ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp230401**

О НАПРАВЛЕНИЯХ ИССЛЕДОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация

Статья представляет собой краткий обзор результатов аналитических исследований классов задач для уравнений соболевского типа, полученных научным коллективом в Южно-Уральском государственном университете. В обзор включен ряд результатов по следующем направлениям: исследование разрешимости начальных задач для линейных, полилинейных уравнений соболевского типа и получение условий их устойчивости; исследование разрешимости классов задач для уравнений соболевского типа высокого порядка; исследование разрешимости и единственности начально-конечных задач и задач оптимального управления для уравнений соболевского типа; создание и развитие теории стохастических уравнений соболевского типа; исследование разрешимости задач для уравнений соболевского типа в пространстве K-форм. Получение всех этих результатов базируется на успешном использовании метода фазового пространства и теории вырожденных разрешающих (полу)групп, разработанными профессором Г.А. Свиридюком и развиваемыми его учениками, работающими в университетах нашей страны. Уравнения соболевского типа лежат в основе различных физических, биологических, экономических и других моделей. Краткое изложение совокупности результатов крупного направления современных исследований позволит получить не только актуальное системное представление о нем, но и о дальнейшем его развитии. Статья содержит пять разделов, в библиографию обзора вошли как работы, ставшие базисными для многих последующих результатов, прежде всего численных исследований, так и работы последних лет, которые расширили границы методов теории уравнений соболевского типа.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; метод фазового пространства Г.А. Свиридюка; вырожденные разрешающие (полу)группы; условие Шоуолтера – Сидорова; начально-конечные условия; оптимальное управление.

80-летию Южно-Уральского университета посвящается

Введение

Эпиграф данной статьи определяет временные границы исследований, которым будет посвящен данный обзор. В 2006 году в Южно-Уральском государственном университете была создана кафедра уравнений математической физики, заведующим ею стал профессор Г.А. Свиридюк, а в ее состав вошли его ученики. К этому году благодаря циклу монографий [4, 8, 37, 82] и конференций, посвященных уравнениям соболевского типа, сложившимся научным школам Новосибирска [26, 27, 87], Екатеринбурга [35], Иркутска [7, 49], Ханты-Мансийска [36, 86], Москвы [1, 24] и Челябинска [54, 56], термин «уравнения соболевского типа», предложенный Р. Шоуолтером [47, 48], стал широко используемым для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной.

Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. Многие математические модели в подходящим образом подобранных функциональных банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ редуцируются к линейному

$$L\dot{x} = Mx + y \tag{1}$$

или полулинейному

$$L\dot{x} = M(x) + y \tag{2}$$

уравнениям, или к уравнению высокого порядка

$$Au^{(n)} = B_{n-1}u^{(n-1)} + B_{n-2}u^{(n-2)} + \ldots + B_0 u + f. \tag{3}$$

К началу 90-х годов Г.А. Свиридюком были получены результаты [50–57], заложившие основы концепции фазового пространства и теории вырожденных разрешающих (полу)групп, позволившие ему, а затем и его первой ученице Т.Г. Сукачевой [59, 60] проводить исследование разрешимости задачи Коши

$$x(0) = x_0 \tag{4}$$

для (1) и (2).

Начиная с середины 90-х годов в течении следующих 10 лет активно развивается аспирантура профессора Г.А. Свиридюка. Это и первые шаги в науку его аспирантов [3, 61–77], и определение направлений исследований, которые будут активно развиваться в ЮУрГУ с 2006 по 2015 годы:

– исследование морфологии фазовых пространств уравнений соболевского типа [14, 28, 84];

– исследование инвариантных пространств и ограниченных решений уравнений соболевского типа [6, 21, 64];

– получение условий разрешимости начальных задач, задач оптимального управления для уравнений соболевского типа высокого порядка [93–95, 97–99];

– получение условий разрешимости задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа [29, 30] и систем леонтьевского типа (конечномерного аналога уравнений соболевского типа) [18];

– исследование многоточечных начально-конечных задач для уравнений соболевского типа [85, 88, 92];

– исследование уравнений соболевского типа на графах [31, 81, 91];

– численные методы решения всех перечисленных задач [5, 13, 18, 41].

Необходимо отметить, что по перечесленным направлениям уже в 2006 году были намечены цели и задачи исследования, было ясно, кем эти исследования будут выполняться. А к концу 2015 году в ЮУрГУ были защищены четыре докторские диссертации, которые во многом стали итогом развития большинства направлений исследований.

Однако, научная жизнь редко проходит по строго намеченному плану, она приносит новые задачи и идеи. Поступление в аспирантуру граждан Ирака, в магистратуре изучавших квазибанаховы пространства, привело к ряду исследований уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах [20, 38, 94]. Сотрудничество двух научных школ – профессора А.Л. Шестакова и профессора Г.А. Свиридюка – привело к созданию математической теории оптимальных динамических измерений [44–46]. Задача восстановления сигнала, динамически искаженного помехами различной природы, привела к необходимости изучения стохастических уравнений соболевского типа [9–12] и неклассических стохастических моделей [17, 43, 79, 80, 91]. Влияние общения с коллегами других математических школ привело к исследованию решений обратных задач [96], начальных задач с различными граничными условиями – Дирихле [77], Вентцеля [16], исследования вырожденных разрешающих позитивных групп [2]. И, конечно, получают толчок к развитию ранее начатые исследования по изучению неавтономных уравнений соболевского типа [6, 39, 40], и получению условий разрешимости начальных задач для уравнений соболевского типа на римановых многообразиях [23, 42, 43] и ограниченности получаемых решений [21, 22, 78].

Отметим, что спектр полученных результатов настолько широк, что подробное рассмотрение их возможно только в рамках цикла монографий. Автор выражает надежду, что эта статья не только сформирует представление о направлениях развития теории уравнений соболевского типа у той части научного сообщества, для которой эти исследования являются интересными и актуальными, но и придаст импульс как совместной работе коллектива научной школы Г.А. Свиридюка по подготовке монографий, так и организационной и финансовой поддержке их издания в Южно-Уральском государственном университете, 80-летнему юбилею которого посвящена данная статья.

1. Морфология фазовых пространств полулинейных моделей соболевского типа

Рассмотрим абстрактное полулинейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \ \ker L \neq \{0\}. \tag{5}$$

Вектор-функцию $u \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$, которая удовлетворяет (5), будем называть его решением. В силу вырожденности (5) решение задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{6}$$

для него не существует при произвольном начальном значении $u_0 \in \mathfrak{U}$ [32, 83]. Рассмотрение неклассических начальных условий [83] позволяет учесть возможное вырождение оператора L. Начальное условие Шоуолтера – Сидорова

$$L(u(0) - u_0) = 0 \tag{7}$$

является обобщением условия Коши и эквивалентно ему в случае невырожденного уравнения ($\ker L = \{0\}$). С одной стороны, использование условия (7) позволяет избежать трудностей изучения задачи Коши и численное исследование задачи (5), (6), с другой стороны, возможна неединственность решения задачи (5), (7) [14, 32]. Концепция фазового пространства Г.А. Свиридюка [50, 58] заключается в редукции исходного сингулярного уравнения к регулярному

$$\dot{u}^1 = F(u),$$

определенному на некотором специальным образом построенном его подмножестве $\mathfrak{M}$, понимаемом как фазовое пространство (многообразие). Его изучение позволяет как получать достаточные условия существования решения задачи (5), (6), так и исследовать вопрос единственности решения задачи (5), (7).

В [32] приведены условия для абстрактного уравнения (5), при которых фазовым многообразием уравнения $\mathfrak{M}$ служит простое гладкое банахово многообразие, из чего следует единственность решения задачи (5), (7). Если же $\mathfrak{M}$ лежит на многообразии, содержащем особенность, например, k-сборку Уитни [75], проекция u_0 на $\mathfrak{M}$ вдоль $\ker L$ может иметь несколько образов и задача (5), (7) будет иметь несколько решений. Отметим, что уравнение $G(q, u) = 0$ определяет k-сборку Уитни над открытым множеством $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$, если существуют функции $g_0, g_1, ..., g_k \in C^\infty(\mathfrak{U}'; \mathbb{R})$ такие, что это уравнение эквивалентно

$$0 = g_0(u) + g_1(u)q + ... + g_k(u)q^k + q^{k+1} \ \forall u \in \mathfrak{U}'.$$

Исследованиям морфологии фазового пространства различных уравнений в научной школе Г.А. Свиридюка всегда уделялось особое внимание. И его первые ученики проводили исследования в рамках этого направления [3, 59, 67], проводились они и другими аспирантами в начале 2000-х годов [14,70,75], продолжаются они и последние годы [13, 33]. Общие методы были использованы при изучении различных неклассических математических моделей, особенностей их фазового многообразия и условий существования одного или нескольких решений задачи Шоуолтера – Сидорова. В [28] приведен обзор работ Г.А. Свиридюка и его последователей по изучению морфологии фазовых пространств уравнений соболевского типа, выявлению особенностей фазового многообразия основного уравнения, из которых следует неединственность решения задачи Шоуолтера – Сидорова.

В данном разделе приведем пример применения общих подходов для вырожденной модели распространения нервного импульса [28].

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений Фитц Хью – Нагумо
$$\begin{cases} \varepsilon_1 v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ \varepsilon_2 w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3, \end{cases} \tag{8}$$
в случае $\varepsilon_1 = 0$ которая примет вид
$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \tag{9}$$
с граничным условием
$$v(s,t) = 0,\ w(s,t) = 0,\ (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{10}$$
и начальным условием
$$w(0) = w_0. \tag{11}$$
Математическая модель (8), (10) моделирует распространение волн возбуждения, лежащих в основе передачи нервных импульсов в биологической системе. Здесь $w = w(s,t)$ – функция, описывающая динамику мембранного потенциала, $v = v(s,t)$ – медленная восстанавливающая функция, связанная с ионными токами, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{R}$ – фиксированные параметры, характеризующие: β_{11}, β_{12} – порог возбуждения и его скорость, α_1 – электропроводность среды, α_2 – реполяризацию среды.

Вводятся в рассмотрение банахово $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, гильбертово $\mathfrak{X} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ пространства. Обозначим через $\mathfrak{Y}$ пространство, сопряженное к $\mathfrak{H}$ относительно двойственности $[\cdot,\cdot]$. Линейные операторы $L, M : \mathfrak{H} \to \mathfrak{Y}$ строятся следующим образом:
$$[Lu,\zeta] = (w,\eta),\ x,\zeta \in \mathfrak{H}, \qquad [Mu,\zeta] = -\alpha_1(v_{s_i}, \xi_{s_i}) - \alpha_2(w_{s_i}, \eta_{s_i}).$$
Отметим, что $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H},\mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H},\mathfrak{Y})$, и для всех фиксированных значений параметров $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ оператор M L-секториален.

