УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ СОСТАВНОГО ТИПА

А.И. Кожанов

Для уравнений составного типа, называемых также псевдопараболическими уравнениями, исследуется разрешимость обратной задачи нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента, зависящего от выделенной временной переменной. В качестве дополнительного условия предлагается условие интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: *уравнения составного типа; неизвестный коэффициент; интегральное условие переопределения; регулярные решения; существование и единственность*

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечнодифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, i, $j = 1, \ldots, n$, $b(x,t)$, $K(x)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$ — определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$ заданные функции, Bu — дифференциальный оператор, определенный равенством

$$Bu = b^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + b^i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u$$

(по повторяющимся индексам здесь и далее ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Обратная задача: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$q(t)u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(x)u(x,t)\,dx = \mu(t), \quad 0 < t < T. \tag{4}$$

В рассматриваемой обратной задаче условия (2) и (3) являются условиями обычной первой начально – краевой задачи для уравнения составного типа (1), условие же (4) есть условие переопределения интегрального вида, необходимое вследствие наличия дополнительной неизвестной (наряду с решением $u(x,t)$) функции $q(t)$. Подобные обратные задачи для уравнений составного типа (1) ранее не изучались.

Целью настоящей работы является доказательство разрешимости обратной задачи (1) – (4) в классе регулярных решений. Техника доказательства основана на переходе от исходной задачи к новой уже прямой начально – краевой задаче для нелинейного интегро – дифференциального уравнения составного типа вида (1), исследовании разрешимости новой задачи и далее построении с помощью решения новой задачи решения рассматриваемой обратной задачи. Близкая техника ранее использовалась автором в работах [1 – 3].

Перейдем к содержательной части работы.

Определим пространства $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$:

$$\overset{\circ}{V}_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))\},$$

$$\overset{\circ}{V}_2 = \{v(x,t) : \quad v(x,t) \in \overset{\circ}{V}_1, \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))\};$$

нормы в этих пространствах определим равенствами

$$\|v\|_{\overset{\circ}{V}_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))},$$

$$\|v\|_{\overset{\circ}{V}_2} = \|v\|_{\overset{\circ}{V}_1} + \|v_{tt}\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))}.$$

Для функций $v(x,t)$ из пространств $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ для почти всех t из отрезка $[0,T]$ выполняются неравенства

$$\|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_0 \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_1 \|\delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{5}$$

$$\|v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le 2T \int_0^t \|v_\tau(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\,d\tau + 2\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{6}$$

— см. [4]. Далее, определим дифференциальный оператор B_1:

$$B_1 v = b_t^{ij}(x,t)v_{x_i x_j} + b_t^i(x,t)v_{x_i} + b_t(x,t)v.$$

Предполагая, что коэффициенты операторов B и B_1 ограничены, нетрудно показать, что для функций $v(x,t)$ из пространств $\overset{\circ}{V}_1$ и $\overset{\circ}{V}_2$ для почти всех t из отрезка $[0,T]$ выполняются неравенства

$$\|Bv(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le b_0 \|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{7}$$

$$\|B_1 v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le b_1 \|\Delta v(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{8}$$

с некоторыми постоянными, определяющимися лишь функциями $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$ и $b(x,t)$, областью Ω и числом T.

Неравенства (5) – (8), а также собственно числа c_0, c_1, b_0 и b_1 нам понадобятся ниже.

Определим другие величины, которые понадобятся ниже. Пусть γ_0 и γ_1 есть заданные положительные постоянные (роль γ_0 и γ_1 будет прояснена ниже). Положим далее

$$F(t) = \int_\Omega K(x) f(x,t)\,dx,$$

$$\beta_1 = \max\left(\frac{3}{2} + \frac{b_0}{2} + b_1 T^2 + 2b_0 T, \frac{\mu_0}{2\gamma_0}\right),$$

$$\beta_2 = \left| \frac{1}{2}\int_Q f_t^2\,dx\,dt + 2\,vrai\max_{0\le t\le T}[\int_\Omega f^2(x,t)\,dx] + (b_1 T + 2b_0)\int_\Omega (\Delta u_0)^2\,dx + \right.$$

