УДК 519.6, 517.9

ПОЛУЛОКАЛЬНЫЕ СГЛАЖИВАЮЩИЕ СПЛАЙНЫ СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ

Д.А. Силаев, Ж.Г. Ингтем

SEMILOCAL SMOOTHIHG SPLINES OF SEVENTH DEGREE

D.A. Silaev, J.G. Ingtem

Полулокальные сглаживающие сплайны или S-сплайны были введены Д.А. Силаевым. Ранее рассматривались и применялись сплайны 3-й и 5-й степени. Настоящая работа посвящена построению сплайнов 7-й степени, доказаны теоремы существования и единственности, установлены условия устойчивости таких сплайнов.

Ключевые слова: аппроксимация, сплайн, численные методы

Semilocal smoothing splines or S-splines were initiated by D.A. Silaev. Earlier there were considers and applied the splines of third and fifth degree. This work is devoted to seventh degree splines construction. Uniqueness and existence theorems are proved. Stability and convergence conditions for these splines are established.

Keywords: an approximation, a spline, numerical methods

Введение

Рассматривается задача восстановления функции с помощью полулокального сглаживающего сплайна или S-сплайна, состоящего из полиномов седьмой степени. Здесь будут рассмотрены S-сплайны разных порядков гладкости: классов C^0, C^1, C^2, C^3 и C^4.

Заданные значения приближаемой функции разбиваются на несколько групп, каждая группа содержит определенное количество последовательных значений функции. Условия гладкой склейки определяют коэффициенты при младших степенях полинома в каждой группе. Коэффициенты полинома при старших степенях определяются методом наименьших квадратов по соответствующей группе. Начальные условия задаются значениями функции и её производных в начальной точке в непериодическом случае, либо условием периодичности сплайна на отрезке определения.

1. Построение S-сплайна седьмой степени

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ равномерную сетку $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$ с узлами $x_k = a + kh$, $k = 0,1,\ldots,K$, где $h = \dfrac{b-a}{K}$ —шаг сетки. Разобьем отрезок $[a,b]$ на группы. Для этого введем еще одну равномерную сетку $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$ с узлами $\xi_l = a+lH$, где $H = mh$, $m \in \mathbb{N}$, $l = 0,1,\ldots,L$. Таким образом, при переходе из одной группы в другую, будем осуществлять сдвиг системы координат и рассматривать каждый l–й полином на отрезке $[0,H]$.

Пусть $y = (y_0, y_1, \ldots, y_K) \in \mathbb{R}^{K+1}$ значения приближаемой функции на сетке $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$.

Рассмотрим случаи I – V, когда S-сплайн принадлежит классу C^0, C^1, C^2, C^3,C^4.

В дальнейшем будем рассматривать случай III, а именно, будем строить дважды непрерывно дифференцируемый полулокальный S-сплайн (построение остальных сплайнов будут производиться аналогичным образом).

Обозначим через

$$P_S^7 = \{u : u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7\}$$

множество полиномов 7-й степени с фиксированными коэффициентами a_0, a_1, a_2 .(Здесь зафиксированы только три коэффициента, так как наш сплайн класса C^2. В случаях I, II, IV и V фиксированными будут соответственно коэффициенты a_0; a_0 и a_1; a_0, a_1, a_2 и a_3; a_0, a_1, a_2, a_3 и a_4.)

Рассмотрим функционал $\Phi^l(u) = \sum\limits_{k=0}^{M} \big(u(\xi_l + kh) - y_{ml+k}\big)^2$. Будем искать в P_S^7 такой полином g_l, который минимизирует функционал Φ^l

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M}(u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \to \min(a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$$

и удовлетворяет условиям гладкой склейки:

$$g_l(0) = a_0^l = g_{l-1}(H), \qquad g_l'(0) = a_1^l = g_{l-1}'(H), \qquad \frac{g_l''(0)}{2} = a_2^l = \frac{g_{l-1}''(H)}{2}, \tag{1}$$

причем $g_0(0) = a_0^0 = g_{L-1}(H)$, $g_0'(0) = a_1^0 = g_{L-1}'(H)$, $\dfrac{g_0''(0)}{2} = a_2^l = \dfrac{g_{L-1}''(H)}{2}$ в периодическом случае.