Определяется нелинейный оператор
$$[N(x),\zeta] = (\beta_{12} w - \beta_{11} v, \xi) + (\beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3, \eta)$$
таким, что $\operatorname{dom} N = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 = L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_1^* \times \mathfrak{B}_2^* = L_{\frac{4}{3}}(\Omega) \times L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$. При всех фиксированных значениях параметров $\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{11}, \beta_{21} \in \mathbb{R}$, $n \le 4$, оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{B};\mathfrak{B}^*)$.

Построив пространство $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_1^0 \oplus \mathfrak{X}_\alpha^1$, где $\mathfrak{X}_1^0 = W_2^1(\Omega) \times \{0\}$, $\mathfrak{X}_\alpha^1 = \{0\} \times \mathfrak{X}^\alpha$, $\mathfrak{X}^\alpha = L_4(\Omega)$, отметим, что при $n \leq 4$ справедливо плотное и непрерывное вложение

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{X}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{X}.$$

И, наконец, построив фазовое многообразие

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_1} = \{x \in \mathfrak{X}_\alpha : (\alpha_1 v_{s_i}, \xi_{s_i}) + (\beta_{11} v, \xi) = (\beta_{12} w, \xi)\}, \tag{12}$$

доказывается

Теорема 1. [13] *Для всех фиксированных значений параметров* $\alpha_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\beta_{21}, \beta_{22} \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}_+$, $n \leq 4$,

(i) фазовым пространством системы уравнений (9) служит простое C^∞*-многообразие* $\mathfrak{M}_{\varepsilon_1}$*;*

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{X}_\alpha$ *существует и единственно решение (9), (10), (11).*

Перейдем к рассмотрению особенностей фазового многообразия и условий единственности и неединственности решений. Для этого в $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим вырожденную систему уравнений Фитц Хью – Нагумо (8) в случае $\varepsilon_2 = 0$, которая примет вид

$$\begin{cases} v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_{12} w - \beta_{11} v, \\ 0 = \alpha_2 \Delta w + \beta_{22} w - \beta_{21} v - w^3 \end{cases} \tag{13}$$

с граничным условием (10) и начальным условием

$$v(0) = v_0. \tag{14}$$

Пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Y}$ и операторы M и N остаются теми же, отличие заключается в задании оператора

$$[Lu, \zeta] = (v, \xi),\ u, \zeta \in \mathfrak{H}, \tag{15}$$

причем для всех фиксированных значений $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ оператор M L-секториален.

Пространства $\mathfrak{X}_\alpha$, $\mathfrak{X}_\alpha^1$ строятся также. Для всех фиксированных значений параметров $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, 2}$, $n \leq 4$, оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{X}_\alpha; \mathfrak{Y})$.

Построим фазовое многообразие

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_2} = \left\{u \in \mathfrak{X}_\alpha : -(v, \xi) = \left(-\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w + \frac{1}{\beta_{21}} w^3, \xi\right) + \left(\frac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}, \xi_{s_i}\right)\right\}. \tag{16}$$

Рассмотрим случай $\beta_{22} = \alpha_2 \nu_1$, положим

$$\mathfrak{X}^{\alpha\perp} = \{v^\perp \in \mathfrak{X}^\alpha : (v^\perp, \varphi_1) = 0\},\ \mathfrak{H}_2^\perp = \{w^\perp \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : (w^\perp, \varphi_1) = 0\}.$$

Если $v \in \mathfrak{X}^{\alpha\perp}$ и $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ представить в виде $v = v^\perp + r\varphi_1$ и $w = w^\perp + q\varphi_1$, где $r, q \in \mathbb{R}$, то множество

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_2} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega -v^\perp \xi^\perp ds = \int_\Omega \left(-\tfrac{\beta_{22}}{\beta_{21}} w^\perp \xi^\perp + \tfrac{\alpha_2}{\beta_{21}} w_{s_i}^\perp \xi_{s_i}^\perp + \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{\beta_{21}} (w^\perp + q\varphi_1)^3 \xi^\perp \right) ds, \\ \displaystyle -\beta_{21} r = \int_\Omega (w^\perp + q\varphi_1)^3 \varphi_1 ds \end{array} \right. \right\}. \tag{17}$$

Перейдем к рассмотрению второго соотношения в (17) и, преобразуя его, получим:

$$q^3||\varphi_1||^4_{L_4(\Omega)} + 3q^2 \int\limits_\Omega w^\perp \varphi_1^3 ds + 3q \int\limits_\Omega (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds + \int\limits_\Omega \varphi_1 (w^\perp)^3 ds + \beta_{21} r = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18) является кубическим уравнением общего вида $aq^3 + bq^2 + cq + d = 0$, где

$$a = ||\varphi_1||^4_{L_4(\Omega)},\ b = 3\int\limits_\Omega w^\perp \varphi_1^3 ds,\ c = 3\int\limits_\Omega (w^\perp)^2 \varphi_1^2 ds,$$

$$d = \int\limits_\Omega \varphi_1 (w^\perp)^3 ds - \beta_{21} r,\ p = \frac{3ac - b^2}{9a^2},\ e = \frac{1}{2}\left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right),$$

$$\mathfrak{Res}(q, w^\perp) = p^3 + e^2,$$

$$R(q, w^\perp) = q^2\|\varphi_1\|^4_{L_4(\Omega)} + 2q\int\limits_\Omega \varphi_1^3 w^\perp ds + \int\limits_\Omega \varphi_1^2 (w^\perp)^2 ds.$$

Построим множества

$$\mathfrak{H}_2^0 = \{w \in \mathfrak{H}_2 : R(q, w^\perp) = 0\},\ \mathfrak{H}_2^+ = \{w \in \mathfrak{H}_2 : \mathfrak{Res}(q, w^\perp) > 0\},$$

$$\mathfrak{H}_2^- = \{w \in \mathfrak{H}_2 : \mathfrak{Res}(q, w^\perp) < 0\}.$$

Теорема 2. [13] *При любых $\alpha_1, \beta_{11}, \beta_{12} \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_{21} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{22} = \alpha_2\nu_1$, $n \le 4$,*
(i) фазовое пространство $\mathfrak{M}_{\varepsilon_2}$ содержит 2-сборку Уитни;
(ii) для любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha \bigcap \mathfrak{H}_2^-$ существует одно решение задачи (10), (13), (14);
(iii) для любого $v_0 \in \mathfrak{X}^\alpha \bigcap \mathfrak{H}_2^+$ существует три решения задачи (10), (13), (14).

2. Многоточечная начально-конечная задача

В данном разделе, стремясь представить более широкий спектр исследований, многоточечную начально-конечную задачу представим для неавтономного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = a(t)Mu(t) + g(t), \tag{19}$$

где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т. е. линейный и непрерывный) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathfrak{U}$), действующие в некоторых банаховых пространствах $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$.

Зафиксируем $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0, n}$; возьмем $\tau_0 = 0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\tau_{j-1} < \tau_j$, $j = \overline{1, n}$. Дополним уравнение (19) *многоточечным начально-конечным условием* [90]

$$\lim_{t \to \tau_0+} P_0(u(t) - u_0) = 0, \qquad P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{20}$$

где P_j – относительно спектральные проекторы.

Отметим, что общая постановка многоточечной начально-конечной задачи (19), (20) в относительно p-радиальном случае была впервые приведена в [90], а при $n = 1$ условие вида (20) называется начально-конечным. Направление, связанное с исследованием многоточечной начально-конечной задачи, возглавляет С.А. Загребина, и развивают его не только ее ученики [25, 89], но и другие исследователи этой научной школы. С многоточечным начально-конечным условием было исследовано уравнение соболевского типа высокого порядка [85], оптимальное управление решениями уравнения соболевского типа первого порядка с начально-конечным условием исследовано, например, в [29], а для уравнений соболевского типа высокого порядка – в [99]. Очевидно, что многоточечные начально-конечные условия являются обобщением условия Шоуолтера – Сидорова.

Основные определения приведем, следуя [82]. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линейный и непрерывный), а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathfrak{U}$). Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ называется соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* оператора M. Предполагая, что $\rho^L(M) \neq \emptyset$, задается оператор-функции комплексного переменного $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$, которые называются соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой L-резольвентами* оператора M. Аналогично оператор-функции $(p+1)$ комплексного переменного вида

$$R^L_{(\lambda,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}R^L_{\lambda_k}(M), \quad L^L_{(\lambda,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}L^L_{\lambda_k}(M), \qquad \lambda_k\in\rho^L(M) \quad (k=\overline{0,p}) \tag{21}$$

с областью определения $[\rho^L(M)]^{p+1}$ называются соответственно *правой* и *левой (L,p)-резольвентами* оператора M. Все эти оператор-функции голоморфны в своей области определения.

Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (или *(L,p)-радиальным*), если

(i) $\exists\alpha\in\mathbb{R} : (\alpha,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall\mu = (\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p) \in (\alpha,+\infty)^{p+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-\alpha)^n}.$$

Обозначим

$$\mathfrak{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M),\ \mathfrak{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),\ L_0 = L\Big|_{\mathfrak{U}^0},\ M_0 = M\Big|_{\operatorname{dom} M\cap\mathfrak{U}^0}.$$

Через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) обозначим замыкание линеала $\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$). При условии (L,p)-радиальности оператора M существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Однопараметрическое семейство операторов $U^\bullet : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется *сильно непрерывной полугруппой* (*C_0-полугруппой*) операторов, если

(i) $U^sU^t = U^{s+t}\ \forall s,t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(ii) U^t сильно непрерывен при $t > 0$ и существует $\lim\limits_{t\to0+} U^tu = u$ для всех u из некоторого линеала плотного в $\mathfrak{U}$.

Полугруппа $\{U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется *экспоненциально ограниченной с константами* C и α, если $\exists C > 0\ \exists\alpha \in \mathbb{R}\ \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \|U^t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq Ce^{\alpha t}$.

В условиях (L,p)-радиальности оператора M существует вырожденная экспоненционально ограниченная C_0-полугруппа

$$\begin{gathered} U^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\left(L-\tfrac{t}{k}M\right)^{-1}L\right)^k = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\tfrac{k}{t}R^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k, \quad t>0, \\ \left(F^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(L\left(L-\tfrac{t}{k}M\right)^{-1}\right)^k = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\tfrac{k}{t}L^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k \ \ t>0\right), \end{gathered} \tag{22}$$

определенная на подпространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$ ($\tilde{\mathfrak{F}}$), где через $\tilde{\mathfrak{U}}$ ($\tilde{\mathfrak{F}}$) обозначим замыкание линеала $\mathfrak{U}^0\dot{+}\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathfrak{F}^0\dot{+}\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$). Здесь символом s-lim обозначен сильный предел.

