

ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОМ ОПЕРАТОРЕ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ КВАЗИОКРЕСТНОСТЯХ И МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕТВИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.Ю. Леонтьев

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $F(x, \lambda) = 0$ с условием $F(0, 0) \equiv 0$. Оператор $F_x(0, 0)$ не является непрерывно обратимым. Строятся непрерывные решения $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ в открытом множестве S линейного нормированного пространства Λ . Нуль принадлежит границе множества S . Доказанные теоремы существования решений иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: секториальная квазиокрестность, банахово пространство, нелинейное операторное уравнение, линейное нормированное пространство, двухточечная краевая задача, теорема о неявном операторе

Пусть X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (1)$$

где $F : X \oplus \Lambda \rightarrow Y$, $F(0, 0) \equiv 0$, оператор $F_x(0, 0)$ не является непрерывно обратимым. В работе, продолжающей исследования [1], [2], доказано существование непрерывных решений уравнения $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ в секториальной квазиокрестности нуля и дан способ их построения. Результатом работы являются теоремы существования минимальных ветвей максимального порядка малости решений нелинейных уравнений и дополняют результаты [1].

Определение 1. Секториальной квазиокрестностью точки $0 \in \Lambda$ будем называть открытое множество $S \subset \Lambda$, такое что $0 \in \partial S$.

Далее пусть $a(\lambda)$ некоторая функция $a(\lambda) : S \rightarrow R_+$, $a(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Вводится множество $\Omega = \{(x, \lambda) \in X \oplus \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}$, где $r > 0$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть в Ω выполнены условия: 1) оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен по x и λ и имеет частную производную Фреше $F_x(x, \lambda)$, непрерывную по x и λ ; 2) $F(0, 0) = 0$, оператор $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in S$, причем $\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O(\frac{1}{a(\lambda)})$;

3) $\|F_x(x, \lambda) - F_x(0, \lambda)\| \leq L\|x\|$; 4) $\|F(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$.

Тогда найдется число $r_0 \in (0, r)$ и секториальная квазиокрестность нуля $S_0 \subset S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1) имеет в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ непрерывное решение $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$.

Доказательство. Уравнение (1) с помощью замены $x = a(\lambda)V$ приводится к эквивалентному уравнению

$$V = \Phi(V, \lambda), \quad (2)$$

где оператор $\Phi(V, \lambda)$ имеет вид

$$\Phi(V, \lambda) \equiv V - \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0, \lambda) F(a(\lambda)V, \lambda).$$

Нетрудно видеть, что оператор $\Phi(V, \lambda)$ при $\lambda \in S$, $\|V\| \leq r_0 \leq r$ является сжатием. Действительно, применяя формулу конечных приращений Лагранжа и условие 3) теоремы, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| &\leq \|F_x^{-1}(0, \lambda)\| \int_0^1 \|F_x(0, \lambda) - F_x(a(\lambda)(V_2 + \Theta(V_1 - V_2)), \lambda)\| d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq \\ &\leq CL \int_0^1 \{\|V_2\| + \Theta(\|V_1\| + \|V_2\|)\} d\Theta \|V_1 - V_2\| \leq 2CLr_0 \|V_1 - V_2\|, \end{aligned}$$

здесь $C, L - const.$ Выберем $r_0 < \frac{1}{2CL}$, тогда оператор $\Phi(V, \lambda)$ при $\lambda \in S$ и $\|V\| \leq r_0$ будет сжатием.

Более того, при достаточно малых λ в силу оценки 4) оператор $\Phi(V, \lambda)$ переводит шар $\|V\| \leq r_0$ в себя. Действительно,

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda) F(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \frac{C_1}{a^2(\lambda)} \|F(0, \lambda)\|.$$

Далее, в силу условия 4), можно выбрать множество $S_0 \subset S$ так, что при $\forall \lambda \in S_0$ будет выполнено $\frac{C_1}{a^2(\lambda)} \|F(0, \lambda)\| \leq (1 - q)r_0$.

Поэтому на основании принципа сжимающих отображений операторное уравнение (2) имеет единственное решение $V(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Возвращаясь к переменной x получаем, что уравнение (1) имеет малое непрерывное решение, вообще говоря, не единственное. \square

Если $F_x(0, 0) \neq 0$, то следующий результат позволяет в приложениях ослаблять условие 4) теоремы 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 1 и пусть выполнено условие:

5) линейное уравнение $F_x(0, 0)x = F(0, \lambda)$, где $\lambda \in S$, имеет решение $x^*(\lambda)$, причем выполнены оценки $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ и $\|F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda)\| = O(a(\lambda))$ при $\lambda \in S$.

Тогда найдется число $r_0 \in (0, r)$ и секториальная квазиокрестность нуля $S_0 \subset S$ такие, что для каждого $\lambda \in S_0$ уравнение (1) имеет в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ непрерывное решение $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S_0 \ni \lambda \rightarrow 0$.