$$
\left. +\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\Delta u_1)^2\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{1x_i}^2\,dx+\int\limits_{\Omega}Bu_0\Delta u_1\,dx-\int\limits_{\Omega}f(x,0)\Delta u_1\,dx\right|,
$$

$$
N_1=4\beta_2\exp(4\beta_1 T),
$$

$$
N_2=\beta_1 T N_1+\beta_2,
$$

$$
N_3=2T^2N_1+2\int\limits_{\Omega}(\Delta u_0)^2\,dx,
$$

$$
N_4=\left(\int\limits_{\Omega}K^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left[N_1^{\frac{1}{2}}+(b_0N_3)^{\frac{1}{2}}\right].
$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$
b^{ij}(x,t)\in C^1(\overline{Q}),\quad b^i(x,t)\in C^1(\overline{Q}),\quad i,\ j=1,\dots,n,\quad b(x,t)\in C(\overline{Q}),
$$

$$
K(x)\in C^1(\overline{\Omega}); \tag{9}
$$

$$
f(x,t)\in L_2(Q),\quad f_t(x,t)\in L_2(Q),\quad u_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),
$$

$$
u_1(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\quad \mu(t)\in C^2([0,T]); \tag{10}
$$

$$
\mu''(t)\ge\mu_0>0,\quad F(t)\ge\gamma_0+\gamma_1,\quad \gamma_0>0,\quad \gamma_1>0,\quad t\in[0,T]; \tag{11}
$$

$$
\int\limits_{\Omega}K(x)u_0(x)\,dx=\mu(0),\quad \int\limits_{\Omega}K(x)u_1(x)\,dx=\mu'(0); \tag{12}
$$

$$
N_4<\gamma_1. \tag{13}
$$

Тогда обратная задача (1) – (4) имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in \overset{\circ}{V}{}_1$, $q(t)\in L_2([0,T])$.

Доказательство. Воспользуемся комбинацией метода срезок, метода неподвижной точки и метода регуляризации.

Пусть N есть заданное положительное число. Определим функцию $G_N(\xi)$ (срезку):

$$
G_N(\xi)=\begin{cases}\xi, & \text{если}\ \ |\xi|\le N,\\ N, & \text{если}\ \ \xi>N,\\ -N, & \text{если}\ \ \xi<-N.\end{cases}
$$

Далее, для заданной функции $v(x,t)$ определим функции $\psi(t,v)$ и $\widetilde{q}(t,v)$:

$$
\psi(t,v)=\int\limits_{\Omega}K_{x_i}(x)v_{x_i}(x)v_{x_it}(x,t)\,dx+\int\limits_{\Gamma}K(x)v_{x_it}(x,t)\nu_i\,ds-
$$

$$
-\int\limits_{\Omega}[K(x)b^i(x,t)-(K(x)b^{ij}(x,t))_{x_j}]v_{x_i}(x,t)\,dx-\int\limits_{\Omega}K(x)b(x,t)v(x,t)\,dx+
$$

$$
+\int\limits_{\Gamma}K(x)b^{ij}(x,t)v_{x_i}(x,t)\nu_j\,ds
$$

($\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ),

$$\widetilde{q}(t, v) = \frac{F(t) - G_{\gamma_1}(\psi(t, v))}{\mu''(t)}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\widetilde{q}(t, u)u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \tag{1'}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). В данной краевой задаче уравнение (1′) представляет собой нелинейное «нагруженное» [5, 6] уравнение составного типа. Разрешимость поставленной задачи докажем с помощью метода регуляризации и метода неподвижной точки.

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\widetilde{q}(t, u)u_{tt} - \varepsilon\Delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \tag{$1'_\varepsilon$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3). Наконец, пусть $v(x, t)$ есть заданная функция из пространства $\overset{\circ}{V}_2$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\widetilde{q}(t, v)u_{tt} - \varepsilon\delta u_{tt} - \Delta u_t - Bu = f(x, t) \tag{$1'_{\varepsilon,v}$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3).

Пусть выполняются условия (9) – (12) за исключением условия $f_t(x, t) \in L_2(Q)$. Тогда, как следует из [7], краевая задача ($1'_{\varepsilon,v}$), (2), (3) будет разрешима в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$. Следовательно, при выполнении указанных выше условий данная краевая задача порождает оператор Φ, переводящий пространство $\overset{\circ}{V}_2$ в себя: $\Phi(v) = u$. Докажем, что этот оператор имеет в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ неподвижные точки.