Единица полугруппы $\{U^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{F}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ является проектором $P = \lim\limits_{t\to 0+} U^t$ $(Q = \lim\limits_{t\to 0+} F^t)$ вдоль $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{F}^0)$ на подпространство $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F}^1)$.

Обозначая через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(\mathrm{dom} M_k \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$, вводятся условия

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1, \tag{23}$$

$$\text{существует оператор } \; L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1). \tag{24}$$

Если оператор M (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$ (здесь и далее $\mathbb{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbb{N}$), и выполнены (23), (24). Тогда

(i) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{U}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $\quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom}\, M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $\;\mathrm{dom}\, M_k = \mathrm{dom}\, M \cap \mathfrak{U}^k$, $\;k = 0, 1$;
(ii) оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$ нильпотентен степени не выше p;
(iii) оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ является генератором C_0-полугруппы разрешающих операторов для уравнения вида $\dot{u} = Su$.

Перейдем к изложению результатов исследования разрешимости многоточечной начально-конечной задачи для неавтономного эволюционного уравнения, используя [40, 90].

Двухпараметрическое семейство $U(\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется *вырожденным сильно непрерывным в нуле полупотоком* (C_0-*полупотоком*) операторов, если выполнены следующие условия

(i) $U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s)$ для всех $0 \le s < \tau < t$;

(ii) $U(t,s)$ сильно непрерывны для всех $t, s > 0$ и для всех $s \ge 0$ существует $\lim\limits_{t\to s+0} U(t,s)u = u$ для всех u из линеала плотного в некотором подпространстве $\mathfrak{U}$.

Теорема 3. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, выполнены* (23), (24) *и* $a(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, *тогда двухпараметрическое семейство операторов при* $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$,

$$U(t,s)\Big|_{\mathfrak{U}^1} = s\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\left(L - \frac{1}{k} M \int\limits_s^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-1} L \right)^k = s\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(\mathbb{I}_{\mathfrak{U}} - \frac{1}{k} S \int\limits_s^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-k}, \tag{25}$$

где $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$, $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0)$, *является вырожденным* C_0-*полупотоком операторов.*

Заметим, что в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ по аналогии с (25) задается полупоток операторов следующей формулой:

$$F(t,s) = s\text{-}\lim_{k\to\infty} \left(L \left(L - \frac{1}{k} M \int\limits_s^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-1} \right)^k, \qquad s < t. \tag{26}$$

Рассмотрим дополнительно условие

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^n \sigma_j^L(M),\ n \in \mathbb{N},\ \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset \text{ содержится в ограниченной} \\ \text{области } D_j \subset \mathbb{C} \text{ с кусочно гладкой границей } \partial D_j = \gamma_j \subset \mathbb{C}. \text{ Кроме того,} \\ \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset \text{ и } \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \text{ при всех } j,k,l = \overline{1,n}, k \neq l. \end{array} \right. \tag{27}$$

В силу голоморфности относительных резольвент существуют проекторы, которые имеют вид

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}), \quad j=\overline{1,n},$$

$P_0 = P - \sum\limits_{j=1}^n P_j$, $\quad Q_0 = Q - \sum\limits_{j=1}^n Q_j$, где P и Q определены раннее.

Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{U}^{1j} = \operatorname{im} P_j$, $\mathfrak{F}^{1j} = \operatorname{im} Q_j$, $j=\overline{0,n}$. По построению

$$\mathfrak{U}^1 = \bigoplus_{j=0}^n \mathfrak{U}^{1j} \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{F}^1 = \bigoplus_{j=0}^n \mathfrak{F}^{1j}.$$

Через L_{1j} обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^1_j$, $j=\overline{0,n}$, а через M_{1j} обозначим сужение оператора M на $\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^1_j$, $j=\overline{0,n}$. Поскольку, $P_j\varphi \in \operatorname{dom} M$, если $\varphi \in \operatorname{dom} M$, то область определения $\operatorname{dom} M_{1j} = \operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^1_j$ плотна в $\mathfrak{U}^1_j$, $j=\overline{0,n}$.

Теорема 4. (Обобщенная спектральная теорема [90]) *Пусть операторы* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *и* $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем оператор* M (L,p)*-радиален,* $p \in \mathbb{N}_0$, *и выполнены условия* (23), (24), (27). *Тогда*

(i) *операторы* $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $M_{1j} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^{1j};\mathfrak{F}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$;

(ii) *существуют операторы* $L^{-1}_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{1j};\mathfrak{U}^{1j})$, $j=\overline{0,n}$.

Зафиксируем $u_j \in \mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$; возьмем $\tau_0=0$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\tau_{j-1} < \tau_j$, $j=\overline{1,n}$. Для них рассмотрим многоточечную начально-конечную задачу [?]

$$\lim_{t\to\tau_0+} P_0(u(t)-u_0) = 0, \qquad P_j(u(\tau_j)-u_j)=0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{28}$$

для уравнения (19) на промежутке $(\tau_0,\tau_n]$ с функцией $g:(\tau_0,\tau_n)\to\mathfrak{F}$. Подействуем на уравнение (19) последовательно проекторами $\mathbb{I}-Q$ и Q_j, $j=\overline{0,n}$, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} H\dot{u}^0(t) = a(t)u^0(t) + M_0^{-1}g^0(t), \\ \dot{u}^{j1}(t) = a(t)S_{1j}u^{1j}(t) + L^{-1}_{1j}g^{1j}(t), \ j=\overline{0,n}, \end{cases}$$

где $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, операторы $S_{1j} = L^{-1}_{1j}M_{1j} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^{1j})$, причем спектр $\sigma(S_j) = \sigma^L_j(M)$; $g^0 = (\mathbb{I}-Q)g$, $g^{1j} = Q_jg$, $u^0 = (\mathbb{I}-P)u$, $u^{1j} = P_ju$, $j=\overline{0,n}$.

Вектор-функция $u \in C([\tau_0,\tau_n];\mathfrak{U}) \cap C^1((\tau_0,\tau_n];\mathfrak{U})$ называется *решением уравнения* (19), если она на (τ_0,τ_n) обращает его в тождество. Решение $u=u(t)$ уравнения (19) называется *решением многоточечной начально-конечной задачи* (19), (28), если оно удовлетворяет условиям (28).

Теорема 5. [40] *Пусть оператор* M (L,p)*-радиален,* $p \in \mathbb{N}_0$, $a(t) \in C^{p+1}([\tau_0,\tau_n];\mathbb{R}_+)$, *и выполнены условия* (23), (24), (27), *тогда для любых векторов* $u_j \in \mathfrak{U}^1_j$ $(j=\overline{0,n})$ *и вектор-функции* $g:(\tau_0,\tau_n)\to\mathfrak{F}$ *такой, что* $Qg \in C((\tau_0,\tau_n),\mathfrak{F}^1)$ *и* $(\mathbb{I}_\mathfrak{F}-Q)g \in C^{p+1}((\tau_0,\tau_n),\mathfrak{F}^1)$ *существует единственное классическое решение* $u \in C([\tau_0,\tau_n];\mathfrak{U}) \cap C^1((\tau_0,\tau_n];\mathfrak{U})$ *задачи* (19), (28) *вида*

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^k \frac{g^0(t)}{a(t)} + \sum_{j=0}^{n}\left(U(t,\tau_j)P_jx_j - \int_t^{\tau_j} U(t,s)P_jL^{-1}_{1j}g^{1j}(s)ds\right). \tag{29}$$

3. Задачи оптимального управления

В этом разделе рассмотрим общий подход к исследованию разрешимости задачи оптимального управления

$$J(x,u) \to \min, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \tag{30}$$

где пары (x,u) удовлетворяют полулинейному уравнению

$$L\,\dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^{k} N_j(x) = u, \ \ker L \neq \{0\} \tag{31}$$

с начальным условием Коши

$$x(0) = x_0 \tag{32}$$

или начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0. \tag{33}$$

Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал стоимости; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое непустое, замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Общий метод исследования задач оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа разработан Н.А. Манаковой [29, 30], он позволил ей и ее ученикам аналитически и численно исследовать задачи оптимального управления для широкого класса математических моделей [31, 34].

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*), j = \overline{1,k}, k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле $\mathcal{H}$) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathfrak{H}$, а $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, симметричный, 2-коэрцитивный оператор. Пусть $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*), r \geq 1, j = \overline{1,k}$ – s-монотонные и p_j-коэрцитивные операторы, где $p_j \geq 2$ и $p_k = \max\limits_j p_j$, имеющие симметричную производную Фреше.

Пусть вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^*$$

плотны и непрерывны. Сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0,T), \tag{34}$$

здесь оператор Q – проектор вдоль $\operatorname{coker} L$ на $\operatorname{im} L$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{H} : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q)\sum\limits_{j=1}^{k} N_j(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}, \text{ если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{H}, \quad \text{если} \quad \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть выполнено условие (34), тогда множество $\mathfrak{M}$ есть банахово C^r-многообразие, диффеоморфно проектирующееся вдоль $\ker L$ на $\operatorname{coim} L$ всюду, за исключением, быть может, точки нуль.*

Построив пространство

$$\mathfrak{X} = \{x|\ x \in L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L) \cap L_{p_k}(0,T;\mathfrak{M}),\quad \dot{x} \in L_2(0,T;\mathfrak{H})\},$$

слабым обобщенным решением уравнения (31) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L\frac{d}{dt}x, w \right\rangle + \langle Mx, w\rangle + \sum_{j=1}^k \langle N_j(x), w\rangle \right] dt = \int\limits_0^T \varphi(t)\, \langle u, w\rangle\, dt$$
$$\forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0,T).$$

Решение уравнения (31) назовем решением задачи Коши, если оно удовлетворяет (32).

