

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В.П. Танана, А.И. Сидикова

Получена оценка для приближенного решения одной обратной задачи для параболического уравнения в частных производных.

Ключевые слова: некорректная задача, обратная задача, параболическое уравнение

Во многих отраслях техники встречаются процессы, связанные с нагреванием твердых тел потоками жидкости или газа. Особую роль при этом играет информация о температуре на поверхности этих тел.

Как правило, единственным способом определения этой температуры является решение граничных обратных задач для уравнений теплообмена в твердых телах по результатам измерений внутри этих тел [1].

В настоящей работе решается одна из таких задач, сформулированная в [2].

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a(x)u(x, t), \quad (1)$$

в котором $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$, $a(x) \leq 0$ и $a(x) \in C^2[0, 1]$.

Предположим, что решение $u(x, t)$ уравнения (1) удовлетворяет следующим начальному и граничным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

и

$$u(1, t) = v(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Граничное значение $v(t)$ на правом конце отрезка нам неизвестно, а вместо него дано значение функции $u(x, t)$ в точке $x_0 \in (0, 1)$.

$$u(x_0, t) = \varphi(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Требуется определить значение $u(t) = u(x_1, t)$, где $x_0 < x_1 < 1$. Эта задача является некорректно поставленной. Потому предположим, что при $\varphi(t) = \varphi_0(t)$, где $\varphi_0 \in W_2^1[0, \infty)$,

существует решение $u(x, t)$ задачи (1–5) такое, что $u(x, t)$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \in C([0, 1]; L_2[0, \infty))$ и

$$u(x_1, t) = u_0(t); \quad t \geq 0, \quad (6)$$

такое, что, соответствующее $v_0(t) = u(1, t)$ удовлетворяет условию

$$\|v_0\|_{L_2} \leq r. \quad (7)$$

Предположим, что решение $u(x, t)$ задачи (1 – 4) при $u(1, t) = v_0(t)$ удовлетворяет условию

$$u(x_0, t) = \varphi_0(t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Пусть точное значение $\varphi_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $\varphi_\delta(t) \in L_2[0, \infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|\varphi_0 - \varphi_\delta\|_{L_2} \leq \delta. \quad (9)$$

Требуется, используя исходные данные φ_δ , δ и r , построить приближенное решение $u_\delta(t)$ задачи (1–5) и оценить его уклонение $\|u_\delta - u_0\|_{L_2}$ от точного решения $u_0(t)$.

Таким образом, задача (1 – 5) неявно определяет оператор T , действующий из пространства $L_2[0, \infty)$ в $L_2[0, \infty)$, который функции $\varphi(t)$ ставит в соответствие искомое значение $u(t) = u(x_1, t)$

$$T \varphi(t) = u(t), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

2. Формальное сведение задачи (1 – 5) к задаче вычисления значений оператора

Для формального решения задачи (1 – 5), используем косинус F_c и синус F_s преобразования.

Умножив уравнение (1) на мнимую единицу i

$$i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + ia(x)u(x, t), \quad (11)$$

применим к уравнениям (1) и (11) синус и косинус преобразования, соответственно.

После чего получим

$$-\lambda F_c(u) = \frac{d^2 F_s(u)}{dx^2} + a(x)F_s(u), \quad \lambda \geq 0 \quad (12)$$

и

$$\lambda i F_s(u) = i \frac{d^2 F_c(u)}{dx^2} + ia(x)F_c(u), \quad \lambda \geq 0. \quad (13)$$

Складывая почленно соотношения (12) с (13) и нормируя сумму, будем иметь

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \lambda \int_0^\infty u(x, t)(\cos \lambda t - i \sin \lambda t) dt = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_0^\infty u(x, t)(i \cos \lambda t + \sin \lambda t) dt \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} a(x) \int_0^\infty u(x, t)(i \cos \lambda t + \sin \lambda t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом того, что $i \cos \lambda t + \sin \lambda t = i(\cos \lambda t - i \sin \lambda t)$, из (14) следует

$$\frac{d^2 \hat{u}(x, \lambda)}{dx^2} + a(x)\hat{u}(x, \lambda) = i\lambda \hat{u}(x, \lambda), \quad (15)$$

где $\hat{u}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u(x, t) e^{-i\lambda t} dt$.