Доказательство. Уравнение (1) с помощью замены $x = a(\lambda)V$ приводится к эквивалентному уравнению (2).

Сжимаемость оператора $\Phi(V, \lambda)$ вытекает из условий 1)-3). (см. док-во теоремы 1). Покажем, что при достаточно малых $\lambda \in S_0 \subset S$, оператор $\Phi(V, \lambda)$ переводил шар $\|V\| \leq r_0$ в себя. Действительно, в силу условия 5) имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda)\| &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|F_x^{-1}(0, \lambda) F(0, \lambda)\| = \\ &= qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \left\| F_x^{-1}(0, \lambda) \left\{ F_x(0, 0) - F_x(0, \lambda) + F_x(0, \lambda) \right\} x^*(\lambda) \right\| \leq qr_0 + \frac{C}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

В силу оценки из условия 5) при достаточно малых $\lambda \in S_0 \subset S$ выполнится неравенство $\frac{C}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\| \leq (1 - q)r_0$, где $C - const.$ Следовательно, $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$ при $\|V\| \leq r_0$ и $\lambda \in S_0$. \square

Пример 1. Покажем, что уравнение

$$F(x, \lambda) \equiv \int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^3(s) ds - f(t, \lambda) = 0, \quad (6)$$

где $x(t) \in C_{[0,1]}$, $f(t, \lambda) = m(t)\lambda^n$, $m(t) \in C_{[0,1]}$, $n \geq 2$, S – суть проколота окружность нуля, имеет малое непрерывное решение $x_\lambda(t) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Здесь дифференциал Фреше имеет вид

$$F_x(x, \lambda)h = \int_0^1 tsh(s) ds + \lambda h(t) - 3 \int_0^1 x^2(s)h(s) ds,$$

при этом

$$F_x^{-1}(0, \lambda)h = \frac{h(t)}{\lambda} - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 sh(s) ds.$$

Далее, $F_x(0, 0) = 0$ и выполнена оценка

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Условия 1), 2) очевидно выполнены. В силу неравенств

$$\|F_x(x, \lambda)h - F_x(0, \lambda)h\| = \left\| 3 \int_0^1 x^2(s)h(s) ds \right\| \leq 3r\|x\| \|h\|$$

условие 3) тоже выполнено. Если $n > 2$, то выполнено условие 4), и по теореме 1, уравнение имеет малое непрерывное решение $x_\lambda(t) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Если $n = 2$, то условие 4) не выполняется, но будет выполнено условие 5), если $m(t) = \text{const} \cdot t$. Таким образом, для того, чтобы данное уравнение при $n = 2$ имело решение $x_\lambda(t) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, достаточно, чтобы $m(t) = \text{const} \cdot t$.

Пример 2. Покажем, что двухточечная краевая задача для интегро-дифференциальной системы

$$\begin{cases} -y''(t) = x(t), & y(0) = y(1) = 0, & 0 < t < 1 \\ y(t) + \lambda x(t) + t \int_0^1 x(s)y(s) ds + f(t, \lambda) = 0, & \lambda > 0 \end{cases}$$

где $f(t, \lambda) = m(t)\lambda^n$, $m(t) \in L_2[0,1]$, $n \geq 2$, имеет малое непрерывное решение $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \rightarrow (0, 0)$ при $\lambda \rightarrow +0$.

Из первого уравнения системы имеем $y(t) = \int_0^1 G(t, s)x(s) ds$, где

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \\ (1-t)s, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Подставляя полученное выражение для $y(t)$ во второе уравнение получим нелинейное интегральное уравнение:

$$F(x, \lambda) \equiv \int_0^1 G(t, s)x(s) ds + \lambda x(t) + t \int_0^1 x(s) \int_0^1 G(s, z)x(z) dz ds + f(t, \lambda) = 0.$$

Проверим выполнение условий теорем. Очевидно, $F(x, \lambda)$ и $F_x(x, \lambda)$ непрерывные операторы по x и λ . Далее, $F_x(0, 0) = 0$, а оператор $F_x(0, \lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda > 0$, причем выполнена оценка $\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O(\frac{1}{\lambda})$. Таким образом, выполнены условия 1), 2). Условие 3) справедливо ввиду оценки:

$$\begin{aligned} \|F_x(x, \lambda)h - F_x(0, \lambda)h\| &= \left\| t \int_0^1 \int_0^1 G(s, z)(x(s)h(z) + h(s)x(z)) dz ds \right\| \leq \\ &\leq \|t\| \cdot \|x\| \cdot \|h\| \cdot \int_0^1 \int_0^1 2\|G(s, z)\| dz ds \leq L\|x\| \cdot \|h\|. \end{aligned}$$

Условие 4), очевидно, выполнено при $n > 2$. Поэтому, по теореме 1, при $n > 2$ уравнение имеет малое непрерывное решение $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \rightarrow (0, 0)$ при $\lambda \rightarrow +0$. Если $n = 2$, то условие 4) не выполняется, но выполнится условие 5), если $m(t)$ дважды дифференцируемая функция, причем $m(0) = m(1) = 0$. Таким образом, для того, чтобы данное уравнение при $n = 2$ имело решение $\{x_\lambda(t), y_\lambda(t)\} \rightarrow (0, 0)$ при $\lambda \rightarrow +0$ достаточно, чтобы $m(t)$ была дважды дифференцируемой функцией, причем $m(0) = m(1) = 0$.