Строятся галеркинские приближения решения задачи (31), (32), для чего выбирается в $\mathfrak{H}$ ортонормальная (в смысле $\mathcal{H}$) тотальная система $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l\} = \ker L, \dim\ker L = l$. Галеркинские приближения решения задачи (31), (32) имеют вид

$$x^m(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t)\varphi_i,\ m > l, \tag{35}$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t),\ i = 1, ..., m$ определяются следующей задачей:

$$\left\langle L\frac{dx^m}{dt}, \varphi_i \right\rangle + \left\langle Mx^m + \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i\rangle\,,\ \langle x^m(0) - x_0, \varphi_i\rangle = 0,$$

$$x^m(0) \to x_0 \text{ сильно в пространстве } \mathfrak{H}.$$

Теорема 7. *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)$ таких, что выполнено (34), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (31), (32).*

Для исследования разрешимости задачи Шоуолтера – Сидорова (31), (33) обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\operatorname{coim} L$ и положим $x^1 = Px_0 \in \operatorname{coim} L$. Построив пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x|\ x \in L_\infty(0,T;\operatorname{coim}L) \cap L_{p_k}(0,T;\mathfrak{B}_k),\quad \dot{x}^1 \in L_2(0,T;\operatorname{coim}L)\},$$

показывается справедливость следующей теоремы

Теорема 8. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (31), (33).*

Пусть дополнительно вложение $\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H}$ компактно. Построим пространство $\mathfrak{U} = L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве $\mathfrak{U}$ непустое, замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Рассмотрим задачу оптимального управления (30), (31), (33), где функционал стоимости

$$J(x,u) = \beta \int\limits_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k}\, dt + (1-\beta) \int\limits_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2\, dt,\ \beta \in (0,1),$$

здесь $z_d = z_d(t)$ – требуемое состояние.

Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (30), (31), (33), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \min_{(x,u)} J(x,u),$$

где пары $(x,u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (31), (33); вектор-функцию $\tilde{u}$ назовем *оптимальным управлением.*

Теорема 9. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (30), (31), (33).*

При рассмотрении начального условия Коши необходимо на множество допустимых управлений наложить дополнительное ограничение. Рассмотрим динамический случай. Построим пространство $\mathfrak{U}^2 = \{u \in L_2(0,T;\mathfrak{H}^*) : (\mathbb{I}-Q)u = 0,\ t \in (0,T)\}$ и пространство $\mathfrak{U}^3 = \{u \in L_{q_k}(0,T;\mathfrak{B}_k^*) : (\mathbb{I}-Q)u = 0,\ t \in (0,T)\}$; определим $\mathfrak{U}^2_{ad} \subset \mathfrak{U}^2$ и $\mathfrak{U}^3_{ad} \subset \mathfrak{U}^3$ – непустые, замкнутые, выпуклые множества в пространствах управления соответственно. Тогда справедлива теорема существования решения задачи оптимального управления (30) – (32).

Кроме того, исследована разрешимость задачи оптимального управления для полулинейного уравнения с билинейным оператором и начальным условием Шоуолтера – Сидорова. Пусть вложения $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^*$ плотны и непрерывны, а вложение $\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H}$ компактно; $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H};\mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле $\mathcal{H}$) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathfrak{H}$; $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H};\mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, 2-коэрцитивный оператор; билинейный непрерывный оператор $B : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^*$ такой, что

$$| < B(x,y), z > | \leq C^B \|x\|_{\mathfrak{H}} \|y\|_{\mathfrak{H}} \|z\|_{\mathfrak{H}} \ \forall x,y,z \in \mathfrak{H};$$

$$< B(x,y), z >= - < B(x,z), y > \ \forall x,y,z \in \mathfrak{H};\ < B(y,x), x >= 0\ \forall y,x \in \mathfrak{H}.$$

Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа

$$L\,\dot{x} + Mx + B(x,x) = u. \tag{36}$$

Построим пространство $\mathfrak{X} = \{x |\ x \in L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L) \cap L_2(0,T;\mathfrak{H})\}$.

Слабым обобщенным решением уравнения (36) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L\frac{dx}{dt}, w \right\rangle + \langle Mx, w\rangle + \langle B(x,x), w\rangle \right] dt = \int\limits_0^T \varphi(t)\,\langle u, w\rangle\,dt \quad \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0,T). \tag{37}$$

Решение уравнения (36) назовем решением задачи Шоуолтера – Сидорова, если оно удовлетворяет (33).

Теорема 10. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (33), (36).*

Построим пространство управлений $\mathfrak{U} = L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве $\mathfrak{U}$ непустое, замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$.

Теорема 11. *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (30), (33), (36).*

Представляя здесь результаты только для динамического случая, отметим, что аналогичные результаты получены и для эволюционного случая. Кроме того, отметим, что в рамках данного направления исследуются задачи стартового и финального управления для полулинейных уравнений соболевского типа [34].

Одним из направлений исследований, развиваемых в том числе и автором данной статьи, является разработка алгоритмов решения различных задач оптимального управления для систем леонтьевского типа – конечномерного аналога уравнений соболевского типа. Системы леонтьевского типа лежат в основе экономических, биологических и балансовых моделей, а задачи оптимального управления для таких систем моделируют управление экономической системой предприятия, восстановление динамически искаженного сигнала [19].

Вводятся в рассмотрение *пространство управлений* и пространство *состояний*

$$\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n), \quad p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{X} = \{x \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)\}.$$

В $\mathfrak{U}$ выделяется компактное выпуклое множество *допустимых управлений* $\mathfrak{U}_\partial$.

Задача оптимального управления для системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Du(t), \tag{38}$$

с начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$[R^L_\mu(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0 \tag{39}$$

заключается в нахождении такой пары $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathcal{X}$ почти всюду на $(0,\tau)$, удовлетворяющую (38), (39), что

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{40}$$

$$J(u) = \beta \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(u,t) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + (1-\beta) \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle dt. \tag{41}$$

Здесь $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot\rangle$ – норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ соответственно, C – квадратная матрица порядка n, N_q – симметричные положительно определенные матрицы, $q = \overline{0, p+1}$, $\theta = \overline{0, p+1}$, β, $1-\beta$ – весовые коэффициенты целей управления.

В качестве множества допустимых управлений принимается

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \le d. \tag{42}$$

Если принять $\beta = 1$, то получим *задачу жесткого управления.*

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n, $\det L = 0$. Важным условием является (L,p)-регулярность матрицы M (существует $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \ne 0$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса в точке ∞ матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$), вектор-функция $y : [0;\tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Справедлива следующая

Теорема 12. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, причем* $\det M \ne 0$*. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in H^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathcal{X}$ задачи оптимального управления (38) – (41), где v – точка минимума функционала стоимости (40), а $x(v)$ определяется формулой*

$$x(v) = \lim_{k\to+\infty} x_k(v,t) = \lim_{k\to+\infty} \left[-\sum_{q=0}^{p} (M^{-1}(I - Q_k)L)^q M^{-1}(I - Q_k)(f + Bv)^{(q)}(t) + \right.$$

$$\left. + X_k^t x_0 + \int_0^\tau R_k^{t-s} Q_k (f(s) + Bv(s)) ds \right].$$

Здесь

$$Q_k = \left(kL_k^L(M)\right)^{p+1}, \; X_k^t = \left((L - \frac{t}{k}M)^{-1}L\right)^k, \; R_k^t = \left((L - \frac{t}{k}M)^{-1}L\right)^{k-1}\left(L - \frac{t}{k}M\right)^{-1}.$$

Отметим, что на основе точного решения строятся формулы приближенного решения. Кроме того исследованы задачи стартового и стартового жесткого управления для систем леонтьевского типа [18].

4. Уравнения соболевского типа высокого порядка

При изучении математических моделей ряд уравнений, например, Буссинеска–Лява, входящих в их состав, редуцируются к неполным уравнениям соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu + f \tag{43}$$

с относительно p-ограниченным или p-секториальным оператором в правой части.

Разработанная профессором А.А. Замышляевой теория полных уравнений соболевского типа высокого порядка [93,98] позволила ей и ее ученикам не только исследовать различные начальные задачи для таких уравнений [95], но и задачи оптимального управления с различными начальными [97] и начально-конечными условиями [99].

В данном разделе приведем базовые результаты этой теории. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства и операторы $A, B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. By $\vec{B}$ denote the pencil formed by operators $B_{n-1}, \ldots, B_1, B_0$. Множества $\rho^A(\overrightarrow{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и $\sigma^A(\overrightarrow{B}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho^A(\vec{B})$ называются *A-резольвентным множеством* и *A-спектром* пучка операторов $\overrightarrow{B}$ соответственно. Оператор-функция комплексного переменного $R_\mu^A(\overrightarrow{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\overrightarrow{B})$ называется *A-резольвентой* пучка $\overrightarrow{B}$.

Пучок операторов $\vec{B}$ называется *полиномиально ограниченным относительно оператора A* (*или полиномиально A-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})).$$

Заметим, что, если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, тогда пучок $\vec{B}$ полиномиально *A-ограничен.*

В [84] введено условие: если пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, тогда

$$\int_\gamma \mu^k R_\mu^A(\vec{B})d\mu \equiv \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2, \tag{A}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Это условие является важным для последующего применения концепции фазового пространства и получения решения различных задач для уравнений соболевского типа высокого порядка. В статьях и других публикациях, подчеркивая это, условие обозначается буквой А, в докладах на конференциях научный руководитель школы называет его условием Замышляевой.

При выполнении условия (A) операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})\mu^{n-1}A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mu^{n-1}AR_\mu^A(\vec{B})d\mu$$

являются проекторами в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.

Пусть $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$, тогда, учитывая, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$. Проекторы расщепляют действия всех операторов:

(i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$;

(iii) существуют операторы $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ *и* $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Затем строятся операторы $H_0 = (B_0^0)^{-1}A^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $H_1 = (B_0^0)^{-1}B_1^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0), \ldots$, $H_{n-1} = (B_0^0)^{-1}B_{n-1}^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S_0 = (A^1)^{-1}B_0^1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, $S_1 = (A^1)^{-1}B_1^1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, $\ldots$, $S_{n-1} = (A^1)^{-1}B_{n-1}^1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

В ходе исследований получен критерий относительно полиномиальной ограниченности пучка в случае фредгольмова оператора A.

Исследована задача Коши

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{44}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа выского порядка

$$Au^{(n)} = B_{n-1}u^{(n-1)} + B_{n-2}u^{(n-2)} + \ldots + B_0 u + N(u), \tag{45}$$

где $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Если вектор-функция $u \in C^\infty((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет уравнению (45), то она является решением этого уравнения, в свою очередь, решение уравнения (45) при выполнении условия (44) является решением задачи (44), (45).

Фазовое пространство уравнения (45) определяется как множество всех допустимых начальных значений, содержащее траектории всех решений уравнения. Множество $\mathfrak{P}$ is называется *фазовым пространством* (45), если (i) для любых $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in T^{n-1}\mathfrak{P}$ существует единственное решение (44), (45); (ii) $u(t) \in \mathfrak{P}$ для всех $t \in (-\tau, \tau)$.