В непериодическом случае задаются начальные условия [1] : $a_0^0 = y_0$, $a_1^0 = y_0'$, $a_2^0 = \dfrac{y_0''}{2}$.

Здесь $M + 1$ – количество точек осреднения, т.е. необходимые точки для построения полинома g_l, а $m+1$ – количество точек, входящих в область определения полинома g_l. Будем предполагать, что значения заданной функции y_k, $k = 0, 1, \ldots, K$ известны с некоторой погрешностью и с уменьшением шага точность измерения будет увеличиваться, то есть если функция $f \in C^8[a, b]$ задана на сетке $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$ значениями y_k, то $|y_k - f(x_k)| \leqslant Ch^8$.

Определение 1. *S-сплайном седьмой степени будем называть функцию $S_{m,M}^7$, которая совпадает с полиномом седьмой степени g_l на отрезке $[\xi_l, \xi_{l+1}]$.*

---

[1] Если функция задана таблицей, то $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(p)}$ можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации, например

$$y_0^{(r)} = \left.\frac{d^{(r)}N_n(x)}{dx^r}\right|_{x=0} + O(h^{n+1-r}) \text{ при } r = 1, \ldots, p,$$

где $N_n(x)$– интерполяционный полином степени n, построенный по значениям $y_0, y_1, \ldots, y_n$. В форме Ньютона этот полином имеет вид: $N_n(x) = y_0 + \sum_{s=1}^{n} P_s(y_0, y_1, \ldots, y_s)x(x-h)\ldots(x-(s-1)h)$, где $P_s(y_0, y_1, \ldots, y_s) = \sum_{j=0}^{s} C_s^j y_{s-j}/(s!h^s)$ – s-я разделенная разность.

При $n = 8$ мы получаем формулы вида:

$$\begin{aligned}
y_0' = &-\frac{1}{840h}[2283y_0 - 6720y_1 + 11760y_2 - 15680y_3 + 14700y_4 - \\
&-9408y_5 + 3920y_6 - 960y_7 + 105y_8] + O(h^8), \\
y_0'' = &\frac{1}{5040h^2}[29531y_0 - 138528y_1 + 312984y_2 - 448672y_3 + \\
&+435330y_4 - 284256y_5 + 120008y_6 - 29664y_7 + 3267y_8] + O(h^7).
\end{aligned}$$

Будем минимизировать функционал Φ^l по коэффициентам a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 (в случаях I, II, IV и V минимизируем по коэффициентам $a_1, \ldots, a_7$; $a_2, \ldots, a_7$; $a_4, \ldots, a_7$ и $a_5, \ldots, a_7$ соответственно).

Для этого продифференцируем Φ_g^l по этим коэффициентам и приравняем результат к нулю. Получим:

$$\begin{cases} a_3^l h^3 S_6 + a_4^l h^4 S_7 + a_5^l h^5 S_8 + a_6^l h^6 S_9 + a_7^l h^7 S_{10} = c_1^l \\ a_3^l h^3 S_7 + a_4^l h^4 S_8 + a_5^l h^5 S_9 + a_6^l h^6 S_{10} + a_7^l h^7 S_{11} = c_2^l \\ a_3^l h^3 S_8 + a_4^l h^4 S_9 + a_5^l h^5 S_{10} + a_6^l h^6 S_{11} + a_7^l h^7 S_{12} = c_3^l \\ a_3^l h^3 S_9 + a_4^l h^4 S_{10} + a_5^l h^5 S_{11} + a_6^l h^6 S_{12} + a_7^l h^7 S_{13} = c_4^l \\ a_3^l h^3 S_{10} + a_4^l h^4 S_{11} + a_5^l h^5 S_{12} + a_6^l h^6 S_{13} + a_7^l h^7 S_{14} = c_5^l \end{cases}, \tag{2}$$