Рассмотрим равенство

$$-\int_0^t \int_\Omega [\widetilde{q}(\tau, v)u_{\tau\tau} - \varepsilon\Delta u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau - Bu + u_\tau]\Delta u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau.$$

Интегрируя по частям и используя условия (2) и (3), нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\int_0^t \int_\Omega [\widetilde{q}\sum_{i=1}^n u^2_{x_i\tau\tau} + \varepsilon(\Delta u_{\tau\tau})^2]\, dx\, d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{[\Delta u_t(x,t)]^2 + \sum_{i=1}^n u^2_{x_i t}(x,t)\right\} dx =$$

$$= \int_0^t \int_\Omega f\Delta u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau - - \int_0^t \int_\Omega Bu\Delta u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i\tau}u_{x_i\tau\tau}\, dx\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta u_1)^2\, dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega u^2_{1x_i}\, dx. \tag{14}$$

Положительность функции $\widetilde{q}(\tau, v)$, неравенство Юнга, неравенство (7) и лемма Гронуолла позволяют вывести из этого равенства априорную оценку

$$\int_0^t \int_\Omega (\Delta u_{\tau\tau})^2\,dx\,d\tau + \int_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)\,dx \le C_0$$

с постоянной C_0, определяющейся лишь нормами функции $f(x,t)$ в пространстве $L_2(Q)$, функцией $u_0(x)$ и $u_1(x)$ в пространстве $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, числами T и ε. Из этой оценки, из неравенств (5) и (6) вытекает оценка

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_2} \le C_1 \tag{15}$$

с постоянной C_1, определяющейся теми же величинами, что и постоянная C_0.

С помощью оценки (15) нетрудно установить, что оператор Φ, определенный выше, будет переводить некоторое замкнутое выпуклое ограниченное множество пространства $\overset{\circ}{V}_2$ в себя, и будет вполне непрерывным на пространстве $\overset{\circ}{V}_2$ — подробности рассуждений см. [1 – 3]. Согласно теореме Шаудера, оператор Φ имеет в пространстве $\overset{\circ}{V}_2$, по крайней мере, одну неподвижную точку $u(x,t)$. Эта неподвижная точка даст решение краевой задачи $(1'_\varepsilon)$, (2), (3), принадлежащее пространству $\overset{\circ}{V}_2$.

Итак, краевая задача $(1'_\varepsilon)$, (2), (3) при фиксированном ε имеет решение, принадлежащее пространству $\overset{\circ}{V}_2$; обозначим это решение $u^\varepsilon(x,t)$. Покажем, что при выполнении всех условий теоремы 1 из семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ можно извлечь последовательность, сходящуюся к решению краевой задачи (1′), (2), (3).

В равенстве (14), соответствующем уравнению $(1'_\varepsilon)$, выполним интегрирование по частям в первом и во втором слагаемом правой части. Получим равенство (индекс «ε»у решения временно опустим)

$$\int_0^t \int_\Omega [\widetilde{q} \sum_{i=1}^n u_{x_i\tau\tau}^2 + \varepsilon(\Delta u_{\tau\tau}^2)]\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega \{[\Delta u_t(x,t)]^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2(x,t)\}\,dx =$$

$$= -\int_0^t \int_\Omega f_\tau \Delta u_\tau\,dx\,d\tau + \int_\Omega f(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx + \int_0^t \int_\Omega Bu_\tau \Delta u_\tau\,dx\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega B_1 u \Delta u_\tau\,dx\,d\tau - \int_\Omega Bu(x,t)\Delta u_t(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i\tau} u_{x_i\tau\tau}\,dx\,d\tau -$$

$$- \int_\Omega f(x,0)\Delta u_1(x)\,dx + \int_\Omega Bu_0 \Delta u_1\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta u_1)^2\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{1x_i}^2\,dx.$$