Если $\ker A = \{0\}$, задача сводится к классической задаче Коши.

Рассматривая случай $\ker A \neq \{0\}$, при условии, что пучок операторов $\vec{B}$ является $(A, 0)$-ограниченным, уравнение (45) редуцируется к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{cases} 0 = (\mathbb{I} - Q)(B_0 + N)(u^0 + u^1), \\ \dfrac{d^n}{dt^n}u^1 = A_1^{-1}Q(B_{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + B_{n-2}\dfrac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \ldots + B_0 + N)(u^0 + u^1), \end{cases} \tag{46}$$

где $u^1 = Pu, u^0 = (\mathbb{I} - P)u$.

Затем конструируется множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(B_0 u + N(u)) = 0\}$, изучаются его свойства в предположении, что

$$(\mathbb{I} - Q)(B_0 + N'_{u_0}) : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0 \quad \text{– топлинейный изоморфизм.} \tag{47}$$

Используя производную Фреше $\delta^{(n)}_{(u_0^1, u_1^1, \ldots, u_{n-1}^1)}$ порядка n во втором уравнении системы (46), так как $\delta(u^1) = u$ и

$$\delta^{(n)}_{(u_0^1, u_1^1, \ldots, u_{n-1}^1)} u^{1(n)} = \frac{d^n}{dt^n}\left(\delta(u^1)\right)$$

получают уравнение $u^{(n)} = F(u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$, где

$$F(u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}) = \delta^{(n)}_{(u_0^1, \ldots, u_{n-1}^1)} A^{-1}Q(B_{n-1}u^{(n-1)} + B_{n-2}u^{(n-2)} + \ldots + B_0 u + N(u)) \in C^\infty(\mathfrak{U}).$$

Теорема 13. [95] *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ – $(A,0)$-ограничен, $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и условие (47) выполнено. Тогда для любых $(u_0,\ldots,u_{n-1}) \in T^{n-1}\mathfrak{M}$ существует единственное решение задачи (44), (45) $u = u(t)$, траектории которого лежат в $\mathfrak{M}$.*

Использование в качестве начального условие Шоуолтера – Сидорова

$$P(u^{(k)}(0) - u_k) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{48}$$

позволило не только получить решение иной математической задачи, но и проводить работу по численным исследованиям математических моделей с разработкой программных комплексов и реализацией вычислительных экспериментов.

5. Стохастические уравнения соболевского типа в пространствах дифференциальных форм

В данном разделе приведем базовые результаты исследований стохастических уравнений соболевского типа. Первые и основные результаты были получены Г.А. Свиридюком [79,80], затем это направление активно развивалось им и его учениками в сотрудничестве с профессором А. Фавини [9–12]. В данном разделе помимо основных результатов, полученных этим исследовательским коллективом, представлены результаты исследования стохастических уравнений соболевского типа в пространствах дифференциальных форм. В рамках данного направления ведут активную работу Д.Е. Шафранов [42,43] и О.Г. Китаева [21,22].

Прежде всего необходимо рассмотреть пространства стохастических **K**-шумов. Пусть $\Omega = (\Omega,\mathcal{A},P)$ – полное вероятностное пространство, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образует гильбертово пространство $\mathbf{L_2}$ со скалярным произведением $(\xi_1,\xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$.

Пусть $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ – интервал, измеримое отображение $\eta : \mathfrak{I} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$, назовем *стохастическим процессом*, функцию $\eta(t,\cdot), t \in \mathfrak{I}$ его *траекторией*, а случайную величину $\eta(\cdot,\omega), \omega \in \Omega$, его *сечением*. Стохастический процесс $\eta = \eta(t,\omega)$ назовем *непрерывным*, если п.н.(почти наверное) все его траектории непрерывны. Множество непрерывных на $\mathfrak{I}$ стохастических процессов, чьи сечения лежат в пространстве $\mathbf{CL_2}$, образует банахово пространство $\mathbf{CL_2}(\mathfrak{I})$ с нормой

$$\|\eta\|_0^2 = \max_{t\in\mathfrak{I}} D\eta(t,\cdot).$$

Хорошим примером непрерывного стохастического процесса служит винеровский процесс

$$\beta(t,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin\frac{\pi}{2}(2k+1)t, \tag{49}$$

описывающий броуновское движение в модели Энштейна – Смолуховского. Здесь случайные величины $\xi_k \in \mathbf{L_2}$ равномерно ограничены ($\mathbf{D}\xi_k \le K, k \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{R}_+$ – некоторая константа) и попарно независимы ($(\xi_k,\xi_l) = 0, k \ne l, k,l \in \mathbb{N}$). Стохастический процесс $\beta = \beta(t,\omega)$ из (49) называют броуновским движением.

Пусть $\mathcal{A}_0$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, строится подпространство $\mathbf{L_2^0} \subset \mathbf{L_2}$ случайных величин, измеримых относительно σ-подалгебры $\mathcal{A}_0$ σ-алгебры $\mathcal{A}$. *Условным математическим ожиданием* $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}_0)$ случайной величины ξ называется $\Pi\xi$, где $\Pi : \mathbf{L_2} \to \mathbf{L_2^0}$ – ортопроектор. Зафиксируем $\eta \in \mathbf{CL_2}(\mathfrak{I})$ и $t \in \mathfrak{I}$, обозначим

$\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot|\mathcal{N}_t^\eta)$, где $\mathcal{N}_t^\eta$ – σ-алгебра, порожденная случайной величиной $\eta(t)$. *Производной Нельсона – Гликлиха* $\overset{\circ}{\eta}$ *стохастического процесса* η *в точке* $t \in \mathfrak{I}$ называется случайная величина

$$\overset{\circ}{\eta} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta \left(\frac{\eta(t+\Delta t,\cdot) - \eta(t,\cdot)}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta \left(\frac{\eta(t,\cdot) - \eta(t-\Delta t,\cdot)}{\Delta t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$ [15]. Производные Нельсона – Гликлиха стохастического процесса $\eta = \eta(t,\omega)$ определяются по индукции и обозначаются $\overset{\circ}{\eta}{}^{(l)} = \overset{\circ}{\eta}{}^{(l)}(t,\omega)$, $l \in \mathbb{N}$. Символом $\mathbf{C}^l\mathbf{L_2}(\mathfrak{I})$ обозначается пространство стохастических процессов, где производные Нельсона – Гликлиха непрерывны на $\mathfrak{I}$ до порядка l включительно. $\mathbf{C}^l\mathbf{L_2}(\mathfrak{I})$ – банахово пространство при любом $l \in \mathbb{N}$ с нормой

$$\|\eta\|_l^2 = \sum_{k=0}^{l} \max_{t\in\mathfrak{I}} \mathbf{D} \overset{\circ}{\eta}{}^{(k)}(t,\cdot),$$

где $\overset{\circ}{\eta}{}^{(0)} = \eta$. В [9] показано, что $\overset{\circ}{\beta}{}^{(l)} \in \mathbf{C}^l\mathbf{L_2}(\mathbb{R}_+)$ при всех $l \in \mathbb{N}$ причем $\overset{\circ}{\beta}{}^{(l)} = (2t)^{-l}\beta$. Заметим, что обычную производную по t броуновского движения $\beta = \beta(t,\omega)$ (не существующую ни в одной точке $t \in \mathbb{R}_+$) принято называть белым шумом. Поэтому производную Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\beta} = (2t)^{-1}\beta$ называют «белым шумом», а пространства $\mathbf{C}^l\mathbf{L_2}(\mathfrak{I})$ – пространствами «шумов». В [79] отмечается, что «белый шум» лучше отвечает модели Энштейна – Смолуховского, чем традиционный белый шум.

Пусть $\mathcal{H}$ – действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $< \cdot,\cdot >$. Возьмем ортонормированный базис $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{H}$, монотонную последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$, и последовательность $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L_2}$ равномерно ограниченных случайных величин. Построим *случайную* $\mathbf{K}$*-величину*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k.$$

Пополнение линейной оболочки случайных $\mathbf{K}$-величин по норме

$$\|\xi\|^2_{\mathbf{H_K L_2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k$$

является гильбертовым пространством. Обозначим его символом $\mathbf{H_K L_2}$ и назовем *пространством случайных* $\mathbf{K}$*-величин*. Здесь последовательности $\{\lambda_k\}, \{\xi_k\}$ выбираются произвольно, последовательность $\{\varphi_k\}$ является ортонормированным базисом в сепарабельном гильбертовым пространстве $\mathcal{H}$.

Отметим, что теория относительно радиальных операторов и C_0-полугруппы перенсена на пространства $\mathbf{U_K}\mathrm{L}_2$ $(\mathbf{F_K}\mathrm{L}_2)$($\mathfrak{U}$-значных ($\mathfrak{F}$-значных)) случайных $\mathbf{K}$-величин, элементами которого являются векторы

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k \ \left(\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \zeta_k \psi_k\right),$$

где $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такая последовательность, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$, а $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$ ($\{\zeta_k\} \subset \mathbf{L}_2$), причем $\|\xi_k\|_{\mathbf{L}_2} \leq \mathrm{const}$ $(\|\zeta_k\|_{\mathbf{L}_2} \leq \mathrm{const})$.