где

$$S_j = \sum_{k=0}^{M} k^j, \quad c_j^l = \sum_{k=0}^{M} \left[\left(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - a_2^l (hk)^2 \right) k^{2+j} \right]. \tag{3}$$

Сделаем следующую замену переменных $\tilde{a}_i = a_i h^i$, $i = 0, 1, \ldots, 7$. Из (2) и (3) получаем систему уравнений для определения коэффициентов при старших степенях:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^l S_3 + \tilde{a}_2^l S_4 + \tilde{a}_2^l S_5 + \tilde{a}_3^l S_6 + \tilde{a}_4^l S_7 + \tilde{a}_5^l S_8 + \tilde{a}_6^l S_9 + \tilde{a}_7^l S_{10} = P_1^l \\ \tilde{a}_0^l S_4 + \tilde{a}_2^l S_5 + \tilde{a}_2^l S_6 + \tilde{a}_3^l S_7 + \tilde{a}_4^l S_8 + \tilde{a}_5^l S_9 + \tilde{a}_6^l S_{10} + \tilde{a}_7^l S_{11} = P_2^l \\ \tilde{a}_0^l S_5 + \tilde{a}_2^l S_6 + \tilde{a}_2^l S_7 + \tilde{a}_3^l S_8 + \tilde{a}_4^l S_9 + \tilde{a}_5^l S_{10} + \tilde{a}_6^l S_{11} + \tilde{a}_7^l S_{12} = P_3^l \\ \tilde{a}_0^l S_6 + \tilde{a}_2^l S_7 + \tilde{a}_2^l S_8 + \tilde{a}_3^l S_9 + \tilde{a}_4^l S_{10} + \tilde{a}_5^l S_{11} + \tilde{a}_6^l S_{12} + \tilde{a}_7^l S_{13} = P_4^l \\ \tilde{a}_0^l S_7 + \tilde{a}_2^l S_8 + \tilde{a}_2^l S_9 + \tilde{a}_3^l S_{10} + \tilde{a}_4^l S_{11} + \tilde{a}_5^l S_{12} + \tilde{a}_6^l S_{13} + \tilde{a}_7^l S_{14} = P_5^l \end{cases}, \tag{4}$$

где $P_j^l = \sum\limits_{k=0}^{M} y_{ml+k} k^{2+j}, \quad j = 1, \ldots, 5.$

Уравнения гладкой склейки (1) дают нам следующую систему:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^{l-1} + m\tilde{a}_1^{l-1} + m^2\tilde{a}_2^{l-1} + m^3\tilde{a}_3^{l-1} + m^4\tilde{a}_4^{l-1} + m^5\tilde{a}_5^{l-1} + m^6\tilde{a}_6^{l-1} + m^7\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_0^l \\ \tilde{a}_1^{l-1} + 2m\tilde{a}_2^{l-1} + 3m^2\tilde{a}_3^{l-1} + 4m^3\tilde{a}_4^{l-1} + 5m^4\tilde{a}_5^{l-1} + 6m^5\tilde{a}_5^{l-1} + 7m^6\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_1^l \\ \tilde{a}_2^{l-1} + 3m\tilde{a}_3^{l-1} + 6m^2\tilde{a}_4^{l-1} + 10m^3\tilde{a}_5^{l-1} + 15m^4\tilde{a}_6^{l-1} + 21m^5\tilde{a}_7^{l-1} = \tilde{a}_2^l \end{cases}. \tag{5}$$

В дальнейшем волну над переменной a_i^l , $i = 0, 1, \ldots, 7$ будем опускать.

