УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ ОСКОЛКОВА

Н.А. Манакова

ON A MODEL OF OPTIMAL CONTROL OF THE OSKOLKOV EQUATION

N.A. Manakova

Найдены достаточные и необходимые условия существования оптимального управления решениями задачи Шоуолтера – Сидорова уравнения, моделирующего эволюцию давления вязкоупругой жидкости. Абстрактные результаты подтверждены численными экспериментами.

Ключевые слова: уравнение Осколкова, уравнения соболевского типа, задача оптимального управления

Sufficient and nesessary conditions of the optimal control existence of solutions to the Showalter – Sidorov problem of the equation modeling evolution of the visco-elastic fluid pressure are found. Abstract results are confirmed by numerical experiments.

Keywords: the Oskolkov equation, Sobolev type equations, optimal control problem

Введение

Неклассическое уравнение

$$(\lambda - \Delta)x_t = \alpha\Delta x - |x|^{p-2}x + f \tag{1}$$

моделирует эволюцию давления ($x = x(s,t)$) вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде [1]. Параметры $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругость и вязкость жидкости, причем экспериментально было отмечено, что отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу модели [2]. Свободный член $f = f(s,t)$ соответствует внешней нагрузке. В целом уравнение показывает зависимость давления вязкоупругой несжимаемой жидкости (например, высокопарафинового сорта нефти), фильтрующейся в пористом пласте, от внешней нагрузки (например, давления воды, нагнетаемой по скважинам в пласт).

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0,\ s \in \Omega; \tag{2}$$

$$x(s,t) = 0,\ (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{3}$$

для уравнения (1) в цилиндре $\Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Нелокальные задачи для уравнения (1) изучались в [3] при $\lambda \in \mathbb{R}_+$. При $\lambda \in \mathbb{R}$ задача (1) – (3) изучалась в [4], в которой показано, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ фазовым пространством уравнения (1) является простое гладкое C^1-многообразие. Однако эти результаты не очень удобны при численных расчетах, поэтому в данной статье мы воспользуемся иным подходом, основанным на методе Галеркина – Петрова – Фаэдо.

В подходящих функциональных пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ задача (2), (3) для уравнения (1) редуцируется к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{4}$$

для полулинейного операторного уравнения соболевского типа

$$L\,\dot{x} + M(x) = u. \tag{5}$$

Нас интересует оптимальное управление

$$J(x, u) \to \min \tag{6}$$

решениями задачи (4) – (6). Здесь $J(x, u)$ – некоторый, специальным образом построенный, функционал штрафа; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (1) – (3) дает возможность минимизировать штрафные санкции при добыче нефти, выбрав внешнюю нагрузку таким образом, чтобы поддерживать необходимое давление жидкости в пласте. Линейная задача оптимального управления (т. е. оператор $M : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ линен и непрерывен) рассматривалась в монографии [5, гл. 7]. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации (1) – (3), (6) впервые была рассмотрена в [6].

Статья организована следующим образом. В п. 1 доказано существование единственного решения задачи (4) для уравнения (5) методом Галеркина. С использованием идеологии [7], [8] находятся достаточные условия разрешимости задачи (4) – (6). Далее в п. 2 мы сводим задачу (2), (3) для уравнения (1) к задаче (4) для уравнения (5) и приводим необходимые условия экстремума для задачи (4) – (6) в терминах сопряженной задачи. В п. 3 представлены результаты работы программ, вычисляющих оптимальное управление для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации в случае $n = 2, p = 2$ или $p = 4$.

1. Задача оптимального управления

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальная (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пара рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \tag{7}$$

плотны и непрерывны. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ – линейный, самосопряженный, неотрицательно определенный фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле $\mathcal{H}$) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathfrak{B}$. Пусть далее $M \in C^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ – s-монотонный (т. е. $\langle M'_y(y)x, x \rangle > 0$, $\forall x, y \in \mathfrak{B} \setminus \{0\}$) и p-коэрцитивный (т. е. $\langle M(x), x \rangle \geq C_M \|x\|^l$ и $\|M(x)\|_* \leq C^M \|x\|^{p-1}$ при некоторых константах $C_M, C^M \in \mathbb{R}_+$ и $l, p \in [2, +\infty), r \in \mathbb{N}$ и любом $x \in \mathfrak{B}$, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы в пространстве $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$ соответственно) оператор [9].