Полугруппа $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется C_0-*полугруппой (сильно непрерывной полугруппой)*, если она сильно непрерывна при $t > 0$ и существует $\lim\limits_{t\to 0+} V^t v = v$ п.н. (почти наверное, т.е. при почти всех $\omega \in \Omega$). Множество $\ker V^\bullet = \{v \in \mathbf{H_K L}_2 :$ п.н. $V^t v = 0\ \exists t \in \mathbb{R}_+\}$ есть ядро, а множество $\mathrm{im} V^\bullet = \{v \in \mathbf{H_K L}_2 :$ п.н. $v = V^0 v\}$ – образ полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Если оператор M (L, p)-радиален, то существует C_0-полугруппа операторов на пространстве $\mathbf{U_K L}_2$ $(\mathbf{F_K L}_2)$, которая представима в виде

$$U^t = s - \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k(p+1)}{t} R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M) \right)^{k(p+1)} \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2) \tag{50}$$

$$\left(F^t = s - \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k(p+1)}{t} L^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M) \right)^{k(p+1)} \in \mathcal{L}(\mathbf{F_K L}_2) \right).$$

Обозначим $\ker U^\bullet = \mathbf{U^0_K L}_2$, $\ker F^\bullet = \mathbf{F^0_K L}_2$, $\mathrm{im} U^\bullet = \mathbf{U^1_K L}_2$, $\mathrm{im} F^\bullet = \mathbf{U^1_K L}_2$, а через $L^k(M^k)$ – сужение оператора $L(M)$ на $\mathbf{U^k_K L}_2$ $(\mathrm{dom} M \bigcap \mathbf{U^k_K L}_2)$ при $k = 0, 1$. В условиях (L, p)-радиальности оператора M операторы $L_0 \in \mathcal{L}(\mathbf{U^0_K L}_2; \mathbf{F^0_K L}_2$, $M_0 \in Cl(\mathbf{U^0_K L}_2; \mathbf{F^0_K L}_2)$; существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F^0_K L}_2; \mathbf{U^0_K L}_2)$; а оператор $H = M_0^{-1} L$ $\left(G = L M_0^{-1}\right)$ нильпотентен, степень его нильпотентности не превосходит p. Пусть существует оператор

$$L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F^1_K L}_2; \mathbf{U^1_K L}_2) \tag{51}$$

и пространства $\mathbf{U_K L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2$ расщепляются следующим образом:

$$\mathbf{U_K L}_2 = \mathbf{U^0_K L}_2 \oplus \mathbf{U^1_K L}_2, \mathbf{F_K L}_2 = \mathbf{F^0_K L}_2 \oplus \mathbf{F^1_K L}_2. \tag{52}$$

При выполнении (51), (52) операторы $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{U^1_K L}_2; \mathbf{F^1_K L}_2)$, $M_0 \in Cl(\mathbf{U^0_K L}_2; \mathbf{F^0_K L}_2)$, а расщепление пространства (52) эквивалентно существованию проектора P (Q), который имеет вид

$$P = s\text{-}\lim_{t\to 0+} U^t \ \left(Q = s\text{-}\lim_{t\to 0+} U^t \right).$$

Теорема 14. [79] *Пусть оператор M (L, p)-радиален. Тогда оператор $S = L_1^{-1} M_1$ $\left(T = M_1 L_1^{-1}\right)$ – генератор C_0-полугруппы $U_1^\bullet$ $(F_1^\bullet)$, являющейся сужением полугруппы $U^\bullet$ $(F^\bullet)$ на $\mathbf{U^1_K L}_2$ $(\mathbf{F^1_K L}_2)$.*

Непрерывным стохастическим $\mathbf{K}$*-процессом* назовем отображение $\eta : \mathfrak{I} \to \mathbf{U_K L}_2$ задаваемое формулой

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k(t) \varphi_k,$$

если ряд равномерно сходится на любом компакте в $\mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}$ – некоторый интервал, а $\{\eta_k\} \subset \mathbf{CL}_2$. Если ряд

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overset{o}{\eta}_k(t) \varphi_k$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathfrak{I}$ и $\{\eta_k\} \subset \mathbf{C}^1\mathbf{L}_2$, то стохастический $\mathbf{K}$-процесс назовем *непрерывно дифференцируемым по Нельсону – Гликлиху.* Через

$\mathbf{C}(\mathfrak{I};\mathbf{U_K L}_2)$ обозначим множество непрерывных процессов, а через $\mathbf{C}^1(\mathfrak{I};\mathbf{U_K L}_2)$ – непрерывно дифференцируемых по Нельсону – Гликлиху процессов.

Рассмотрим линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$L \overset{\circ}{\eta} = M\eta. \tag{53}$$

Стохастический $\mathbf{K}$-процесс $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathfrak{I};\mathbf{U_K L}_2)$ назовем *решением уравнения (53)*, если при подстановке его в (53) он п.н. обращает уравнение в тождество.

Множество $\mathfrak{P} \subset \mathbf{U_K L}_2$ назовем *фазовым пространством* уравнения (53), если п.н. каждая траектория решения $\eta = \eta(t)$ уравнения (53) лежит в $\mathfrak{P}$; для п.в. $\eta_0 \in \mathfrak{P}$ существует решение уравнения (53), удовлетворяющее условию $\eta(0) = \eta_0$.

Теорема 15. *Пусть оператор M (L,p)-радиальный и выполнены условия (51), (52). Тогда фазовое пространство уравнения (53) совпадает с образом разрешающей полугруппы вида (50).*

Подпространство $\mathbf{I_K} \subset \mathbf{U_K L}_2$ называется *инвариантным пространством уравнения (53)*, если при любом $\eta_0 \in \mathbf{I_K}$ решение задачи $\eta(0) = \eta_0$ для уравнения (53) $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R};\mathbf{I_K})$.

Пространство $\mathbf{I_K^+} \subset \mathfrak{P}$ называется *устойчивым* инвариантным пространством уравнения (53), если существуют такие константы $N \in \mathbb{R}_+$ и $\nu_k \in \mathbb{R}_+$, что

$$\|\eta^1(t)\|_{\mathbf{U_K L}_2} \le N_1 e^{-\nu_1(s-t)}\|\eta^1(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2} \quad \text{при } s \ge t,$$

где $\eta^1 = \eta^1(t) \in \mathbf{I_K^+}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Пространство $\mathbf{I_K^+} \subset \mathfrak{P}$ называется *неустойчивым* инвариантным пространством уравнения (53), если существуют такие константы $N \in \mathbb{R}_+$ и $\nu_k \in \mathbb{R}_+$, что

$$\|\eta^2(t)\|_{\mathbf{U_K L}_2} \le N_2 e^{-\nu_2(t-s)}\|\eta^2(s)\|_{\mathbf{U_K L}_2} \quad \text{при } t \ge s,$$

где $\eta^2 = \eta^2(t) \in \mathbf{I_K^-}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Если фазовое пространство расщепляется на прямую сумму $\mathfrak{P} = \mathbf{I}^+ \oplus \mathbf{I}^-$, то решения $\eta = \eta(t)$ уравнения (53) имеют *экспоненциальную дихотомию.*

Обозначим $\sigma_+^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu < 0\}$ и $\sigma_-^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \mathrm{Re}\mu > 0\}$.

Теорема 16. [79] *Пусть оператор M (L,p)-радиальный, выполнены условия (51), (52) и $\sigma^L(M) = \sigma_+^L(M) \bigcup \sigma_-^L(M)$, причем $\sigma_+^L(M)$ – непустое ограниченное множество. Тогда решения уравнения (53) имеют экспоненциальную дихотомию.*

В условиях (L,p)-радиальности оператора M и выполнения (51), (52): если $\sigma^L(M) = \sigma_+^L(M)$, то фазовое пространство совпадает с устойчивым инвариантным пространством; если $\sigma^L(M) = \sigma_-^L(M)$, то фазовое пространство совпадает с неустойчивым инвариантным пространством.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta + \omega, \tag{54}$$

где вектор-функция $\omega \in C^\infty(\mathfrak{I};\mathbf{F_K L}_2)$, $\mathfrak{I} = [0,t)$ и условие Шоуолтера – Сидорова

$$\lim_{t\to 0+}(R_\alpha^L(M))^{p+1}(\eta(L) - \eta_0) = 0. \tag{55}$$

Если оператор M (L,p)-радиальный и выполнены условия (51), (52), тогда (55) эквивалентно условию

$$P(\eta(0) - \eta_0) = 0.$$

Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (54) называется *решением задачи* (54), (55), если $\lim\limits_{t\to 0_+}(R^L_\alpha(M))^{p+1}\eta(t) = (R^L_\alpha(M))^{p+1}\eta_0$.

Теорема 17. [79] *Пусть оператор M (L,p)-радиальный, выполнены условия (51), (52) и вектор-функция $\omega \in C^\infty(\mathfrak{I};\mathbf{F_K L_2})$, $\mathfrak{I} = [0,t)$. Тогда при любом $\eta_0 \in \mathbf{U_K L_2}$ существует решение $\eta \in C^1(\mathfrak{I};\mathbf{U_K L_2})$ задачи Шоуолтера – Сидорова (55) для уравнения (54), имеющее вид*

$$\eta(t) = U^t\eta_0 - \sum_{q=0}^{p} H^p M_0^{-1}\frac{d^q\omega^0}{dt^q}(t) + \int\limits_0^t U^{t-s}\omega ds.$$

Перейдем к рассмотрению относительно радиальных операторов в гильбертовых пространствах дифференциальных k-форм со стохастическими коэффициентами, подробнее представлено в [43]. Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое компактное ориентированное риманово многообразие без края с локальными координатами $x_1, x_2, ..., x_n$. Обозначим пространства гладких дифференциальных k-форм $k = 0,1,2,...,n$ со стохастическими коэффициентами через $H_k = H_k(\mathcal{M},\Omega)$. Дифференциальные формы имеют вид

$$\chi_{i_1,i_2,...,i_k}(t,x_1,x_2,...,x_n,\omega) = \sum_{|i_1,i_2,...,i_k|=k} a_{i_1,i_2,...,i_k}(t,x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k},\omega)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge ...\wedge dx_{i_k},$$

где $a_{i_1,i_2,...,i_k}(t,x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_k},\omega)$ – коэффициенты, зависящие в том числе от времени, а $|i_1,i_2,...,i_k|$ – мультииндекс. В пространствах H_k задается стандартное скалярное произведение

$$(\xi,\varepsilon)_0 = \int\limits_{\mathcal{M}} \xi\wedge *\varepsilon, \quad \xi,\varepsilon \in H_k. \tag{56}$$

Здесь $*$ – оператор Ходжа и $\wedge$ – оператор внутреннего умножения k-форм.

Пополняя по непрерывности пространство H_k по норме $\|\cdot|_0$ соответствующей скалярному произведению (56), получим пространство $\mathfrak{H}^0_k$. Вводя скалярные произведения в пространствах один или дважды дифференцируемых (в смысле Нельсона – Гликлиха) k-форм и пополняя пространства по нормам, соответствующим этим скалярным произведениям, построим пространства $\mathfrak{H}^1_k$, $\mathfrak{H}^2_k$, причем $\mathfrak{H}^2_k \subseteq \mathfrak{H}^1_k \subseteq \mathfrak{H}^0_k$. В построенных пространствах используется обобщение оператор Лапласа – Бельтрами $\Delta = d\delta + \delta d$, где d – оператор внешнего умножения дифференциальных форм, а оператор $\delta = *d*$ – сопряженный к оператору d.

Для полученных пространств имеет место обобщение теоремы Ходжа – Кодаиры

Теорема 18. [22] *Пусть имеются пространства $\mathfrak{H}^l_k, l = 0,1,2$. Тогда*

$$\mathfrak{H}^l_k = \mathfrak{H}^l_{kd}\oplus\mathfrak{H}^l_{k\delta}\oplus\mathfrak{H}^l_{k\Delta}, l = 0,1,2.$$

Здесь $\mathfrak{H}_{kd}$ – потенциальные, $\mathfrak{H}_{k\delta}$ – соленоидальные, $\mathfrak{H}_{kd}$ – гармонические формы.