Системы уравнений (4) и (5) составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения всех коэффициентов полиномов S-сплайна. Запишем эту систему в матричном виде. Введем следующие обозначения:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} S_3 & \ldots & S_5 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_7 & \ldots & S_9 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} S_6 & \ldots & S_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{10} & \ldots & S_{14} \end{Vmatrix},$$

$$B_0 = \begin{Vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} m^3 & m^4 & m^5 & m^6 & m^7 \\ 3m^2 & 4m^3 & 5m^4 & 6m^5 & 7m^6 \\ 3m & 6m^2 & 10m^3 & 15m^4 & 21m^5 \end{Vmatrix}.$$

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ \vdots \\ P_5^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ a_2^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_3^l \\ a_4^l \\ \vdots \\ a_7^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \ldots, L-1. \tag{6}$$

E и 0 – единичная и нулевая матрицы.

Систему для определения коэффициентов S-сплайна записываем в виде следующей блочной матрицы, клеточные строки которой состоят по очереди из трех и пяти строк (аналогично столбцы):

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & 0 & \dots & B_0 & B_1 \\ A_0 & A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_0 & B_1 & -E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P^0 \\ 0 \\ P^1 \\ 0 \\ \vdots \\ P^{L-1} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Матрицу этой системы обозначим через G [2].

[2]В случае I клетки матрицы G имеют вид:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_7 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} S_2 & \dots & S_8 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_8 & \dots & S_{14} \end{Vmatrix}, \quad B_0 = \begin{Vmatrix} 1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} m & \dots & m^7 \end{Vmatrix}.$$

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ \vdots \\ P_7^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_1^l \\ \vdots \\ a_7^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \dots, L-1.$$

В случае II иммеем:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} S_2 & S_3 \\ \vdots & \vdots \\ S_7 & S_8 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} S_4 & \dots & S_9 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_9 & \dots & S_{14} \end{Vmatrix}, \quad B_0 = \begin{Vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} m^2 & \dots & m^7 \\ 2m & \dots & 7m^6 \end{Vmatrix}.$$

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ \vdots \\ P_6^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_2^l \\ \vdots \\ a_7^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \dots, L-1.$$

В случае IV имеем:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} S_4 & \dots & S_7 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_7 & \dots & S_{10} \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} S_8 & \dots & S_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{11} & \dots & S_{14} \end{Vmatrix},$$

$$B_0 = \begin{Vmatrix} 1 & m & m^2 & m^3 \\ 0 & 1 & 2m & 3m^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} m^4 & m^5 & m^6 & m^7 \\ 4m^3 & 5m^4 & 6m^5 & 7m^6 \\ 6m^2 & 10m^3 & 15m^4 & 21m^5 \\ 4m & 10m^2 & 20m^3 & 35m^4 \end{Vmatrix}.$$

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ \vdots \\ P_4^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \\ \vdots \\ a_3^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_4^l \\ \vdots \\ a_7^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \dots, L-1.$$

В случае V:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} S_5 & \dots & S_9 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_7 & \dots & S_{11} \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} S_{10} & \dots & S_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{12} & \dots & S_{14} \end{Vmatrix},$$

Для непериодического сплайна изменения в системе (7) происходят только в первой строке, которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ \vdots \\ X^{2L-1} \end{pmatrix} = Y^0 \quad \text{где} \quad Y^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ hy'_0 \\ \frac{1}{2}h^2 y''_0 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Преобразуем нечетные строки матрицы G таким образом, чтобы избавиться от зависимости от нечетных неизвестных $X^1, X^3, \ldots, X^{2L-1}$. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы A_1 был отличен от нуля.