Из (3) и (5) будем иметь, что

$$\hat{u}(0, \lambda) = 0, \quad (16)$$

а

$$\hat{u}(x_0, \lambda) = \hat{\varphi}(\lambda), \quad (17)$$

где $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{-i\lambda t} dt$.

Из общего вида решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка следует, что задача (15–17) имеет решение

$$\hat{u}(x, \lambda) = l(\lambda)e(x, \lambda); \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \geq 0, \quad (18)$$

где $l(\lambda)$ —некоторая функция, а $e(x, \lambda)$ —решение задачи (15),(16), удовлетворяющее условию $e'_x(0, \lambda) = 1$.

Используя условие (17), определим функцию $l(\lambda)$ формулой

$$l(\lambda) = \frac{\hat{\varphi}(\lambda)}{e(x_0, \lambda)}, \quad \lambda \geq 0. \quad (19)$$

Из (18),(19) следует, что

$$\hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}(\lambda); \quad \lambda \geq 0. \quad (20)$$

Исследуем поведение функции $l(\lambda)$, определяемой формулой (19).

Теорема 1. Для любого $\lambda \geq 0$ функция $e(x_0, \lambda) \neq 0$, а функция $l(\lambda)$ непрерывна на полу-прямой $[0, \infty)$.

Доказательство. Так как функции $\hat{\varphi}(\lambda)$ и $e(x_0, \lambda)$ непрерывны на полупрямой $[0, \infty)$, то для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любого $\lambda \geq 0$ $e(x_0, \lambda) \neq 0$. Предположим противное, то есть найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$e(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (21)$$

Тогда рассмотрим пространство $H_0 = L_2[0, x_0]$ над полем комплексных чисел и оператор B , действующий из H_0 в H_0 и определяемый формулами

$$Bu = \frac{d^2u}{dx^2} + a(x)u, \quad u \in D(B), \quad (22)$$

а

$$D(B) = \{u : u, Bu \in H_0, u(0) = u(x_0) = 0\}. \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что оператор B отрицательно определен и самосопряжен. Поэтому существует число $\lambda_1 < 0$ такое, что спектр $Sp(B)$ оператора B лежит в полупрямой $(-\infty, \lambda_1]$.

Так как

$$Be(x, \lambda_0) = i\lambda_0e(x, \lambda_0),$$

то $e(x, \lambda_0) = 0$ при любом значении $x \in [0, x_0]$ и $e'_x(0, \lambda_0) = 0$, что противоречит определению функции $e(x, \lambda)$ и доказывает теорему. \square

Пусть $\tau = \sqrt{\lambda}$, а $e_1(x, \tau) = e(x, \lambda)$. Тогда функция $e_1(x, \tau)$ будет удовлетворять интегральному уравнению

$$e_1(x, \tau) = \frac{\text{sh } \mu_0 x \tau}{\mu_0 \tau} - \int_0^x \frac{\text{sh } \mu_0(x - \xi) \tau}{\mu_0 \tau} a(\xi) e_1(\xi, \tau) d\xi, \quad (24)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $x \in [0, 1]$, а $\tau \geq 0$. Исследуем поведение функции $|e_1(x, \tau)|$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть $a(x) \in C^2[0, 1]$ и для любого $x \in [0, 1]$ $a(x) \leq 0$. Тогда существует число $\tau_1 > 0$ такое, что для любого $\tau \geq \tau_1$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{3} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau|}{\tau} \leq |e_1(x, \tau)| \leq \frac{4}{3} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau|}{\tau}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon(x, \tau) = \frac{\mu_0 \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} e_1(x, \tau)$. Тогда из (24) следует, что

$$\varepsilon(x, \tau) = 1 - \frac{1}{\mu_0 \tau} \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0(x - \xi) \tau \operatorname{sh} \mu_0 \xi \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} a(\xi) \varepsilon(\xi, \tau) d\xi. \quad (25)$$

