mathbf{x} - \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M))$.

Покажем, что если

$$\mathbf{0} \in \mathrm{co}\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_g\}, \tag{13}$$

то при любых положительных числах $\alpha_1, \ldots, \alpha_g > 0$ выполняется и

$$\mathbf{0} \in \mathrm{co}\{\alpha_1 \mathbf{g}_1, \ldots, \alpha_g \mathbf{g}_g\}. \tag{14}$$

Действительно, (13) означает, что найдутся три числа $a_1, \ldots, a_g \geqslant 0$, $a_1 + \ldots + a_g = 1$, что

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{g}_1 + \ldots + a_g \mathbf{g}_g.$$

Следовательно, выполняется и равенство

$$\mathbf{0} = \frac{a_1}{\alpha_1} \alpha_1 \mathbf{g}_1 + \ldots + \frac{a_g}{\alpha_g} \alpha_g \mathbf{g}_g.$$

Разделив обе части равенства на $a_1/\alpha_1 + \ldots + a_g/\alpha_g$, получаем, что вектор $\mathbf{0}$ является выпуклой комбинацией векторов $\alpha_1 \mathbf{g}_1, \ldots, \alpha_g \mathbf{g}_g$. А значит выполняется и (14). В частности оно выполняется и в том случае, если коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ равны 1 или $0,5$. Поэтому во множестве $(\mathbf{x} - \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M))$ найдутся две или три точки, такие, что $\mathbf{0}$ лежит в их выпуклой оболочке. Значит, выражение (12) верно. Следовательно, выполняется и условие (9). □

2.2. Итерационные методы максимизации радиуса

Для поэтапного увеличения величины $R_M(S_n)$ авторами реализован алгоритм, который в некотором смысле имитирует отталкивание точки $\mathbf{s}_i$ от ближайших к ней элементов из $S_n^{(i)}$ и от границы ∂M выпуклого компакта M. Он разработан С учетом теоремы 1, на базе тех соображений, чтобы точка $\mathbf{s}_i$ приближалась к точке максимума функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$. Рассматриваются в качестве контейнеров для построения упаковок множества, ограниченные эллипсами. Их границу будем обозначать кривой Γ. В некотором смысле это можно рассматривать как обобщение задачи о построении оптимальной упаковки в круг [11]. Введем также важную геометрическую конструкцию, которая является ключевой в разрабатываемых алгоритмах.

Определение 4. *Чебышевским центром [12] множества $M \in \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^2$ называется такая точка $\mathbf{c}(M)$, что*

$$h(M, \{\mathbf{c}(M)\}) = \inf\{h(M, \{\mathbf{x}\})\colon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}. \tag{15}$$

Величина (15) называется чебышевским радиусом $r(M)$ компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$.

Схема алгоритма итерационного увеличения радиуса упаковки в эллипс M при заданных параметрах D_r и k_r и номере i.

Алгоритм 1.

1. Строится множество $P = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^p$ ортогональных проекций $\mathbf{s}_i$ на кривую Γ.
2. Вычисляется значение функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$ по формуле

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) = \min \left\{ \frac{1}{2} \min\{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| \colon j = \overline{1,n} (j \neq i)\}, \min\{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_k\| \colon k = \overline{1,p}\} \right\}.$$

3. Строится массив точек из $S_n^{(i)}$, которые расположены близко к $\mathbf{s}_i$

$$S^* = \left\{ \mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} \colon \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\| \leqslant 2(\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + D_r) \right\}.$$

4. Строится массив точек из P, которые расположены близко к $\mathbf{s}_i$

$$P^* = \left\{\mathbf{p}_k \in P \colon \|\mathbf{p}_k - \mathbf{s}_i\| \leqslant \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + D_r\right\}.$$

5. Строится массив векторов, направленных от близких точек к $\mathbf{s}_i$ с учетом расстояния:

$$W = \left\{\frac{\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j}{2\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|(2\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + 2D_r - \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|)} \colon \mathbf{s}_j \in S^*\right\} \cup$$
$$\cup \left\{\frac{\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_k}{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_k\|(\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) + D_r - \|\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_k\|)} \colon \mathbf{p}_k \in P^*\right\}.$$

6. Вычисляется новая точка по формуле

$$\widehat{\mathbf{s}}_i = \mathbf{s}_i + k_r \mathbf{c}(W), \tag{16}$$

где $\mathbf{c}(W)$ – чебышевский центр множества W.