$$\begin{aligned} \det(A_1) = & \frac{1}{428072077674867225600000} M^5 (M-4)(2M+1)(M+5)(M+4)^2(M-3)^2(M+3)^3 \times \\ & \times (M-2)^3(M+2)^4(M-1)^4(M+1)^5 \Big(-62747360064M + 34407503328M^2 + \\ & + 191507803664M^3 + 55638343352M^4 - 121599386484M^5 - \\ & - 109726189632M^6 + 33394853149M^7 + 94469535622M^8 + \\ & + 14160714141M^9 - 34983098157M^{10} - 13778627821M^{11} + \\ & + 3270586487M^{12} + 2372934151M^{13} + 146954773M^{14} - 114362976M^{15} - \\ & - 26623653M^{16} + 3671136M^{17} + 3749928M^{18} + 276444M^{19} - 323568M^{20} - \\ & - 74844M^{21} + 4788M^{22} + 3024M^{23} + 252M^{24} + 14649189120 \Big). \end{aligned}$$

Уравнение $\det(A_1) = 0$ имеет 6 положительных вещественных корней: $\{1;\ 1.474;\ 2;\ 2.471;\ 3;\ 4\}$. Так как M – целое положительное число, то при $M \geqslant 5$, существует обратная матрица[3] A_1^{-1}.

Чтобы избавиться от зависимости от нечетных неизвестных $X^1, X^3, \ldots, X^{2L-1}$, из третьей строки вычтем вторую, умноженную на матрицу $B_1 A_1^{-1}$. Выпишем для наглядности первые три строки:

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & 0 & \ldots & B_0 & B_1 \\ A_0 & A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B_0 - B_1 A_1^{-1} & 0 & -E & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ \vdots \\ X^{2L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P^0 \\ -B_1 A_1^{-1} P^0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Произведем аналогичные преобразования для остальных пар соседних строк с номерами $2l+1$ и $2l$, где $l = 1, \ldots, L-1$, а так же для первой и последней строки. Обозначим через

$$B_0 = \begin{Vmatrix} 1 & m & m^2 & \ldots & m^4 \\ 0 & 1 & 2m & \ldots & 4m^3 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ldots & & 1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} m^5 & m^6 & m^7 \\ 5m^4 & 6m^5 & 7m^6 \\ 10m^3 & 15m^4 & 21m^5 \\ 10m^2 & 20m^3 & 35m^4 \\ 5m & 15m^2 & 35m^3 \end{Vmatrix}.$$

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \\ P_3^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \\ \vdots \\ a_4^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_5^l \\ a_6^l \\ a_7^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \ldots, L-1.$$

[3] В случаях I, II, IV и V обратная матрица существует при $M \geqslant 7$; $M \geqslant 6$; $M \geqslant 4$ и $M \geqslant 3$ соответственно.

U матрицу $B_0 - B_1 A_1^{-1}$. Преобразованная система (7) расщепляется на системы для нахождения X^{2l} и для нахождения X^{2l+1}, $l = 0, 1, \ldots, L-1$. Система для нахождения X^{2l} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & \ldots & 0 & U \\ U & -E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & U & -E & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & U & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^2 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_2 A_2^{-1} P^{L-1} \\ -B_2 A_2^{-1} P^0 \\ -B_2 A_2^{-1} P^1 \\ \vdots \\ -B_2 A_2^{-1} P^{L-2} \end{pmatrix},$$

то есть

$$U X^{2l} - X^{2(l+1)} = -B_1 A_1^{-1} P^l, \quad l = 0, 1, \ldots, L-1, \ X^{2L} = X^0. \tag{10}$$

Система для нахождения X^{2l+1}, $l = 0, 1, \ldots, L-1$:

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ \vdots \\ X^{2L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \\ \vdots \\ P^{L-1} \end{pmatrix},$$

то есть

$$A_1 X^{2l+1} = P^l - A_0 X^{2l}, \quad l = 0, 1, \ldots, L-1. \tag{11}$$

Для непериодического сплайна система уравнений для определения коэффициентов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &X^0 = Y_0, \quad U X^{2l} - X^{2(l+1)} = -B_1 A_1^{-1} P^l, \quad l = 0, 1, \ldots, L-2, \\ &A_1 X^{2l+1} = P^l - A_0 X^{2l}, \ l = 0, 1, \ldots, L-1. \end{aligned} \tag{12}$$