Прежде всего сделаем ряд замечаний относительно терминологии. Отметим, что для гладких операторов $M : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}^*$ из сильной монотонности следует s-монотонность, а из s-монотонности – строгая монотонность. Далее оператор $M : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}^*$ назовем *сильно коэрцитивным*, если

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{\langle M(u+v), v \rangle}{\|v\|} = +\infty \; \forall u \in \mathfrak{B}.$$

Очевидно, что сильно коэрцитивный оператор коэрцитивен. Оказывается, что из p-коэрцитивности следует сильная коэрцитивность. Доказательства этих фактов можно найти в [9].

Рассмотрим задачу Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{8}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\,\dot{x} + M(x) = f. \tag{9}$$

В виду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{B} \supset \ker L \equiv \operatorname{coker} L \subset \mathfrak{B}^*$. Очевидно, $\mathfrak{B}^* = \operatorname{coker} L \oplus \operatorname{im} L$. Обозначим через Q проектор вдоль $\operatorname{coker} L$ на $\operatorname{im} L$ и сделаем допущение

$$(\mathbb{I} - Q)f \text{ не зависит от } t \in (0,T). \tag{10}$$

Тогда если $x = x(t), t \in [0,T]$ – решение уравнения (9), то оно с необходимостью лежит во множестве

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{B} : (\mathbb{I} - Q)M(x) = (\mathbb{I} - Q)f\}, & \text{если} \quad \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{B}, \quad \text{если} \quad \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в $\mathfrak{B}$, поэтому построим галеркинские приближения решения задачи (8), (9) в виде

$$x^m(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\varphi_k, \; m > \dim\ker L,$$

где коэффициенты $a_k = a_k(t)$, $k = 1, ..., m$, определяются решением следующей задачи:

$$\langle Lx_t^m, \varphi_k\rangle + \langle M(x^m), \varphi_k\rangle = \langle f, \varphi_k\rangle\,, \tag{11}$$

$$\langle x^m(0) - x_0, \varphi_k\rangle = 0, \; k = 1, ..., m. \tag{12}$$

Уравнения (11) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $\mathfrak{B}^m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$, $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$.

Лемма 1. [9] *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}$ и $m > \dim\ker L$ существует единственное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{B}^m)$ задачи (11), (12).*

Теорема 1. [9] *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$ таких, что выполнено (10), существует единственное решение $x \in L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L) \cap L_p(0,T;\mathfrak{M})$ задачи (8), (9).*

Фиксируем $T \in \mathbb{R}_+$. Построим пространство $\mathfrak{U} = \{u \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*) : (\mathbb{I} - Q)u(t) = 0, \; t \in (0,T)\}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, и определим в пространстве $\mathfrak{U}$ замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Рассмотрим задачу оптимального управления (4) – (6), где функционал стоимости задается формулой

$$J(x,u) = \frac{1}{p}\int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|^p_{\mathfrak{B}}\,dt + \frac{N}{q}\int_0^T \|u(t)\|^q_{\mathfrak{B}^*}\,dt, \tag{13}$$

$z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Определение 1. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L) \cap L_p(0,T;\mathfrak{M}) \times \mathfrak{U}_{ad}$ называют *решением задачи* (4) – (6), если $J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{u \in U_d} J(x,u)$, и $(\tilde{x}, \tilde{u})$ удовлетворяет уравнению $L\,\dot{x} + M(x) = u$; вектор $\tilde{u}$ называют *оптимальным управлением* в задаче (4) – (6).

Теорема 2. [6] *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}, T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (4), (5), (13).*

2. Уравнение Осколкова

Редуцируем задачу (1) – (3) к задаче (4), (5). Для этого положим $\mathfrak{B} =\overset{0}{W}{}_2^1$, $\mathcal{H} = L_2$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Заметим, что в силу теоремы вложения Соболева $\overset{0}{W}{}_2^1 \hookrightarrow L_p$ непрерывно при $n \geq 3$ и $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$. Положим пространство $\mathfrak{B}^* = W_2^{-1}$. Операторы L и M определим формулами:

$$\langle Lx, y\rangle = \int_\Omega (\lambda xy + \nabla x \nabla y) ds,$$

$$\langle Mx, y\rangle = \int_\Omega (\alpha \nabla x \nabla y + |x|^{p-2} xy) ds,$$

где $x, y \in \mathfrak{B}, \langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в L^2. (Заметим, что всюду выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам). Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta$ в области Ω, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности.

Лемма 2. [6] *(i) При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор L самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве $\mathfrak{B}$.*

(ii) При всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 4/(n-2)+2$ оператор $M \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s-монотонен и p-коэрцитивен.