7. В качестве новой точки n-сети берется

$$\mathbf{s}_i := \widehat{\mathbf{s}}_i.$$

Замечание 1. Вычисление множества ортогональных проекций точки на границу эллипса сводится к решению уравнения четвертой степени. В зависимости от ее расположения в эллипсе у него может быть от двух до четырех вещественных решений. Поэтому множество P^* всегда состоит более чем из одного элемента. При этом как минимум одна из точек $\mathbf{p}_k \in P^*$ является ближайшей к $\mathbf{s}_i$.

Замечание 2. Формула (16) содержит коэффициент k_r, определяющий насколько сильно смещается точка $\widehat{\mathbf{s}}_i$ по сравнению с $\mathbf{s}_i$. По смыслу он должен быть положительным, но меньше 1. Потому что если он слишком большой, то координаты точек начинают колебаться, и алгоритм не сходится к установившемуся значению S_n. При каждом запуске программного комплекса пользователю предлагается задать его из эмпирических соображений. Если k_r слишком большой, то алгоритм может не сходиться к установившемуся значению, если слишком маленький, то медленно будет расти радиус кругов.

3. Методы решения задачи 2

Известно, что наиболее плотной упаковкой кругами плоскости является гексагональная [14]. То есть элементы упаковки образуют регулярную структуру, в которой каждая точка лежит в центре правильного шестиугольника, вершины которой тоже являются центрами кругов. Естественно предположить, что и для компактных фигур M при достаточно малом радиусе r кругов можно построить гексагональную упаковку, которая будет содержать максимально возможное число элементов (или близкое к нему). Косвенно это подтверждается тем, что некоторые известные оптимальные упаковки в круг имеет либо подобную структуру, либо близкую к ней для большинства точек S_n с небольшими отклонениями вблизи границы (подробнее см. [15, 16]). С другой стороны, гексагональные упаковки просты в описании: структуру гексагональной упаковки на плоскости можно задать, указав лишь координаты одной точки, угол, который образует вектор, соединяющий ее с соседней и вектор одной из координатных осей, и радиус ее элементов. Хотя, заметим, что при малых n упаковки могут существенно отличаться от данного типа, содержать структуры в виде квадратов, треугольников, колец [17, 18].

Одним из вариантов решения задачи 2, реализованным авторами в рамках программного комплекса, стал подход, основанный на применении в качестве базовой структуры плотной гексагональной упаковки объектов. Структура упаковки жестко зафиксирована и привязана к заданной системе координат, а задача максимизации количества объектов в контейнере решается за счет варьирования положения центра и ориентации эллиптического контейнера относительно заданной системы координат, как показано на рис. 1.

На рис. 1 представлена плотная гексагональная упаковка из кругов заданного радиуса и возможные положения эллиптического контейнера относительно этой упаковки. В процессе решения задачи упаковки неопределенность положения центра контейнера соответствует двум степеням свободы x и y. Третья степень свободы соответствует углу поворота γ большой полуоси эллипса относительно оси абсцисс. Использование плотной гексагональной упаковки позволяет ввести ограничения на изменения всех трех степеней свободы при поиске оптимального решения. На рис. 1 выделенная область в начале координат является областью возможных положений центра эллиптического контейнера. Достаточно проверить только эту область, так как размещение центра контейнера в любой другой точке плоскости эквивалентно размещению в одной из точек выделенной области. Это следует из периодической структуры плотной гексагональной упаковки. Ограничение на величину угла наклона большой полуоси контейнера при решении задачи оптимизации вытекает из свойств симметрии выделенной области в начале координат. Эта область обладает шестью осями симметрии, откуда следует следующее ограничение: $\gamma \in [0, \pi/6]$. Таким образом, решение задачи оптимальной упаковки производится численно путем перебора возможных положений центра контейнера и значений угла поворота его большой полуоси относительно плотной гексагональной упаковки с учетом приведенных выше ограничений на степени свободы, что в свою очередь позволяет сократить объем вычислений.

При таком решении задачи оптимальной упаковки на выделенной области неопределенности положения центра контейнера вводится в цилиндрических координатах равномерная по углу α сетка (r_i, α_j) как показано на рис. 2. Сетка строится на основе многократного масштабирования с заданным коэффициентом масштабирования (меньшим единицы) исходной области неопределенности положения центра контейнера, показанной на рис. 1.