2. Существование и единственность S-сплайна седьмой степени

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $M \geqslant 5$, тогда, для любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a + kh$, $h = \dfrac{b-a}{K}$, существует единственный непериодический сплайн седьмой степени класса C^2.*

Доказательство. По формулам (12) последовательно находим $X^0, X^1, \ldots, X^{L-1}$. Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих сплайн, однозначно определены. □

Теорема 2. *Пусть числа m и $M \geqslant 5$ таковы, что собственные числа матрицы U не равны корню степени L из единицы (L–число полиномов, составляющих сплайн). Тогда, для любой периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a + kh$, $h = \dfrac{b-a}{K}$, существует единственный периодический сплайн седьмой степени класса C^2.*

Доказательство. Рассмотрим систему (10). Умножим первую строку системы на матрицу U и сложим со второй, полученную вторую строку умножаем на U и складываем с третьей и т.д. Поменяем знаки и получим следующую систему:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & \dots & 0 & \dots & -U \\ 0 & E & \dots & 0 & \dots & -U^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E & \dots & -U^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & E-U^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{2(l-1)} \\ \vdots \\ X^{2(L-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{(l-1)} \\ \vdots \\ D_{(L-1)} \end{pmatrix},$$

где $D_0 = B_2A_2^{-1}P^{L-1}, \quad D_l = \sum_{j=0}^{l-1} U^j B_2 A_2^{-1} P^{l-1-j} - U^l B_2 A_2^{-1} P^{L-1}, \quad l = 0, 1, \dots, L-1.$

По условию теоремы $\det(E - U^L) \neq 0$, следовательно

$$X^{2(L-1)} = (E - U^L)^{-1} D_{L-1}, \quad X^{2l} = D_l + U^{l+1} X^{2(L-1)},$$

а из системы (11) следует, что $X^{2l+1} = A_2^{-1}(P_l - A_1 X^{2l})$. Таким образом, все коэффициенты периодического сплайна найдены. □

Аналогичные утверждения справедливы для случаев I, II,IV и V при соответствующих M.

Теорема 3. *Пусть периодическая функция $f(x) \in C^8[a,b]$, и пусть выполнено условие $|f(x_k) - y_k| \leqslant Ch^{8+\varepsilon}$, $\varepsilon \geqslant 0$. Пусть, кроме того, числа m, M, p, n таковы, что $\det(A_1) \neq 0$ и собственные значения матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда периодический сплайн седьмой степени $S^7_{m,M} \in C^2[a,b]$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект 5 и для $x \in [a,b]$ справедливы следующие оценки:*

$$|f^r(x) - \frac{d^r}{dx^r} S^7_{m,M}(x)| \leqslant C^r h^{8-r},$$

для $r = 0, 1, \dots, 7$; при $r = 3, \dots, 7$, $x \neq \xi_l$; в этом случае $\varphi^{(r)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(r)}(\xi_l + 0)$, где $\varphi(x) = f(x) - S^7_{m,M}(x)$.

Доказательство производится аналогично доказательству теоремы о сходимости S–сплайна в работах [1, 2, 3].

Аналогичные теоремы справедливы и для непериодического варианта, а также для случаев I, II, IV и V.

3. Устойчивость S-сплайна седьмой степени

Для устойчивости S-сплайна необходимо, чтобы собственные числа матрицы U по модулю были меньше единицы (а если они еще и различны, то и достаточно). Собственные числа матрицы U определяются из уравнения

$$det(U - \lambda E) = 0. \tag{13}$$

Для случая малых значений M (при $3 \leq M \leq 10$) в результате расчета были получены значения собственных чисел матрицы U. В случае $p = 0$ матрица U состоит из одного числа. Показано, что при $M = 7$ и $m = 1, \dots, 7$ матрица $U = 0$. Некоторые наиболее интересные полученные значения m и M, при которых достигаются наименьшие значения $max|\lambda_i|$ и аппроксимация S-сплайнами устойчива, представлены в таблице.