Неравенство Юнга и положительность функции $\widetilde{q}(\tau, u)$ позволяют перейти от данного равенства к неравенству

$$\frac{\gamma_0}{\mu_0}\sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega u_{x_i\tau\tau}^2\,dx\,d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta u_{\tau\tau})^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_it}^2(x,t)\,dx \le \frac{\delta_1^2}{2}\int_0^t\int_{\Omega}(\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2\delta_1^2}\int_0^t\int_{\Omega}f_\tau^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\frac{\delta_2^2}{2}\int_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2 + \frac{1}{2\delta_2^2}\int_{\Omega}f^2(x,t)\,dx + \frac{\delta_3^2}{2}\int_0^t\int_{\Omega}(\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\delta_3^2}\int_0^t\int_{\Omega}(Bu_\tau)^2\,dx\,d\tau + \frac{\delta_4^2}{2}\int_0^t\int_{\Omega}(\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2\delta_4^2}\int_0^t\int_{\Omega}(B_1u)^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\frac{\delta_5^2}{2}\int_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx + \frac{1}{2\delta_5^2}\int_{\Omega}[Bu(x,t)]^2\,dx + \frac{\delta_6^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_{\Omega}u_{x_i\tau\tau}^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\delta_6^2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_{\Omega}u_{x_i\tau}^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Delta u_1)^2\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{1x_i}^2\,dx+$$

$$+\int_{\Omega}Bu_0\Delta u_1\,dx - \int_{\Omega}f(x,0)\Delta u_1\,dx.$$

Используя далее неравенства (6) – (8), приходим к следующему неравенству

$$\frac{\gamma_0}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i\tau\tau}^2\,dx\,d\tau + \varepsilon\int_0^t\int_{\Omega}(\Delta u_{\tau\tau})^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_it}(x,t)\,dx \le$$

$$\le \left(\frac{\delta_1^2+\delta_3^2+\delta_4^2}{2} + \frac{b_0}{2\delta_3^2} + \frac{b_1T^2}{\delta_4^2} + \frac{b_0T}{\delta_5^2}\right)\int_0^t\int_{\Omega}(\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\frac{\delta_2^2+\delta_5^2}{2}\int_{\Omega}[\Delta u(x,t)]^2\,dx + \frac{1}{2\delta_1^2}\int_0^t\int_{\Omega}f_\tau^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2\delta_2^2}\int_{\Omega}f^2(x,t)\,dx+$$

$$+\left(\frac{b_1T}{\delta_4^2} + \frac{b_0}{\delta_5^2}\right)\int_{\Omega}(\Delta u_0)^2\,dx + \frac{\delta_0^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_{\Omega}u_{x_i\tau\tau}^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\delta_6^2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_{\Omega}u_{x_i\tau}^2\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Delta u_1)^2\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{1x_i}^2\,dx + \int_{\Omega}Bu_0\Delta u_1\,dx - \int_{\Omega}f(x,0)\Delta u_1\,dx.$$

Положим $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = 1$, $\delta_2 = \delta_5 = \frac{1}{2}$, $\delta_6 = \sqrt{\gamma_0 \mu_0^{-1}}$. Учитывая введеные выше обозначения, получаем неравенство

$$\frac{\gamma_0}{2\mu_0} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega u_{x_i\tau\tau}^2 \, dx \, d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta u_{\tau\tau})^2 \, dx \, d\tau + \frac{1}{4} \int_\Omega [\delta u_t(x,t)]^2 \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i t}^2(x,t) \, dx \le \beta_1 \int_0^t \int_\Omega [(\Delta u_\tau)^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i\tau}^2] \, dx \, d\tau + \beta_2.$$

Используя лемму Гронуолла, приходим к первой равномерной по ε априорной оценке решений краевой задачи $(1'_\varepsilon)$, (2), (3):

$$\int_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i t}^2(x,t) \, dx \le N_1. \tag{17}$$

Из этой оценки очевидным образом выводятся следующие оценки

$$\varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta u_{\tau\tau})^2 \, dx \, d\tau \le N_2, \tag{18}$$

$$\int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2 \, dx \le N_3. \tag{19}$$

Кроме того, в целом из оценки (16) следует оценка

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_1} \le N_0 \tag{20}$$

с постоянной N_0, определяющейся лишь коэффициентами оператора B, функциями $f(x,t)$, $K(x)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, областью Ω и числом T.