Так как

$$\left| \frac{\operatorname{sh} \mu_0(x - \xi) \tau \operatorname{sh} \mu_0 \xi \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} \right| = 1 + o(1) \text{ при } \tau \rightarrow \infty,$$

то из (25) следует существование числа $\tau_1 > 0$ такого, что для любого $\tau \geq \tau_1$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{\mu_0 \tau} \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0(x - \xi) \tau \operatorname{sh} \mu_0 \xi \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} a(\xi) d\xi \right| \leq \frac{1}{4}. \quad (26)$$

Решение уравнения (25) будем искать в виде

$$\varepsilon(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(x, \tau), \quad (27)$$

где $\varepsilon_0(x, \tau) = 1$, а

$$\varepsilon_{k+1}(x, \tau) = -\frac{1}{\mu_0 \tau} \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \mu_0(x - \xi) \tau \operatorname{sh} \mu_0 \xi \tau}{\operatorname{sh} \mu_0 x \tau} a(\xi) \varepsilon_k(\xi, \tau) d\xi. \quad (28)$$

Из (26–28) следует, что для любых значений k , $\tau \geq \tau_1$ и $x \in [0, 1]$

$$|\varepsilon_k(x, \tau)| \leq 4^{-k}, \quad (29)$$

а из (27) и (29), что для любых значений $x \in [0, 1]$ и $\tau \geq \tau_1$

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} \leq |\varepsilon(x, \tau)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}.$$

Таким образом для любых значений $x \in [0, 1]$ и $\tau \geq \tau_1$

$$\frac{1}{3} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau|}{\tau} \leq |e_1(x, \tau)| \leq \frac{4}{3} \frac{|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau|}{\tau}.$$

Тем самым теорема доказана. □

Так как

$$|\operatorname{sh} \mu_0 x \tau| = e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}} (1 + o(1)) \text{ при } \tau \rightarrow \infty,$$

то из теоремы 2 следует существования числа $\tau_2 \geq \tau_1$ такого, что для любых значений $\tau \geq \tau_2$ и $x \in [0, 1]$

$$\frac{1}{6} \frac{e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}}}{\tau} \leq |e_1(x, \tau)| \leq \frac{8}{3} \frac{e^{\frac{x\tau}{\sqrt{2}}}}{\tau}. \quad (30)$$

3. Доказательство метрической эквивалентности задач (10) и (20)

Пусть $\overline{H} = L_2[0, \infty) + iL_2[0, \infty)$, а F -оператор, отображающий пространство $L_2[0, \infty)$ в \overline{H} и определяемый формулой

$$F(u(t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \geq 0, u(t) \in L_2[0, \infty). \quad (31)$$

Лемма 1. *Оператор F , определяемый формулой (31), изометричен.*

Доказательство. Пусть $u(t) \in L_2[0, \infty)$. Продолжим эту функцию на отрицательную полуось, положив

$$u(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (32)$$

Таким образом $u(t) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Обозначим через $\hat{u}(\lambda)$ преобразование Фурье функции $u(t)$

$$\hat{u}(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\lambda t} dt, \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (33)$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [3] на с. 412, следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\|_{L_2} = \|u(t)\|_{L_2}. \quad (34)$$

Из (32) и (33) следует, что

$$\hat{u}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u(t)e^{-i\lambda t} dt, & \lambda \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u(t)e^{i|\lambda|t} dt, & \lambda < 0 \end{cases} \quad (35)$$

Из (35) следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\|_{L_2}^2 = \int_0^{\infty} |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda + \int_0^{\infty} |\overline{\hat{u}(\lambda)}|^2 d\lambda, \quad (36)$$

где $\overline{\hat{u}(\lambda)}$ -функция, сопряженная функции $\hat{u}(\lambda)$.