Декартовы координаты каждой из точек сетки определяются классическими соотношениями:

$$x_{ij} = r_i \cdot \cos(\alpha_j), \quad y_{ij} = r_i \cdot \sin(\alpha_j).$$

Также вводится равномерная сетка по углу отклонения большой оси контейнера от оси абсцисс системы координат: $\gamma_k \in [0, \pi/6]$. Для каждого конкретного набора значений x_{ij}, y_{ij}, γ_k производится оценка количества элементов упаковки, попадающих внутрь контейнера. Оценка принадлежности элемента упаковки внутренней области контейнера может выполняться разными методами. В итоге из всех наборов, предусмотренных заданными сетками, выбирается тот набор x_{ij}, y_{ij}, γ_k , для которого количество элементов плотной упаковки, попадающих внутрь контейнера максимально.

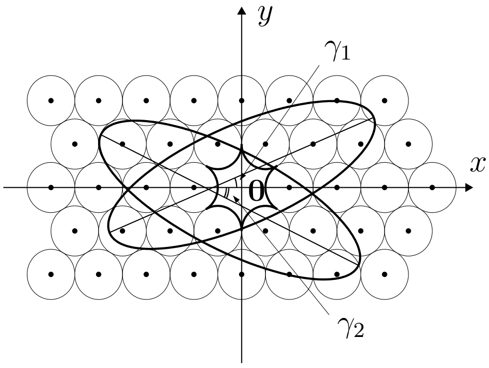

Рис. 1. К процессу построения оптимальной упаковки кругов в эллиптический контейнер

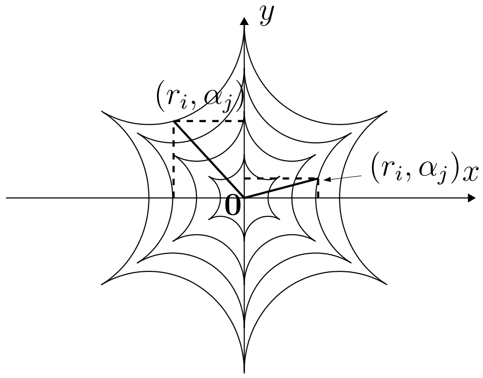

Рис. 2. Построение сетки на области неопределенности положения центра контейнера

4. Примеры решения задач

Авторами с применением описанных выше алгоритмов разработан программный комплекс для построения аппроксимаций оптимальных упаковок. Для его реализации используется пакет MATLAB, позволяющий привлекать различные геометрические и алгебраические вложенные функции [19]. Для решения задачи 1 разработаны итерационные процедуры коррекции точек – центров кругов упаковки. Ее основой служит построение набора W векторов, направленных к точке $\mathbf{s}_i \in S_n$ от ближайших к ней точек сети и ее ортогональных проекций на границу Γ эллипса, с последующим нахождением чебышевского центра W. Для решения задачи 2 разработана процедура конструирования гексагональной сети точек, с возможностью ее сдвига и вращения с заданным центром, с целью отыскания того набора кругов $O(\mathbf{s}_i, r), i = \overline{1, n}$, который был бы вложен в эллипс M при максимальном n. Косвенным способом оценки качества упаковки служит вычисление ее плотности $\sigma(U_n)$, то есть отношение площади объединения ее кругов к площади фигуры M. В [14] показано, что при $n > 1$ плотность упаковки в выпуклое множество не может превосходить величины

$$\sigma^* = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \approx 0,9069,$$

которая достигается только для гексагональной упаковки плоскости. Упаковки, для которых величина $\sigma(U_n)$ максимальна (при специально подобранном соотношении полуосей эллипса), приведены в [20].

Пример 1. Пусть требуется решить задачу 1 для эллипса, ограниченного кривой

$$x^2 + 2y^2 = 1 \tag{17}$$

при числе элементов упаковки $n = 20$ и $n = 30$.