Введем в рассмотрение *пространства случайных* $\mathbf{K}$*-величин* и *пространства* $\mathbf{K}$*-шумов*, определенных на многообразии $\mathcal{M}$. Пусть $\mathbf{K} = \{\lambda_k\}$ – последовательность такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 < +\infty$. Через $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ обозначим собственные векторы оператора Лапласа – Бельтрами, ортонормированные относительно $<\cdot,\cdot>_0$ и $<\cdot,\cdot>_2$, которые образуют базисы в пространствах $\mathfrak{H}^0_k$ и $\mathfrak{H}^2_k$. Элементами пространств $\mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{H}^2_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ являются векторы $\chi = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\varphi_k$ и $\kappa = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\zeta_k\psi_k$, где последовательности случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$ и $\{\zeta_k\} \subset \mathbf{L}_2$ таковы, что дисперсии $\mathbf{D}\xi_k \leq const$ и $\mathbf{D}\zeta_k \leq const$. Построим множество непрерывных процессов $\mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ и множество непрерывно дифференцируемых по Нельсону – Гликлиху процессов $\mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$.

Далее перейдем к вопросу о существовании и устойчивости решений уравнения (53). Относительный спектр оператора M представим в виде двух не пересекающихся компонент $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M) \bigcup \sigma^L_-(M)$. При выполнении условий (L,p)-радиальности оператора M, условий (51), (52) и $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M) \bigcup \sigma^L_-(M)$, причем $\sigma^L_+(M)$ – непустое ограниченное множество, решения уравнения (53) имеют экспоненциальную дихотомию. Более того, при этих же условиях если $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M)$, то фазовое пространство совпадает с устойчивым инвариантным пространством; если $\sigma^L(M) = \sigma^L_-(M)$, то фазовое пространство совпадает с неустойчивым инвариантным пространством.

Заключение

В представленный обзор включены результаты аналитических исследований. Важно подчеркнуть, что представленные результаты были использованы для исследования математических моделей: Баренблатта – Желтова – Кочиной, Хоффа, Дзекцера, Буссинеска – Лява, звуковых волн в смектиках, Осколкова нелинейной фильтрации, распределения потенциалов в кристалическом полупроводнике, многокомпонентной модели Фитц Хью – Нагумо, процесса наравновесной противточной капиллярной пропитки, Баренблатта–Гильмана, Девиса, ионно–звуковых волн в плазме, распространения волн на мелкой воде, Бенни-Люка, межотраслевого баланса, динамических оптимальных измерений, динамики клеточного цикла, транспортного потока на перекрестке и др. За результатами аналитических исследований последовали численные исследования с разработкой алгоритмов, комплексов программ, проведение вычислительных экспериментов, в том числе и на основе натурных экспериментов.

Эта статья написана в знак уважения к каждому члену научного коллектива, отдававшему на протяжении многих лет время и силы для того, чтобы внести свой вклад в развитие теории уравнений соболевского типа, благодарности научному руководителю профессору Георгию Анатольевичу Свиридюку, вдохновляющему каждого из нас на получение новых результатов, и признательности руководству ЮУрГУ за организационную поддержку научно-исследовательской деятельности.

Литература/References

1. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations.* Berlin, Walter de Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/9783110255294
2. Banasiak J., Manakova N.A., Sviridyuk G.A. Positive Solutions to Sobolev Type Equations with Relatively p-sectorial Operators. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, vol. 13, no. 2, pp. 17–32. DOI: 10.14529/mmp200202
3. Bokareva T.A., Sviridyuk G.A. Whitney Folds in Phase Spaces of Some Semilinear Sobolev-Type Equations. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF02110776
4. Boyarintsev Y.E., Chistyakov V.F. *Algebraic Differential Systems: Methods of Soluthin and Research.* Novosibirsk, Nauka, 1998. (in Russian)
5. Bychkov E.V. Analytical Study of the Mathematical Model of Wave Propagation in Shallow Water by the Galerkin Method. *Bulletin of the South Ural State University.*

Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 26–38. DOI: 10.14529/mmp210102

6. Buevich A.V., Sagadeeva M.A., Zagrebina S.A. Stabilitty of a Stationary Solution to One Class of Non–Autonomous Sobolev Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2023, vol. 16, no. 3, pp. 65–73. DOI: 10.14529/mmp230305
7. Chistyakov V.F., Shcheglova A.A. *Izbrannyye glavy teorii algebro-differentsialnykh sistem* [Selected Chapters of Theory of Algebro-Differential Systems]. Novosibirsk. Siberian Publishing House Nauka, 2003. (in Russian)
8. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative*. N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, 2003.
9. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “Noises”. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, article ID: 697410. DOI: 10.1155/2015/697410
10. Favini A., Sviridyuk G., Sagadeeva M. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of “Noises”. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, vol. 13, no. 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x
11. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, article ID: 128, 10 p.
12. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185
13. Gavrilova O.V. Numerical Study on the Non-Uniqueness of Solutions to the Showalter–Sidorov Problem for One Degenerate Mathematical Model of an Autocatalytic Reaction with Diffusion. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, vol. 6, no. 4, pp. 3–17. DOI: 10.14529/jcem190401
14. Gil'mutdinova A.F. On the Non-Uniqueness of Solutions of Showalter–Sidorov Problem for One Plotnikov Model. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 9/1, pp. 85–90. (in Russian)
15. Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu. Stochastic Leontieff Type Equations in Terms of Current Velocities of the Solution II. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 31–40. DOI: 10.14529/mmp160303
16. Goncharov N.S., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The Non-Uniqueness of the Showalter–Sidorov Problem for the Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation with Wentzell Boundary Conditions in a Bounded Domain. *Book of Abstracts of O.A. Ladyzhenskaya Centennial Conference on PDE's*. St. Petersburg, 2022. P. 56.
17. Goncharov N.S., Sviridyuk G.A. Analysis of the Stochastic Wentzell System of Fluid Filtration Equations in a Circle and on its Boundary. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*. 2023, vol. 15, no. 3, pp. 15–22. DOI: 10.14529/mmph230302
18. Keller A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 39–59. DOI: 10.14529/jcem150205
19. Keller A.V. Leontief-Type Systems and Applied Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 23–42. DOI: 10.14529/mmp220102
20. Keller A.V., Al-Delfi J.K. Holomorphic Degenerate Groups of Operators in Quasi–Banach Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*. 2015, vol. 7, no. 1, pp. 20–27.

21. Kitaeva O.G. Invariant Manifolds OF Semilinear Sobolev Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 101–111. DOI: 10.14529/mmp220106
22. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Degenerate Holomorphic Semigroups of Operators in Spaces of K-"Noise" on Riemannian Manifolds. *Semigroups of Operators – Theory and Applications*, 2020, vol. 325, pp. 279–292. DOI: 10.1007978-3-030-46079-2_16
23. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Exponential Dichotomies in Barenblatt–Zheltov–Kochina Model in Spaces of Differential Forms with "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 47–57. DOI: 10.14529/mmp190204
24. Korpusov M.O., Panin A.A., Shishkov A.E. On the Critical Exponent "Instantaneous Blow-up" Versus "Local Solubility" in the Cauchy Problem for a Model Equation of Sobolev Type. *Izvestiya RAN: Mathematics*, 2021, vol. 85, no. 1, pp. 111–144. DOI: 10.4213/im8949
25. Konkina A.S. Multipoint Initial-Final Value Problem for the Model of Davis with Additive White Noise. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 144–149. DOI: 10.14529/mmp170212
26. Kozhanov A.I. Boundary Value Problems for Fourth-Order Sobolev Type Equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 425–432.
27. Kozhanov A.I. On a Nonlocal Boundary Value Problem with Variable Coefficients for the Heat Equation and the Aller Equation. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 6, pp. 815–826. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0
28. Manakova N.A., Gavrilova O.V., Perevozchikova K.V. Semilinear Models of Sobolev Type. Non-Uniqueness of Solution to the Showalter–Sidorov Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 84–100. DOI: 10.14529/mmp220105
29. Manakova N.A., Sviridyuk G.A. An Optimal Control of the Solutions of the Initial-Final Problem for Linear Sobolev Type Equations with Strongly Relatively p-Radial Operator. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 213–224. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_13
30. Manakova N.A. Mathematical Models and Optimal Control of the Filtration and Deformation Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 5–24. DOI: 10.14529/mmp150301
31. Manakova N.A. An Optimal Control to Solutions of the Showalter–Sidorov Problem for the Hoff Model on the Geometrical Graph. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 26–33.
32. Manakova N.A., Sviridyuk G.A. Non-Classical Equations of Mathematical Physics. Phase Spaces of Semilinear Sobolev Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 31–51. DOI: 10.14529/mmph160304
33. Manakova N.A., Gavrilova O.V. About Nonuniqueness of Solutions of the Showalter–Sidorov Problem for One Mathematical Model of Nerve Impulse Spread in Membrane. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 161–168. DOI:10.14529/mmp180413
34. Manakova N.A., Perevozhikova K.V. Numerical Simulation Of Start Control and Final Observation in Fluid Filtration Model. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2021, vol. 8, no. 1, pp. 29–45. DOI: 10.14529/jcem210103
35. Melnikova I.V., Filinkov A.I. *The Cauchy Problem: Three Approaches*. London, N.Y., Chapman, Hall/CRC, 2001.
36. Pyatkov S.G. Boundary Value and Inverse Problems for Some Classes of Nonclassical Operator-Differential Equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 3, pp. 489–502. DOI: 10.1134/S0037446621030125