Так как для любого $\lambda \geq 0$

$$\|\hat{u}(\lambda)\|_{L_2}^2 = \sqrt{2} \int_0^{\infty} |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda, \quad (37)$$

а из (34) и (37) следует утверждение леммы. □

Теперь введем пространства Φ , \hat{U} и \hat{V} . Предположим, что они являются подпространствами \overline{H} и определяются формулами

$$\hat{\Phi} = F[L_2[0, \infty)], \quad (38)$$

где F -оператор, определяемый формулой (31),

$$\hat{U} = \{\hat{u} : \hat{u} \in \overline{H}, \hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda) e(x_1, \lambda) F[u(t)], u(t) \in L_2[0, \infty)\}, \quad (39)$$

а

$$\hat{V} = \{\hat{v} : \hat{v} \in \overline{H}, \hat{v}(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda) e(1, \lambda) F[v(t)], v(t) \in L_2[0, \infty)\}. \quad (40)$$

Из леммы 1 следует, что пространства $\hat{\Phi}$, \hat{U} , \hat{V} , определяемые формулами (38-40), изометричны пространству $L_2[0, \infty)$.

Теперь запишем задачу (20) в виде

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{T}\hat{\varphi}(\lambda), \tag{41}$$

где $\hat{T}\hat{\varphi}(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}(\lambda)$; $\hat{\varphi}(\lambda) \in \hat{\Phi}$, а $\hat{u}(\lambda) \in \hat{U}$.

Таким образом, из формулы (30) следует, что задача (41) является задачей вычисления значений неограниченного оператора \hat{T} , и она метрически эквивалентна исходной задаче (10).

4. Решение задачи (41)

Так как задача (41) некорректна, то для ее решения в пространстве \hat{U} введем класс корректности \hat{M}_r . Для определения \hat{M}_r используем условие (20). Пусть \hat{L} —линейный инъективный оператор, действующий из \hat{U} в \hat{V} и определяемый формулой

$$\hat{L}\hat{u}(\lambda) = e^{-1}(x_1, \lambda) e(1, \lambda) \hat{u}(\lambda), \tag{42}$$

где $\hat{u}(\lambda) \in \hat{U}$, а $\hat{L}\hat{u}(\lambda) \in \hat{V}$.

Тогда

$$\hat{M}_r = \{\hat{u}(\lambda) : \hat{u}(\lambda) \in \hat{U}, \|\hat{L}\hat{u}\| \leq r\}. \tag{43}$$

Далее исходные пространства $\hat{\Phi}$ и \hat{U} разложим в ортогональные суммы

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_1 \dot{+} \hat{\Phi}_2 \tag{44}$$

и

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \dot{+} \hat{U}_2, \tag{45}$$

где $\hat{\Phi}_1 = \{\hat{\varphi}_1(\lambda) : \hat{\varphi}_1(\lambda) = F[\varphi(t)], \varphi \in L_2[0, \infty), 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2\}$,

$\hat{\Phi}_2 = \{\hat{\varphi}_2(\lambda) : \hat{\varphi}_2(\lambda) = F[\varphi(t)], \varphi \in L_2[0, \infty), \tau_2^2 \leq \lambda < \infty\}$

и аналогично

$$\hat{U}_1 = \{\hat{u}_1(\lambda) : \hat{u}_1(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}_1(\lambda), \hat{\varphi}_1(\lambda) \in \hat{\Phi}_1\},$$

$$\hat{U}_2 = \{\hat{u}_2(\lambda) : \hat{u}_2(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)\hat{\varphi}_2(\lambda), \hat{\varphi}_2(\lambda) \in \hat{\Phi}_2\}.$$

Ортогональное разложение пространств (44) и (45) порождает разбиение задачи (41) на две.