Решение задачи строилось путем многократного запуска программного комплекса. Аппроксимация S_{20} массива центров кругов упаковки U_{20}:

$$S_{20} \approx \{(0,2917, 0,2667), (-0,3903, -0,2520), (-0,8407, -0,0063), (-0,3977, 0,2471), (-0,7136, 0,2857), (-0,2309, -0,5267), (0,1203, -0,0001), (-0,1971, 0,0002), (-0,0426, 0,2774), (-0,2421, 0,5244), (0,1406, -0,5404), (-0,0357, -0,2764), (-0,7054, -0,2944), (0,2974, -0,2641), (0,1334, 0,5414), (0,5903, -0,3873), (0,8059, -0,1542), (0,5038, 0,0034), (0,8017, 0,1631), (0,5827, 0,3925)\}.$$

Радиусов кругов равен $r \approx 0,1585$. Плотность упаковки равна $\sigma(U_{20}) \approx 0,7106$. Граница эллипса M, окружности, ограничивающие круги упаковки U_{20}, и их центры представлены на рис. 3.

Аппроксимация S_{30} массива центров кругов упаковки U_{30}:

$$S_{30} \approx \{(-0,4959, 0,1915), (-0,3990, -0,5092), (0,3228, -0,0331), (0,1281, -0,2121), (0,5951, -0,0482), (-0,8621, 0,0646), (0,1073, -0,4759), (0,0488, 0,2945), (-0,6347, -0,3893), (-0,3957, -0,2435), (0,7094, -0,3247), (-0,2857, 0,0295), (0,3682, -0,5195), (-0,1410, -0,5671), (0,4977, 0,4691), (-0,526, 0,4552), (0,8301, 0,1652), (0,5705, 0,2150), (0,2339, 0,4849), (0,0163, 0,0298), (0,8547, -0,098), (-0,0147, 0,5749), (-0,2165, 0,2858), (-0,5866, -0,0585), (-0,7388, 0,2984), (-0,1359, -0,1894), (-0,2772, 0,5442), (0,3066, 0,2308), (-0,8146, -0,1955), (0,4464, -0,2669)\}.$$

Радиусов кругов равен $r \approx 0,1321$. Плотность упаковки равна $\sigma(U_{30}) \approx 0,7404$. Граница эллипса M, окружности, ограничивающие круги упаковки U_{30}, и их центры представлены на рис. 4.

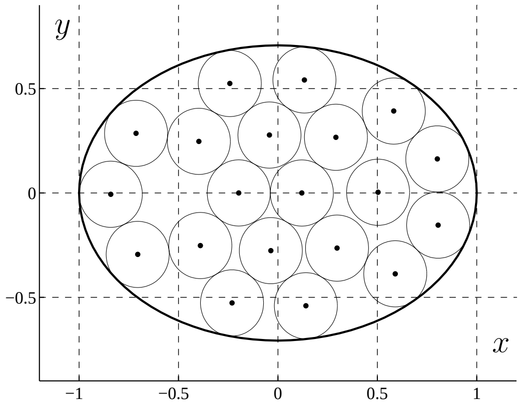

Рис. 3. Аппроксимация оптимальной упаковки U_{20} в примере 1

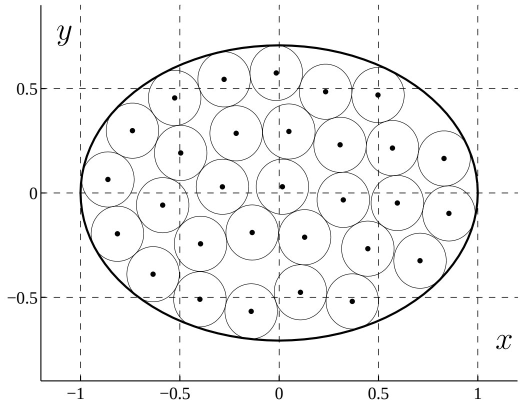

Рис. 4. Аппроксимация оптимальной упаковки U_{30} в примере 1

Пример 2. Пусть требуется решить задачу 2 для эллипса, ограниченного кривой (17) при радиусе кругов упаковки $r = 0,1$.

Решение задачи строилось в классе гексагональных упаковок за счет выбора координат центра опорного круга и поворота осей симметрии.

Оптимальная из найденных упаковок состоит из $n = 53$ элементов. Эта упаковка U_{53} представлена на рис. 5. Плотность упаковки равна $\sigma(U_{53}) \approx 0,7495$.