37. Pyatkov S.G. *Operator Theory. Nonclassical Problems*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2002. DOI: 10.1515_9783110900163
38. Sagadeeva M.A., Rashid A.S. Existence of Solutions in Quasi–Banach Spaces for Evolutionary Sobolev Type Equations in Relatively Radial Case. *Journal of Computational and Engineering Mathematics.*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 71–81. DOI: 10.14529/jcem150207
39. Sagadeeva M.A. Degenerate Flows of Solving Operators for Nonstationary Sobolev Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 22–30. DOI: 10.14529/mmph170103
40. Sagadeeva M.A., Zagrebina S.A., Manakova N.A. Optimal Control of Solutions of a Multipoint Initial-Final Problem for Non-Autonomous Evolutionary Sobolev Type Equation. *Evolution Equations and Control Theory*, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 473–488. DOI: 10.3934/eect.2019023
41. Shafranov D.E. Numerical Solution of the Hoff Equation with Additive "White Noise" in Spaces of Differential Forms on a Torus. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2021, vol. 8, no. 2, pp. 46–55. DOI: 10.14529/jcem210204
42. Shafranov D.E., Kitaeva O.G. The Barenblatt–Zheltov–Kochina Model with the Showalter–Sidorov Condition and Additive "White Noise" in Spaces of Differential Forms on Riemannian Manifolds without Boundary. *Global and Stochastic Analysis*, 2018, vol. 5, no. 2, pp. 145–159.
43. Shafranov D.E., Kitaeva O.G., Sviridyuk G.A. Stochastic Equations of Sobolev Type with Relatively p-Radial Operators in Spaces of Differential Forms. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 507–516. DOI: 10.1134/S0012266121040078
44. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, no. 17 (234), pp. 70–75.
45. Shestakov A. L., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A., Keller A.V., Khudyakov Y.V. Numerical Investigation of Optimal Dynamic Measurements. *Acta IMEKO*, 2018, vol. 7, no. 2, pp. 65–72.
46. Shestakov A. L., Keller A.V. Optimal Dynamic Measurement Method Using Digital Moving Average Filter. *Journal of Physics: Conference Seriesthis*, 2021, vol. 1864, no. 1, article ID: 012073.
47. Showalter R.E. The Sobolev type Equations. *Applicable Analysis*, 1975, vol. 5, no. 1, pp. 15–22.
48. Showalter R.E. The Sobolev type Equations. II. *Applicable Analysis*, 1975, vol. 5, no 2, pp. 81–99.
49. Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov–Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 2002.
50. Sviridyuk G.A. The Manifold of Solutions of an Operator Singular Pseudoparabolic Equation. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 6, pp. 1–31. (in Russian)
51. Sviridyuk G.A. On the Variety of Solutions of a Certain Problem of an Incompressible Viscoelastic Fluid. *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 10, pp. 1846–1848.
52. Sviridyuk G.A. A Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation. *Soviet Mathematics*, 1989, vol. 33, no. 2, pp. 62–73.
53. Sviridyuk G.A. Solvability of the Viscoelastic Thermal Convection Problem of Incompressible Fluid. *Russian Mathematics*, 1990, no. 12, pp. 65–70.
54. Sviridyuk G.A. Sobolev-Type Linear Equations and Strongly Continuous Semigroups of Resolving Operators with Kernels. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics*, 1995, vol. 50, no. 1, pp. 137–142.
55. Sviridyuk G.A. Solvability of a Problem of the Thermoconvection of a Viscoelastic Incompressible Fluid. *Soviet Mathematics*, 1990, vol. 34, no. 12, pp. 80–86.

56. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, no. 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390
57. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601–614. DOI: 10.1070/IM1994v042n03ABEH001547
58. Sviridyuk G.A. About One Showalter Problem. *Differential Equations*, 1989, vol. 23, no. 2, pp. 338–339.
59. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Phase Spaces of a Class of Operator Semilinear Equations of Sobolev Type. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 188–195.
60. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. Cauchy Problem for a Class of Semilinear Equations of Sobolev Type. *Siberian Mathematical Journal*, 1990, vol. 31, no. 5, pp. 794–802. DOI: 10.1007/BF00974493
61. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Analytic Semigroups wit Kernels and Linear Equations of Sobolev Type. *Siberian Mathematical Journal*, 1995, vol. 36, no. 5, p. 1130.
62. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. An Optimal Control Problem for a Class of Linear Equations of Sobolev Type. *Russian Mathematics*, 1996, vol. 40, no. 12, pp. 60–71.
63. Sviridyuk G.A., Yakupov M.M. The Phase Space of the Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 11, pp. 1535–1540.
64. Sviridyuk G.A., Keller A.V. Invariant Spaces and Dichotomies of Solutions of a Class of Linear Equations of Sobolev Type. *Russian Mathematics*, 1997, vol. 41, no. 5, pp. 57–65.
65. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control for a Class of Degenerate Linear Equations. *Doklady Mathematics*, 1999, vol. 59, no. 1, pp. 157–159.
66. Sviridyuk G.A., Kuznetsov G.A. Relatively Strongly p-Sectorial Linear Operators. *Doklady Mathematics*, 1999, vol. 59, no. 2, pp. 298–300.
67. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. Morphology of Phace Spaces of One Class of Linear Equations of Sobolev Type of High Order. *Bulletin of Chelyabinsk State University*, 1999, vol. 3, no. 2(5) p. 999.
68. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Verigin's Problem for Linear Equations of the Sobolev Type with Relatively p-Sectorial Operators. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 1745–1752.
69. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Regular Perturbations of a Class of Sobolev Type Linear Equations. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 3, pp. 447–450.
70. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 1–2, pp. 262–266. DOI: 10.1023/A:1013919500605
71. Sviridyuk G.A., Brychev S.V. Numerical Solution of Systems of Leontief Type Equations. *Russian Mathematics*, 2003, no. 8, pp. 46–52.
72. Sviridyuk G.A., Burlachko I.V. An Algorithm for Solving the Cauchy Problem for Degenerate Linear Systems of Ordinary Differential Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 11, pp. 1613–1619.
73. Sviridyuk G.A., Shafranov D.E. The Cauchy Problem for the Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation on a Smooth Manifold. *Bulletin of Chelyabinsk State University*, 2003, vol. 9, pp. 171–177. (in Russian)
74. Sviridyuk G.A., Ankudinov A.V. The Phase Space of the Cauchy–Dirichlet Problem for a Nonclassical Equation. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 11, pp. 1639–1644. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000019357.68736.15
75. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney Fold in the Phase Space of the Hoff Equation. *Russian Mathematics*, 2005, vol. 49, no. 10, pp. 49–55.
76. Sviridyuk G.A., Karamova A.F. On the Crease Phase Space of One Non-Classical Equations. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1476–1581. DOI:10.1007/s10625-005-0300-5

77. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Phase Space of the Cauchy–Dirichlet Problem for the Oskolkov Equation of Nonlinear Filtration. *Russian Mathematics*, 2003, no. 9, pp. 33–38.
78. Sviridyuk G.A., Kitaeva O.G. Invariant Manifolds of the Hoff Equation. *Mathematical Notes*, 2006, vol. 79, no. 3, pp. 408–412. DOI: 10.4213/mzm2713
79. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolv Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 1,pp. 90–103. DOI: 10.14529/mmp140108 (in Russian)
80. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Barenblatt–Zheltov–Kochina Model with Additive White Noise in Quasi-Sobolev Spaces. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 61–67. DOI: 10.14529/jcem16010
81. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff Equations on Graphs. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 139–145. DOI: 10.1134/S0012266106010125
82. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, VSP, 2003.
83. Sviridyuk G.A., Zargebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russian)
84. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. The Phase Spaces of a Class of Linear Higher-Order Sobolev Type Equations. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 269–278. DOI: 10.1134/S0012266106020145
85. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint Initial-Final Problem for One Class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive White Noise. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 103–117. DOI: 10.14529/mmp180308
86. Uvarova M.V., Pyatkov S.G. Some Boundary Value Problems for the Sobolev-Type Operator-Differential Equations. *Mathematical Notes of SVFU*, 2019, vol. 26, no. 3, pp. 71–89.
87. Vragov V.N. *Boundary value Problems for Non-Classical Mathematical Physics Equations.* Novosibirsk, Novosibirsk State Univesity, 1983.
88. Zagrebina S.A. The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 5–24.
89. Zagrebina S. A., Konkina A. S. Traffic Management Model. *Proceedings of 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing*, 2016, article ID: 7911712. DOI 10.1109/ICIEAM.2016.7911712
90. Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A. The Generalized Splitting Theorem for Linear Sobolev type Equations in Relatively Radial Case. *The Bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*, 2014, no. 7, pp. 19–33.
91. Zagrebina S.A., Soldatova E.A., Sviridyuk G.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 317–325. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_20
92. Zagrebina S., Sukacheva T., Sviridyuk G. The Multipoint Initial-Final Value Problems for Linear Sobolev-Type Equations with Relatively p-Sectorial Operator and Additive "Noise". *Global and Stochastic Analysis*, 2018, vol. 5, no. 2, pp. 129–143.
93. Zamyshlyaeva A.A. The Higher-Order Sobolev-Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5–28.
94. Zamyshlyaeva A.A., Al-Isawi J.K.T. On Some Properties of Solutions to One Class of Evolution Sobolev Type Mathematical Models in Quasi-Sobolev Spaces. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 113–119. DOI: 10.14529/mmp150410

95. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. The Cauchy Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order. *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 5–14. DOI: 10.14529/mmp180101

96. Zamyshlyaeva A., Lut A. Inverse Problem for the Sobolev Type Equation of Higher Order. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 14, p. 1647. DOI: 10.3390/math9141647

97. Zamyshlyaeva A. A., Manakova N. A., Tsyplenkova O. N. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, vol. 13, no. 1, pp. 5–27. DOI: 10.14529/mmp200101

98. Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A. Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Linear Sobolev Type Equations of Higher Order. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 5–16. DOI: 10.14529/mmph160401

99. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. The Optimal Control over Solutions of the Initial-finish Value Problem for the Boussinesque–Löve Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 5 (264), pp. 13–24. (in Russian)

Алевтина Викторовна Келлер, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), alevtinak@inbox.ru.

Поступила в редакцию 3 сентября 2023 г.

MSC 93E10 **DOI: 10.14529/mmp230401**

SOBOLEV-TYPE SYSTEMS AND APPLIED PROBLEMS

A.V. Keller, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, alevtinak@inbox.ru

This article provides a brief overview of analytical studies of Sobolev-type equations obtained by the research team at the South Ural State University. The review includes results in the areas: the solvability of initial problems for linear and semi-linear Sobolev-type equations and obtaining conditions for their stability; the solvability of classes of problems for high-order Sobolev-type equations; the solvability and uniqueness of initial-finite problems and optimal control problems for Sobolev-type equations; the theory of stochastic Sobolev-type equations; the solvability of problems for Sobolev-type equations in the space of K-forms. The results are based on the use of the phase-space method and the theory of degenerate resolving (semi)groups developed by Sviridyuk and his students. Sobolev-type equations are the basis of various physical, biological, and economic models, a summary of the results of this area of research gives a systematic up-to-date understanding of it. The article contains five sections, the bibliography of the review includes fundamental works that have become the basis for many subsequent results, primarily numerical studies, and recent works expanding the methods and theory of Sobolev-type equations.

Keywords: Sobolev-type equations; G.A. Sviridyuk's phase space method, degenerate resolving (semi)groups, Showalter–Sidorov condition; initial-final conditions, optimal control.

Received September 3, 2023