Как показано в случаях $n = 3$ и $n = 5$, для обеспечения этого условия устойчивости необходимо перекрывание. Это означает, что имеются такие элементы исходной таблицы значений функции, которые участвуют в определении коэффициентов не менее двух соседних полиномов, составляющих сплайн. Если перекрывание достаточно большое, то это в ряде случаев является и достаточным условием [1], [3]. На практике наиболее употребительными являются те сплайны, для построения которых используется небольшое число точек осреднения M.

Таблица

Собственные числа матрицы U

p	M	m	$\max\|\lambda_i\|$	p	M	m	$\max\|\lambda_i\|$	p	M	m	$\max\|\lambda_i\|$
0	7	1…7	0	1	7	5	0,107	3	5	3	0,371
0	8	1	0,0006	1	7	6	0,173	3	6	1	0,499
0	8	2	0,0022	1	8	1	0,0931	3	6	2	0,495
0	8	3	0,0044	1	8	2	0,452	3	6	3	0,577
0	8	4	0,005	1	8	3	0,129	3	6	4	0,305
0	8	5	0,00435	1	8	4	0,0341	3	7	1	0,555
0	8	6	0,00218	1	8	5	0,0695	3	7	2	0,623
0	8	7	0,000622	2	5	1	0,570	3	7	3	0,305
0	9	1	0,00263	2	5	2	0,573	3	7	4	0,763
0	9	2	0,00774	2	6	1	0,272	3	7	5	0,655
0	9	3	0,0115	2	6	2	0,141	3	7	6	0,568
0	9	4	0,00749	2	6	3	0,233	4	4	1	0,690
0	9	5	0,00230	2	6	4	0,501	4	4	2	0,881
0	9	6	0,00807	2	7	1	0,324	4	5	1	0,715
0	9	7	0,00625	2	7	2	0,242	4	5	2	0,824
0	9	8	0,00226	2	7	3	0,248	4	6	1	0,756
1	6	1	0,167	2	7	4	0,0908	4	6	3	0,770
1	6	2	0,0667	2	7	5	0,321	4	7	1	0,787
1	6	3	0,0500	2	8	1	0,373	4	7	2	0,693
1	6	4	0,0667	2	8	2	0,387	4	7	3	0,790
1	6	5	0,167	2	8	3	0,131	4	7	4	0,817
1	7	1	0,165	2	8	4	0,271	4	8	1	0,812
1	7	2	0,0253	2	8	5	0,148	4	8	2	0,698
1	7	3	0,0570	3	5	1	0,428	4	8	4	0,765
1	7	4	0,0943	3	5	2	0,306	4	9	2	0,714

Авторы благодарят студента ВМК Кочнева Ю.К., который выполнял вычисление собственных чисел матрицы устойчивости U.

Литература

1. Силаев, Д.А. Приближение S-сплайнами гладких функций / Д.А. Силаев, Г.И. Якушина // Труды семинара имени И.Г. Петровского. – М., 1984. – Вып. 10. – С. 197.

2. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C^1 / Д.А. Силаев, А.В. Амилющенко, А.И. Лукьянов, Д.О. Коротаев // Труды семинара имени И.Г. Петровского. – М., 2007. – Вып. 26. – С. 347 – 367.

3. Силаев, Д.А. Дважды непрерывно дифференцируемый полулокальный сглаживающий сплайн / Д.А. Силаев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика, 2009. – №5. – С. 11 – 19.

Силаев Дмитрий Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Общие проблемы управления», Механико-математический факультет, Московский государственный университет, dasilaev@mail.ru.

Ингтем Женни Гастоновна, кафедра математической физики, факультет «Вычислительная математика и кибернетика», Московский государственный университет, nmail2002@yandex.ru.

Поступила в редакцию 24 мая 2010 г.