Первая из них

$$\hat{u}_1(\lambda) = \hat{T}_1\hat{\varphi}_1(\lambda); \hat{u}_1 \in U_1, \text{ а } \hat{\varphi}_1 \in \hat{\Phi}_1, \tag{46}$$

где $\hat{T}_1\hat{\varphi}_1(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda) e(x_1, \lambda) \hat{\varphi}_1(\lambda)$.

Так как, на основании теоремы 1, функция $e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)$ непрерывна на отрезке $[0, \tau_2^2]$, то существует число $c_1 > 0$ такое, что для любого $\lambda \in [0, \tau_2^2]$

$$|e^{-1}(x_0, \lambda)e(x_1, \lambda)| \leq c_1. \tag{47}$$

Из (47) будет следовать ограниченность оператора \hat{T}_1 и, соответственно, корректность задачи (46).

Приближенное решение задачи (46) обозначим через $\hat{u}_{1,\delta}(\lambda)$ и определим формулой

$$\hat{u}_{1,\delta}(\lambda) = \hat{T}_1 \hat{\varphi}_{1,\delta}(\lambda), \quad (48)$$

где $\hat{\varphi}_{1,\delta}(\lambda) = F[\varphi_\delta(t)]; \quad 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2$.

Из (9), (47), (48) и леммы 1 будет следовать оценка

$$\|\hat{u}_{1,\delta} - \hat{u}_{1,0}\| \leq c_1 \delta, \quad (49)$$

где $\hat{u}_{1,0}(\lambda) = \hat{T}_1 \hat{\varphi}_{1,0}(\lambda)$, а $\varphi_{1,0}(\lambda) = F[\varphi_0(t)], \quad 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2$.

Вторая задача будет иметь вид

$$\hat{u}_2(\lambda) = \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda); \quad \hat{u}_2 \in \hat{U}_2, \text{ а } \hat{\varphi}_2 \in \hat{\Phi}_2, \quad (50)$$

где $\hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda) = e^{-1}(x_0, \lambda) e(x_1, \lambda) \hat{\varphi}_2(\lambda), \quad \lambda \geq \tau_2^2$, а

$$D(\hat{T}_2) = \{\hat{\varphi}_2(\lambda) : \hat{\varphi}_2(\lambda) \in \hat{\Phi}_2, \quad \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda) \in U_2\}.$$

Из теоремы 2 следует, что оператор \hat{T}_2 неограничен и потому задача (50) некорректна. Предположим, что $\alpha > \tau_2^2$ и определим оператор \hat{T}_2^α , отображающий пространство $\hat{\Phi}_2$ в \hat{U}_2 , формулой

$$\hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_2(\lambda) = \begin{cases} \hat{T}_2 \hat{\varphi}_2(\lambda), & \text{при } \tau_2^2 \leq \lambda \leq \alpha, \\ 0 & , \text{ при } \lambda > \alpha. \end{cases} \quad (51)$$

Приближенное решение $\hat{u}_{2,\delta}^\alpha$ задачи (50) будет иметь вид

$$\hat{u}_{2,\delta}^\alpha(\lambda) = \hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_{2,\delta}(\lambda), \quad (52)$$

где $\hat{\varphi}_{2,\delta}(\lambda) = F[\varphi_\delta(t)]; \quad \tau_2^2 \leq \lambda < \infty$.

Таким образом,

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \leq \|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}^\alpha\| + \|\hat{u}_{2,0}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\|, \quad (53)$$

где $\hat{u}_{2,0}(\lambda) = \hat{T}_2 \hat{\varphi}_{2,0}(\lambda)$, $\hat{u}_{2,0}^\alpha(\lambda) = \hat{T}_2^\alpha \hat{\varphi}_{2,0}(\lambda)$, а $\hat{\varphi}_{2,0}(\lambda) = F[\varphi_0(t)], \quad \tau_2^2 \leq \lambda < \infty$.