Оценки (18) и (20), теоремы о компактности вложений $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$, $W_2^1(Q) \subset L_2(\Gamma)$ [8, 9], о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду [9] и о слабой компактности ограниченного в L_2 множества [10] дают существование функции $u(x,t)$, а также последовательностей $\{\varepsilon_m\}$ и $\{u_m(x,t)\}$ таких, что при $m \to \infty$

$\varepsilon_m \to 0$,
$u_m(x,t) \to u(x,t)$, $u_{mx_i}(x,t) \to u_{x_i}(x,t)$, $u_{mt}(x,t) \to u_t(x,t)$,
$u_{mx_it}(x,t) \to u_{x_it}(x,t)$ *сильно в* $L_2(Q)$ *и почти всюду в* Q,
$u_{mx_i}(x,t) \to u_{x_i}(x,t)$, $u_{mx_it}(x,t) \to u_{x_it}$ *сильно в*
$L_2(\Gamma \times (0,T))$ *и почти всюду на* $\Gamma \times (0,T)$,
$u_{mx_ix_j}(x,t) \to u_{x_ix_j}(x,t)$, $u_{mx_ix_jt}(x,t) \to u_{x_ix_jt}$,
$u_{mtt}(x,t) \to u_{tt}(x,t)$ *слабо в* $L_2(Q)$, $\varepsilon_m \Delta u_{mtt}(x,t) \to 0$ *слабо в* $L_2(Q)$.

Из данных сходимостей следует, что предельная функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}_1$, является решением краевой задачи $(1')$, (2), (3), и что для нее сохраняются оценки (17), (19) и (20). Оценки (17) и (19) означают, в частности, что выполняется неравенство ;

$$|\psi(t,u)| \le N_4.$$

Из этого неравенства и из условия (13) вытекает, что для решения $u(x,t)$ краевой задачи $(1')$, (2), (3) имеет место равенство

$$G_{\gamma_1}(\psi(t,u)) = \psi(t,u).$$

Положим,

$$q(t) = \frac{F(t) - \psi(t, u)}{\mu''(t)}.$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1). Умножим уравнение (1) с указанной выше функцией $q(t)$ на функцию $K(x)\mu''(t)$ и проинтегрируем по области Ω. Полученное равенство и равенство (21) дают систему

$$q(t)\int\limits_{\Omega} K(x)u_{tt}(x,t) + \psi(t,u) = F(t), \quad q(t)\mu''(t) + \psi(t,u) = F(t).$$

Из этой системы и вследствие положительности функции $q(t)$ и условий согласования (12) вытекает, что выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega} K(x)u(x,t)\,dx = \mu(t).$$

Следовательно, для функции $u(x,t)$, являющейся решением краевой задачи (1′), (2), (3), выполняется условие переопределения (4).

Итак, построенные функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1), для функции $u(x,t)$ выполняются условия (2) – (4), функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}_1$, функция $q(t)$ — пространству $L_\infty([0,T])$. Другими словами, построено требуемое решение рассматриваемой обратной задачи.

□

Пусть $\overline{\gamma}$ есть заданное положительное число. Определим множество W_1:

$$W_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in \overset{\circ}{V}_1, \quad |\psi(t,v)| \le \overline{\gamma} \quad \forall t \in [0,T]\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условие (9), а также условия*

$$\mu''(t) \ge \mu_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \tag{22}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q), \quad F(t) \ge \gamma > \overline{\gamma} \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \tag{23}$$

$$K(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma. \tag{24}$$

Тогда обратная задача (1) – (4) не может иметь в множестве W_1 более одного решения.

Доказательство. Предположим, что в множестве W_1 имеется два решения $\{u_1(x,t), q_1(t)\}$ и $\{u_2(x,t), q_2(t)\}$ обратной задачи (1) – (4). Условие (22) позволяет дать предствление функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$ через функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$:

$$q_1(t) = \frac{F(t) - \psi(t,u_1)}{\mu''(t)}, \quad q_2(t) = \frac{F(t) - \psi(t,u_2)}{\mu''(t)}.$$

Положим $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Имеют место равенство

$$q_1(t)w_{tt} - \Delta w_t - Bw = [q_2(t) - q_1(t)]u_{2tt}, \quad (x,t) \in Q;$$

$$w(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \quad w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \quad u \in \Omega.$$