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, & \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \langle M(x), \varphi_1\rangle = \langle y, \varphi_1 \rangle\}, & \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Теорема 3. [6] *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(0, T; \mathfrak{B}^*)$ таких, что выполнено (10), существует единственное решение $x \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{M})$ задачи (1) – (3).*

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации. В цилиндре $\mathbb{Q} = \Omega \times (0, T)$ зададим функционал качества

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|x - z_d\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} dt + \frac{N}{2} \int_0^T \|u\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} dt, \tag{14}$$

и выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_2(0, T; W_2^{-1})$ – замкнутое, выпуклое множество, для элементов которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u(t) = 0$. Из теоремы 2 и теоремы 3 непосредственно вытекает

Теорема 4. [6] *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$ тогда существует оптимальное управление в задаче (1) – (3), (14).*

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями задачи (1) – (3).

Теорема 5. *[6] Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$ $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 4/(n-2) + 2$, если u – оптимальное управление задачи (14), то существует вектор $y \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{B})$ такой,* *что*

$$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u,$$

$$(-\lambda + \Delta)y_t - \alpha\Delta y + (p-1)|x|^{p-2}y = (-\Delta)(x(u) - z_d), (s,t) \in Q,$$

$$x(s,t) = y(s,t) = 0,\ (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0,\ (-\lambda + \Delta)y(s,T) = 0,\ s \in \Omega,$$

$$\int\limits_{\mathbb{Q}} (y + N(-\Delta)^{-1}(u))(v - u)dsdt \geq 0\,\forall v \in U_{ad}.$$

3. Приложение

Рассмотрим уравнение Осколкова нелинейной фильтраци при $n = 2$

$$(\lambda - \Delta)x_t(s_1, s_2, t) = \alpha\Delta x(s_1, s_2, t) -$$

$$|x(s_1, s_2, t)|^{p-2}x(s_1, s_2, t) + u(s_1, s_2, t). \tag{15}$$

Зададим область $\Omega = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_1 \leq \pi, 0 \leq s_2 \leq \pi\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\lambda - \Delta)(x(s_1, s_2, 0) - x_0(s_1, s_2)) = 0,\ (s_1, s_2) \in \Omega; \tag{16}$$

$$x(s_1, s_2, t) = 0,\ (s_1, s_2, t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{17}$$

для уравнения (15). Решение начально-краевой задачи (15) – (17) будем искать в виде галеркинской суммы

$$x^m(s_1, s_2, t) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} x_{kl}(t)\varphi_{kl},\ m > \dim\ker(\lambda - \Delta), \tag{18}$$

где $\{\varphi_{kl}\}$ – множество всех решений краевой задачи на собственные значения

$$(\lambda - \Delta)x(s_1, s_2) = 0,\ (s_1, s_2) \in \Omega;$$

$$x(0, s_2) = x(\pi, s_2) = x(s_1, 0) = x(s_1, \pi) = 0.$$

Хорошо известно, что эта спектральная задача разрешима для счетного набора собственных чисел λ_{kl}, причем функции $\{\varphi_{kl}\}$ образуют ортонормальную с весом $4\pi^{-2}$ систему функций

$$4\pi^{-2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \varphi_{kl}\varphi_{ij}ds_1ds_2 =< \varphi_{kl}, \varphi_{ij} >= \begin{cases} 1,\ l = i, k = j; \\ 0,\ l \neq i, k \neq j. \end{cases}$$

Легко подсчитать, что $\varphi_{kl} = \varphi_{kl}(s_1, s_2) = \sin(ks_1)\sin(ls_2)$, а $\lambda_{kl} = -k^2 - l^2$. В силу теоремы 3 для того, чтобы существовало единственное решение задачи (15) – (17), необходимо, чтобы $\lambda \geq -2$.

Все вычисления производились в вычислительной среде Maple 9.0. Для того, чтобы были выполнены условия теоремы 4, возьмем, например, $m = 2$, $p = 2$, $\lambda = -2, \alpha = 3$, и $u(s_1, s_2, t) = u(t)\sin(2s_1)\sin(2s_2)$, чтобы $(\mathbb{I} - Q)u(s_1, s_2, t) = 0$, $t \in (0,T)$. Тогда, умножив скалярно (15) на функции φ_{kl}, $l = k = 1..2$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_{11}(t) = 0, \\ 3\,\dot{x}_{21}\,(t) + 10x_{21}(t) = 0, \\ 3\,\dot{x}_{12}\,(t) - 8x_{12}(t) = 0, \\ 6\,\dot{x}_{22}\,(t) + x_{22}(t) = u(t). \end{cases} \tag{19}$$