При проверке условий теорем 1, 2 в ряде приложений можно использовать следующий результат Н.А. Сидорова об обратимости оператор функций в окрестности фредгольмовых точек.

Рассматривается оператор-функция $B - \lambda A$, где B, A — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховых пространствах, с плотными областями определения, $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A)$. Фредгольмов оператор B имеет канонический полный A -жорданов набор (см. [3, гл. 9], [4]). Пусть $\{\varphi_i^{(1)}\}, \{\psi_i^{(1)}\}, i = \overline{1, n}$ — базисы в $\mathcal{N}(B)$ и $\mathcal{N}(B^*)$ соответственно, проекторы

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle z_i^{(j)}, \quad P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \gamma_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(j)},$$

где $B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}, B^*\psi_i^{(j)} = A^*\psi_i^{(j-1)}, \gamma_i^{(j)} = A\varphi_i^{(p_i+1-j)}, z_i^{(j)} = A^*\psi_i^{(p_i+1-j)}$ и ограниченный оператор

$$\Gamma = (B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i^{(j)} \rangle z_i^{(j)})^{-1}$$

соответствуют этому жорданову набору. Известно, что канонические полные наборы существуют и проекторы P и Q могут быть построены, если $\lambda = 0$ — изолированная особая фредгольмова точка, т.е. оператор $B - \lambda A$ непрерывно обратим в окрестности $0 < |\lambda| < \rho$ (или, эквивалентно, $\mu B - A$, в окрестности $R < |\mu| < +\infty$).

Теорема 3. *Оператор $B - \lambda A$ непрерывно обратим в окрестности $0 < |\lambda| < \rho$ тогда и только тогда, когда B имеет канонический полный A -жорданов набор. Причем при $\lambda < \frac{1}{\|\Lambda\Gamma\|}$*

$$(B - \lambda A)^{-1} = \Gamma (I - \lambda A \Gamma)^{-1} (I - Q) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \sum_{s=1}^j \lambda^{-s} \langle \cdot, \psi_i^{(j+1-s)} \rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)}. \quad (11)$$

Теорема дополняет один известный результат о жордановых наборах (см. [3, гл. 9], [4]), так как здесь приводится компактное явное представление обратного оператора

ра $(B - \lambda A)^{-1}$. Доказательство тождества (11) использует $\{P, Q\}$ -сплетаемость операторов B, A, Γ и представление единственного решения уравнения $(B - \lambda A)x = f$ в виде $x = \Gamma y + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} c_{ij} \varphi_i^{(j)}$, где $y = (I - \lambda A \Gamma)^{-1} (I - Q) f$. Вектор C из пространства $R^{p_1 + \dots + p_n}$ определяется из системы линейных алгебраических уравнений с обратимой блочно-диагональной матрицей.

Следствие 1. Оценка $\|(B - \lambda A)^{-1}\| \sim \frac{C}{|\lambda|^p}$ при $\lambda \rightarrow 0$ (соответственно, оценка $\|(\mu B - A)^{-1}\| \sim C |\mu|^{p-1}$ при $\mu \rightarrow +\infty$) выполнена тогда и только тогда, когда $p = \max(p_1, \dots, p_n)$.

Замечание 1. $p = 1$ тогда и только тогда, когда $\det \left[\langle A \varphi_i^{(1)}, \psi_k^{(1)} \rangle \right]_{i,k=1}^n \neq 0$.

Автор благодарен профессору Н.А. Сидорову за постановку задачи и ценные замечания.

Литература

1. Сидоров, Н.А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н.А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – Вып. 14. – С. 161 – 164.
2. Леонтьев, Р.Ю. Теорема о неявном операторе в секториальных областях / Р.Ю. Леонтьев // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». – Иркутск, 2007. – С. 20.
3. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. – М: Наука, 1969.
4. Логинов, Б.В. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления / Б.В. Логинов, Ю.В. Русаков // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и приложения. – Ташкент, 1978. – С. 133 – 148.
5. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М: Физматлит, 2002.

Кафедра математического анализа,
Иркутский государственный университет
lev_roma@bk.ru

Поступила в редакцию 28 февраля 2008 г.