Следствием этих равенств является равенство

$$\int_0^t\int_\Omega q_1(\tau)w_{\tau\tau}^2\,dx\,d\tau+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_\Omega w_{x_it}^2(x,t)\,dx=\int_0^t\int_\Omega b^{ij}w_{x_i\tau}w_{x_j\tau}\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega(b^i-b^{ij}_{x_j})w_{x_i}w_{\tau\tau}\,dx\,d\tau+\int_0^t\int_\Omega b^{ij}_\tau w_{x_i}w_{x_j\tau}\,dx\,d\tau+\int_0^t\int_\Omega bww_{\tau\tau}\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\frac{\psi(\tau,u_1)-\psi(\tau,u_2)}{\mu''(\tau)}u_{2\tau\tau}w_{\tau\tau}\,dx\,d\tau.$$

Используя условия (22) – (24) и применяя неравенство Юнга, а также первое неравенство (5) и неравенство (6), нетрудно от данного равенства перейти к неравенству

$$\int_0^t\int_\Omega w_{\tau\tau}^2\,dx\,d\tau+\sum_{i=1}^n\int_\Omega w_{x_it}^2(x,t)\,dx\le$$

$$\le M_1\int_0^t\left[1+\int_\Omega u_{2\tau\tau}^2\,dy\right]\left(\sum_{i=1}^n\int_\Omega w_{x_i\tau}^2\,dx\right)d\tau,$$

постоянная M_1 в котором определяется лишь функциями $f(x,t)$, $k(x)$, $\mu(t)$, коэффициентами оператора B и областью Ω. Из этого неравенства и из леммы Гронуолла вытекает, что функции $w_{x_it}(x,t)$, $i=1.\ \ldots,\ n$, $w_{tt}(x,t)$ являются тождественно нулевыми в цилиндре Q функциями. Но тогда и функция $w(x,t)$ будет тождественно нулевой в Q функцией. Другими словами, функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ будут совпадать почти всюду в цилиндре Q. Из совпадения функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ вытекает совпадение функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$. □

Определим множество W_2:

$$W_2=\{v(x,t):\ v(x,t)\in\overset{\circ}{V}_1,\ \Delta v_{tt}(x,t)\in L_2(Q),\ |\psi(t,v)|\le\overline{\gamma}\ \forall\,t\in[0,T]\}.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (9), (22) и (23). Тогда обратная задача (1) – (4) не может иметь в множестве W_2 более одного решения.*

Для доказательства этой теоремы достаточно уравнение для функции $w(x,t)$ умножить на Δw_{tt} и проинтегрировать. Лемма Гронуолла вновь даст тождество $w(x,t)\equiv 0$. Из этого тождества и следует требуемое.

Сделаем несколько замечаний.

Аналогичные результаты о разрешимости обратной задачи нахождения решения $u(x,t)$ и коэффициента $q(t)$ при второй производной по времени, о единственности решений можно получить при замене условия (2) на условие

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}|_{\Gamma\times(0,T)}=0. \qquad (2')$$

Далее, изложенными выше методами можно исследовать разрешимость обратных задач нахождения решения $u(x,t)$ и коэффициента при второй производной по времени с заданием на боковой границе цилиндра Q граничных условий первой или второй краевых задач в более общей ситуации — при замене оператора Лапласа произвольным линейным эллиптическим оператором, в случае функции K, зависящей не только от переменных $x_1, \ldots, x_n$, но и от переменной t.

Разрешимость вспомогательной линейной краевой задачи $(1'_{\varepsilon,v})$, (2), (3) нетрудно установить непосредственно — например, с помощью метода Галеркина с выбором специального базиса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта N 06-01-00439, и Сибирского отделения РАН, интеграционный проект N 48.

Литература

1. Кожанов, А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, №4. – С. 722 – 744.
2. Кожанов, А.И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче / А.И. Кожанов // Мат. заметки. – 2004. – Т. 76, Вып. 6. – С. 840 – 853.
3. Кожанов, А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени / А.И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, №12. – С. 2168 – 2184.
4. Нахушев, А.М. Уравнение математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. школа, 1995.
5. Дженалиев, М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев. – Алматы: Ин-т теор. и прикладной математики, 1995.
6. Якубов С.Я. Линейные дифференциально – операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985.
7. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988.
8. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа /О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967.
9. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
kozhanov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 21 марта 2008 г.