Построим функционал стоимости (14), для этого зададим, например, $z_d(s_1, s_2) = \sin(s_1) + \sin(s_2)$ и получим

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi [((x(s_1,s_2,t) - z_d(s_1,s_2))'_{s_1})^2 +$$

$$((x(s_1,s_2,t) - z_d(s_1,s_2))'_{s_2})^2]ds_1ds_2dt +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi [u(s_1,s_2,t)(-\Delta)^{-1}u(s_1,s_2,t)]ds_1ds_2dt =$$

$$\int_0^T [-4\pi x_{11}(t) + 2\pi^2 x_{22}^2(t) + \frac{5}{4}\pi^2(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) +$$

$$\frac{1}{2}\pi^2 x_{11}^2(t) + \pi^2 + \frac{1}{32}\pi^2 u(t)^2]dt. \tag{20}$$

Заметим, что $(-\Delta)^{-1}(\sin(ks_1)\sin(ls_2)) = \frac{1}{k^2+l^2}\sin(ks_1)\sin(ls_2)$.

Для нахождения оптимального управления задачи (19), (20) с условиями $T = 1$, $x_{11}(0) = 0$, $x_{21}(0) = 2$, $x_{12}(0) = 2$, $x_{22}(0) = 2$, $u(0) = 0$, $u(T) = 1$ (для определенности) была разработана программа, которая, опираясь на метод Ритца, ищет оптимальное управление в виде

$$u(t,N) : (t,N) \longmapsto u(0) + \frac{(u(T) - u(0))t}{T} + \sum_{n=1}^{N} c_n \sin(\frac{n\pi t}{T}).$$

Для задачи (15) – (17), (20) при $N = 4$ получим

$$u(s_1,s_2,t) = [t - 7,695362486\sin(\pi t) - 3,674132956\sin(2\pi t) -$$

$$2,940115757\sin(3\pi t) - 1,904765651\sin(4\pi t)]\sin(2s_1)\sin(2s_2).$$

Приведем необходимое условие существования оптимального управления при $m = 2, p = 4$, $\lambda = -2, \alpha = 3$, и $u(s_1,s_2,t) = u(t)\sin(2s_1)\sin(2s_2)$. Умножив скалярно (15) на функции φ_{kl}, $k = 1..2$, $l = 1..2$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{9}{8}x_{11}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{21}(t)x_{12}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{11}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{11}(t)x_{22}^2(t) = 0, \\ 3\,\dot{x}_{21}\,(t) + \frac{9}{8}x_{21}(t)(x_{22}^2(t) + x_{11}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{12}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{21}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{21}(t)x_{12}^2(t) + 9x_{21}(t) = 0, \\ 3\,\dot{x}_{12}\,(t) + \frac{9}{8}x_{12}(t)(x_{22}^2(t) + x_{11}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{21}(t)x_{22}(t) + \frac{9}{16}x_{12}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{12}(t)x_{21}^2(t) - 9x_{12}(t) = 0, \\ 6\,\dot{x}_{22}\,(t) + \frac{9}{8}x_{22}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}x_{11}(t)x_{12}(t)x_{21}(t) + \frac{9}{16}x_{22}^3(t) + \\ \frac{3}{4}x_{22}(t)x_{11}^2(t) = u(t). \end{cases} \tag{21}$$

Построим сопряженную задачу к задаче (15) – (17) при $p = 4$ и получим

$$(-\lambda + \Delta)y_t(s_1, s_2, t) - \alpha\Delta y(s_1, s_2, t) + 3x^2(s_1, s_2, t)y(s_1, s_2, t)$$
$$= (-\Delta)(x(s_1, s_2, t) - z_d(s_1, s_2)), (s_1, s_2, t) \in Q, \quad (22)$$
$$y(s, t) = 0,\ (s_1, s_2, t) \in \partial\Omega \times (0, T),$$
$$(\lambda - \Delta)y(s, T) = 0,\ (s_1, s_2) \in \Omega. \quad (23)$$