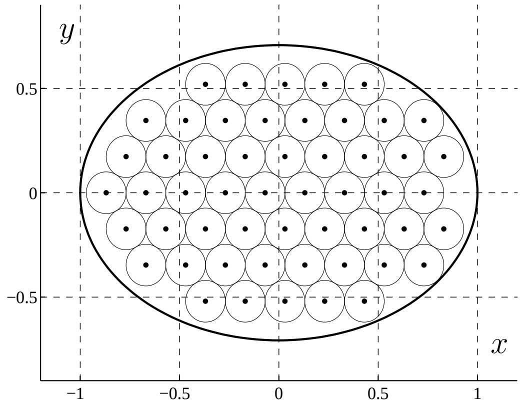

Рис. 5. Аппроксимация оптимальной упаковки U_{53} с радиусом кругов $r = 0,1$ для эллипса, ограниченного кривой (17)

Заключение

Предложенные методы построения оптимальных упаковок в эллиптические контейнеры реализованы в виде программного комплекса. Сравнение полученных результатов с результатами иных подходов к решению поставленной задачи показали, что данные методы позволяют получить решение задачи близкое к оптимальному.

Работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-31-00356-мол_а) и комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект №15-16-1-13.

Литература

1. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
2. Ушаков, В.Н. Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы / В.Н. Ушаков, Н.Г. Лавров, А.В. Ушаков // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 4. – С. 277–286.
3. Kurzhanski, A.B. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control / A.B. Kurzhanski, I. Valyi. – Basel: Birkhäuser, 1997.
4. Слоэн, Дж. Упаковка шаров / Дж. Слоэн // Scientific American. – 1984. – № 3. – С. 72–82.
5. Ушаков, В.Н. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве / В.Н. Ушаков, А.С. Лахтин, П.Д. Лебедев // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 291–308.
6. Казаков, А.Л. Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости / А.Л. Казаков, П.Д. Лебедев // Вычислительные методы и программирование. – 2015. – Т. 16, № 3. – С. 307–317.
7. Демьянов, В.Ф. Недифференцируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
8. Демьянов, В.Ф. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. – М.: Наука, 1990. – 432 с.

9. Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Наука, 1986. – 326 с.

10. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. – М.: Наука, 1985. – 335 с.

11. Szabó, P.G. Packing up to 200 equal circles in a square / P.G. Szabó, E. Specht // Models and Algorithms for Global Optimization. – 2007. – P. 141–156.

12. Гаркави, А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества / А.Л. Гаркави // Успехи математических наук. – 1964. – Т. 19, № 6. – С. 139–145.

13. Белобров, П.К. К вопросу о чебышевском центре множества / П.К. Белобров // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1964. – № 1. – С. 3–9.

14. Тот, Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве / Л.Ф. Тот. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – 365 с.

15. Graham, R.L. Dense Packings of Congruent Circles in a Circle / R.L. Graham, B.D. Lubachevsky, K.J. Nurmela, P.R.J. Östergård // Discrete Mathematics. – 1998. – № 181. – P. 139–154.

16. Lubachevsky, B.D. Curved Hexagonal Packings of Equal Disks in a Circle / B.D. Lubachevsky, R.L. Graham // Discrete & Computational Geometry. – 1997. – V. 18, № 2. – P. 179–194.

17. Markót, M.Cs. A New Verified Optimization Technique for the "Packing Circles in a Unit Square" Problems / M.Cs. Markót, T.A. Csendes // SIAM Journal on Optimization. – 2005. – V. 16, № 1. – P. 193–219.

18. Goldberg, M. Packing of 14, 16, 17 and 20 Circles in a Circle / M. Goldberg // Mathematics Magazine. – 1971. – V. 44, № 3. – P. 134–139.

19. Чен, К. MATLAB в математических исследованиях / К. Чен, П. Джиблин, А. Ирвинг. – М.: Мир, 2001.

20. Erich's Packing Center. – URL: www2.stetson.edu (дата обращения: 10.05.2017)

Владимимир Николаевич Ушаков, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского (г. Екатеринбург, Российская Федерация), ushak@imm.uran.ru.

Павел Дмитриевич Лебедев, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского (г. Екатеринбург, Российская Федерация), pleb@yandex.ru.

Никита Георгиевич Лавров, кандидат технических наук, научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского (г. Екатеринбург, Российская Федерация), lavrov_ng@mail.ru.

Поступила в редакцию 13 мая 2017 г.