Так как $\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}^\alpha\| \leq \|\hat{T}_2^\alpha\| \cdot \delta$, а $\|\hat{u}_{2,0}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \leq \Delta_1(\alpha)$,

где $\Delta_1^2(\alpha) = \sup \left\{ \int_\alpha^\infty |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda : \hat{u} \in \hat{M}_r \right\}$, то из (53) следует, что

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^\alpha - \hat{u}_{2,0}\| \leq \Delta_1(\alpha) + \|\hat{T}_2^\alpha\| \cdot \delta. \quad (54)$$

Из (30), (50) и (51) следует, что

$$\frac{1}{16} e^{(x_1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \leq \|\hat{T}_2^\alpha\| \leq 16 e^{(x_1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}; \quad \alpha > \tau_2^2. \quad (55)$$

Перейдем к оценке величины $\Delta_1(\alpha)$. Из (43) следует, что, если $\hat{u}(\lambda) \in \hat{M}_r$, то

$$\int_\alpha^\infty |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \quad (56)$$

и

$$\int_\alpha^\infty |e^{-1}(x_1, \lambda) e(1, \lambda)|^2 |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \leq r^2. \quad (57)$$

Так как $\lambda \geq \alpha$, то из (30) и (57) следует, что

$$\int_{\alpha}^{\infty} |e^{-1}(x_1, \lambda)e(1, \lambda)|^2 |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \geq \left(\frac{1}{16}\right)^2 e^{2(1-x_1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \int_{\alpha}^{\infty} |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \quad (58)$$

Из (56 – 58) следует, что

$$\|\hat{u}(\lambda)\| \leq 16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}$$

и, соответственно,

$$\Delta_1(\alpha) \leq 16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}. \quad (59)$$

Если, используя схему М.М. Лаврентьева [4], параметр α выбрать из условия

$$16re^{(x_1-1)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = 16\delta e^{(x_1-x_0)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}, \quad (60)$$

то из (54 – 60) будет следовать оценке погрешности

$$\|\hat{u}_{2,\delta}^{\alpha(\delta)} - \hat{u}_{2,0}\| \leq 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}}, \quad (61)$$

где $\alpha(\delta)$ решение уравнения (60).

Если положить

$$\hat{u}_{\delta}(\lambda) = \begin{cases} \hat{u}_{1,\delta}(\lambda), & \text{при } 0 \leq \lambda \leq \tau_2^2, \\ \hat{u}_{2,\delta}^{\alpha(\delta)}(\lambda), & \text{при } \lambda > \tau_2^2, \end{cases}$$

то из (49) и (61) следует, что

$$\|\hat{u}_{\delta}(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \leq c_1\delta + 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}}, \quad (62)$$

где $\hat{u}_0(\lambda) = \hat{T}\hat{\varphi}_0(\lambda)$, а $\hat{\varphi}_0(\lambda) = F[\varphi_0(t)]$.

Пусть $u_{\delta}(t) = |F^{-1}[\hat{u}_{\delta}(\lambda)]|$, тогда из (62) и леммы 1 следует, что

$$\|u_{\delta}(t) - u_0(t)\| \leq c_1\delta + 32r^{\frac{x_1-x_0}{1-x_0}} \delta^{\frac{1-x_1}{1-x_0}},$$

где $u_0(t) = T\varphi_0(t)$.

Работа проводилась при финансовой поддержке гранта р_урал_а с 07-01-96001.

Литература

1. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988.
2. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения / В.П. Танана // Докл. РАН. – 2006. – Т. 407, № 3. – С. 316 – 318.
3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972.
4. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Наука, 1962.

Кафедра вычислительной математики,
Южно-Уральский государственный университет
7413604@mail.ru

Поступила в редакцию 29 февраля 2008 г.