Умножив скалярно (22) на функции φ_{kl}, $k = 1..2$, $l = 1..2$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} 6\,\dot{y}_{11}\,(t) + \frac{9}{8}y_{11}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t)) + \frac{3}{2}(x_{12}(t)x_{22}(t)y_{21}(t)+ \\ x_{21}(t)x_{12}(t)y_{22}(t) + x_{21}(t)x_{22}(t)y_{12}(t) + x_{11}(t)x_{22}(t)y_{22}(t))+ \\ \frac{9}{4}x_{11}(t)(x_{21}(t)y_{21}(t) + x_{12}(t)y_{12}(t))+ \\ \frac{27}{16}x_{11}^2(t)y_{11}(t) + \frac{3}{4}y_{11}(t)x_{22}^2(t) = \frac{2(-4+x_{11}(t)\pi)}{\pi}, \\ 18\,\dot{y}_{21}\,(t) + \frac{3}{4}x_{12}^2(t)y_{21}(t) + \frac{9}{8}y_{21}(t)(x_{11}^2(t) + x_{22}^2(t))+ \\ \frac{3}{2}(x_{12}(t)x_{11}(t)y_{22}(t) + x_{12}(t)x_{22}(t)y_{11}(t)+ \\ x_{11}(t)x_{22}(t)y_{12}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{12}(t))+ \\ \frac{9}{4}x_{21}(t)(x_{11}(t)y_{11}(t) + x_{22}(t)y_{22}(t)) + \frac{27}{16}y_{21}(t)x_{21}^2(t) = 5x_{21}(t), \\ 18\,\dot{y}_{12}\,(t) + \frac{3}{4}x_{21}^2(t)y_{12}(t) + \frac{9}{8}y_{12}(t)(x_{11}^2(t) + x_{22}^2(t))+ \\ \frac{3}{2}(x_{21}(t)x_{11}(t)y_{22}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{21}(t)+ \\ x_{11}(t)x_{22}(t)y_{21}(t) + x_{21}(t)x_{22}(t)y_{11}(t))+ \\ \frac{9}{4}x_{12}(t)(x_{11}(t)y_{11}(t) + x_{22}(t)y_{22}(t)) + \frac{27}{16}y_{12}(t)x_{12}^2(t) = 5x_{12}(t), \\ 30\,\dot{y}_{22}\,(t) + \frac{3}{4}x_{11}^2(t)y_{22}(t) + \frac{9}{8}y_{22}(t)(x_{12}^2(t) + x_{21}^2(t))+ \\ \frac{3}{2}(x_{11}(t)x_{21}(t)y_{12}(t) + x_{11}(t)x_{22}(t)y_{11}(t)+ \\ x_{11}(t)x_{12}(t)y_{21}(t) + x_{21}(t)x_{12}(t)y_{11}(t))+ \\ \frac{9}{4}x_{22}(t)(x_{12}(t)y_{12}(t) + x_{21}(t)y_{21}(t)) + \frac{27}{16}y_{22}(t)x_{22}^2(t) = 8x_{22}(t). \end{array}\right. \quad (24)$$

По теореме 5, если $u(s_1, s_2, t) = u(t)\sin(2s_1)\sin(2s_2)$ – оптимальное управление, то решения систем (21), (24) должны удовлетворять следующему условию

$$\int_0^T [\frac{1}{32}\pi^2(u^2(t) - u(t)v(t)) + \frac{1}{4}\pi^2 y22(t)(v(t) - u(t))]dt \geq 0$$

$$\forall v(s_1, s_2, t) = v(t)\sin(2s_1)\sin(2s_2) \in \mathfrak{U}_{ad}.$$

Замечание 1. При помощи пакета Maple системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21), (24) при условии $x_{11}(0) = x_{11}^0, x_{21}(0) = x_{21}^0, x_{12}(0) = x_{12}^0, x_{22}(0) = x_{22}^0, y_{11}(T) = 0, y_{22}(T) = 0, y_{11}(T) = 0, y_{12}(T) = 0$ разрешимы численно.

Автор выражает большую благодарность своему научному руководителю, проф. Г.А. Свиридюку за плодотворные дискуссии.

Литература

1. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. - 1991.- Т. 198.- С. 31 - 48.

2. Амфилохиев, В.Б. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева // Тр. Лен. кораблестр. ин-та. - 1975. - Т. 96. - С. 3 - 9.

3. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для уравнений фильтрации неньютоновых жидкостей в пористых средах / А.П. Осколков, М.М. Ахматов, Р.Д. Щадиев // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1991. – Т. 189. – С. 82 – 100.

4. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 36 – 41.

5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Utrecht; Boston: VSP, 2003.

6. Манакова, Н. А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 438, № 9. – С. 1185 – 1192.

7. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987.

8. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999.

9. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 55 – 61.

10. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.

Кафедра уравнений математической физики,
Южно-Уральский государственный университет
mymmi@ems.ru

Поступила в редакцию 22 сентября 2008 г.