MSC 05B40 DOI: 10.14529/mmp170306

ALGORITHMS OF OPTIMAL PACKING CONSTRUCTION IN ELLIPSE

V.N. Ushakov, P.D. Lebedev, N.G. Lavrov
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russian Federation
E-mail: ushak@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru, lavrov_ng@mail.ru

It is often necessary to realize an approximation of sets with the union of congruent elements in the theory of control. One way for this approximation is a packing of the union of disks with equal radii into a planar figure. Two versions of an optimal packing problem are considered in the present paper: the number of elements is fixed and to maximize their radii is required in one, the radius is fixed and to maximize the number of elements is required in another one. Iterative methods imitating their centers repulsing from each other and from the boarder are applied in the first version. Constructions of the Chebyshev center, orthogonal projections and points repulsing are used for them. Packing with a hexagonal pattern (closed to optimal) is considered in the second version. Software complex for packing into eclipses with different ratio of axes is developed.

Keywords: packing; Hausdorff distance; maximization; Chebyshev center; direction derivative.

References

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencialnye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka, 1974. 456 p.
2. Ushakov V.N., Lavrov N.G., Ushakov A.V. Construction of Solutions in a Problem on the Approach of a Stationary Control System. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 277–286. (in Russian)
3. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control.* Basel, Birkhäuser, 1997.
4. Sloane N.J.A. The Packing of Spheres. *Scientific American*, 1984, vol. 250, no. 1, pp. 116–125. DOI: 10.1038/scientificamerican0584-116
5. Ushakov V.N., Lebedev P.D., Lakhtin A.S. [Optimization of the Hausdorff Distance between Sets in Euclidean Space]. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, no. 291 (S1), pp. 222–238. DOI: 10.1134/S0081543815090151
6. Kazakov A.L., Lebedev P.D. Algorithms of Optimal Packing Construction for Planar Compact Sets. *Numerical Methods and Programming*, 2015, vol. 16, no. 3, pp. 307–317. (in Russian)
7. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nondifferentiable Optimization.* N.Y., Springer, 1985. DOI: 10.1007/978-1-4613-8268-3
8. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferencialnoe ischislenie* [Foundations of Nonsmooth Analysis and Quasi-Differential Calculus]. Moscow, Nauka, 1990.
9. Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V. *Kurs metodov optimizatsii* [A Course in Optimization Methods]. Moscow, Nauka, 1986.
10. Leichtweiss K. *Konvexe Mengen.* Berlin, Springer, 1980. DOI: 10.1007/978-3-642-95335-4
11. Szabó P.G., Specht E. Packing up to 200 Equal Circles in a Square. *Models and Algorithms for Global Optimization*, N.Y., Springer, 2007, pp. 141–156. DOI: 10.1007/978-0-387-36721-7_9

12. Garkavi A.L. On the Chebyshev Center and Convex Hull of a Set. *Russian Mathematical Surveys*, 1964, vol. 19, no. 6, pp. 139–145. (in Rissian)
13. Belobrov P.K. On the Chebyshev Center of a Set. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1964, no. 1 (38), pp. 3–9. (in Russian)
14. Töth L.F. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Berlin, Springer, 1957.
15. Graham R.L., Lubachevsky B.D., Nurmela K.J., Östergård P.R.J. Dense Packings of Congruent Circles in a Circle. *Discrete Mathematics*, 1998, vol. 181, no. 1-3, pp. 139–154. DOI: 10.1016/S0012-365X(97)00050-2
16. Lubachevsky B.D., Graham R.L. Curved Hexagonal Packings of Equal Disks in a Circle. *Discrete and Computational Geometry*, 1997, vol. 18, no. 2, pp. 179–194.
17. Markót M.Cs., Csendes T.A. A New Verified Optimization Technique for the "Packing Circles in a Unit Square" Problems. *SIAM Journal on Optimization*, 2005, vol. 16, no. 1, pp. 193–219. DOI: 10.1137/S1052623403425617
18. Goldberg M. Packing of 14, 16, 17 and 20 Circles in a Circle. *Mathematics Magazine*, 1971, vol. 44, no. 3, pp. 134–139. DOI: 10.2307/2688222
19. Chen K., Giblin P. J., Irving A. *Mathematical Explorations with MATLAB.* N.Y., Cambridge University Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9780511624117
20. Erich's Packing Center. Available at: www2.stetson.edu (accessed May 10, 2017).

Received May 13, 2017