УДК 537.86

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

Г.А. Закирова

POTENTIAL'S RESTORE IN THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR LAPLACE OPERATOR WITH MULTIPLE SPECTRUM

G.A. Zakirova

Исследуются обратные спектральные кратного спектра. Построен алгоритм численного нахождения приближенного решения.

Ключевые слова: оператор Лапласа, обратная спектральная задача, приближенное решение, кратный спектр

Inverse spectral problems with multiple spectrum are investigated. A numerical algorithm of the approximate solution finding is obtained.

Keywords: Laplace operator, an inverse spectral problem, an approximate solution, a multiple spectrum

Введение

Обратные спектральные задачи в различных постановках играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют множество приложений в естествознании. Большинство работ в этом направлении связаны с обыкновенными дифференциальными операторами. Что касается операторов в частных производных, то здесь, в основном, рассматривается степень оператора Лапласа с простым спектром.

В настоящей работе исследуется обратная задача для степени оператора Лапласа порожденного краевой задачей Дирихле в случае непростого спектра. Основным методом исследования является так называемый резольвентный метод, теоретически обоснованный в работах [1, 2]. Получены теоремы существования решения поставленной обратной задачи, позволившие разработать вычислительный алгоритм восстановления потенциала по спектру и создать программу, определяющую возмущение по заданной последовательности собственных чисел.

Постановка обратной задачи

Пусть

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \ : \ 0 \le x_j \le a_j, j = 1, \dots, N\}, \ a_j > 0.$$

В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим дискретный самосопряженный оператор T_0, определенный краевой задачей Дирихле

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\partial\Pi$ — граница Π.

Рассмотрим оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, являющийся степенью оператора T_0, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0, $\beta \geq 1$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Очевидно, спектр $\sigma(T)$ оператора T неоднократный. Иногда, для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \ldots, m_N)}$ оператора T и связанные с ними спектральные объекты одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность ν_t собственного числа λ_t, т.е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_j}$.

Пусть P — оператор умножения на вещественную функцию $p \in L_2(\Pi)$, называемую потенциалом.

Обозначим через μ_t собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через u_t — соответствующие им ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа.

Пусть дана последовательностью комплексных чисел $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$, близкая к спектру оператора T. При различных степенях $\beta \geq 1$ требуется доказать существование оператора P, такого что спектр $\sigma(T + P)$ совпадает с последовательностью $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$.

Степень оператора Лапласа с потенциалом в N-мерном параллелепипеде

Сформулируем вспомогательные утверждения, на которых базируется доказательства основных результатов данной статьи. Доказательства самих вспомогательных утверждений приведены в работе [3].

Обозначим:

$$R_0(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}, \quad R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1};$$

$$a_t = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = \frac{\lambda_{t+1} + \lambda_t}{2}\}, \quad \Gamma_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \in a_t\}, \quad \gamma_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda_t - \lambda| = r_0\},$$

$$r_t = \frac{1}{2}\min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}, \; r_0 = \inf_t r_t;$$

$$\Omega_t = \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| \geq r_0\}, \quad \Omega = \bigcap_{t=1}^\infty \Omega_t, \quad V = \prod_{j=1}^n a_j.$$

Лемма 1.

Если $\|P\| < r/2$, где $0 < r \leq r_0$, то оператор $T + P$ — дискретен, причем

(i) если $R_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, то $R(\lambda) \in \mathfrak{S}_q$, $1 \leq q < \infty$,

(ii) если $\lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, то $\mu_t^s \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, $\quad s = \overline{1, \nu_t}$, ν_t—кратность собственного числа λ_t.

Лемма 2.

Если $\beta > \dfrac{3N}{4}$, то ряд $\sum\limits_{t=1}^\infty r_t^2 \max\limits_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^4$ сходится.

Обозначим сумму ряда через s^2.

Теорема 1. *Пусть $\beta > \dfrac{3N}{4}$, $r \in (0, \min\{r_0, \dfrac{1}{s\sqrt{2^N}}\})$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:*

$$\sqrt{2^N V} \left(\sum_{t=1}^\infty \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

где $\omega = \sqrt{2^N} sr < 1$, *то существует потенциал* $p \in L_2(\Pi)$ *такой, что для любого* $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_t^k, \tag{2}$$

где $\sigma(T+P) = \{\mu_t^k\}$.

Замечание 1. Оператор $T+P$, обладающий свойством (2), неединственен.

Объединим в один класс P все операторы, спектр которых обладает свойством (2). Если мы не будем различать представителей этого класса, то можем говорить о единственности решения обратной задачи.

Приближенное восстановление потенциала. Численный эксперимент

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2^{N+q}}{V}} \prod_{j=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right),$$

где $m = (m_1, \ldots, m_N)$, $m_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, q—число ненулевых индексов в мультииндексе m. При $m_j \in \mathbb{N}$ эту систему будем нумеровать нижним и верхним индексами так же, как и систему $\{v_m\}$, т.е. в соответствии с нумерацией собственных чисел λ_t^k.

Можно показать, что уравнение

$$p = \alpha_0 - \alpha(p),$$

где $\alpha_0 = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} (\xi_t^k - \lambda_t) \varphi_t^k$, $\alpha(p) = (-1)^N \sqrt{2^N V} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\alpha_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k$,

$$\alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_t}} \lambda \, \mathrm{S}\,[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_t}} \mathrm{S}\,[\sum_{k=2}^{\infty} R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k] d\lambda,$$

имеет единственное решение p.

Пусть

$p_0 \equiv 0$, тогда $p_1 = \alpha_0 - \alpha(p_0) = \alpha_0$,

$p_2 = \alpha_0 - \alpha_(p_1) = \alpha_0 - \alpha(\alpha_0)$, $p_3 = \alpha_0 - \alpha(p_2), \ldots, \lim\limits_{t \to \infty} p_t = p$.

Методом последовательных приближений найдено решение $\widetilde{p}$ уравнения

$$\widetilde{p} = \alpha_0 - \widetilde{\alpha}(\alpha_0), \tag{3}$$

где

$$\widetilde{\alpha}(p) = \sum_{t=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_t(p) \varphi_t, \ \widetilde{\alpha}_t(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_t}} \lambda \, \mathrm{S}\,[R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^2] d\lambda.$$

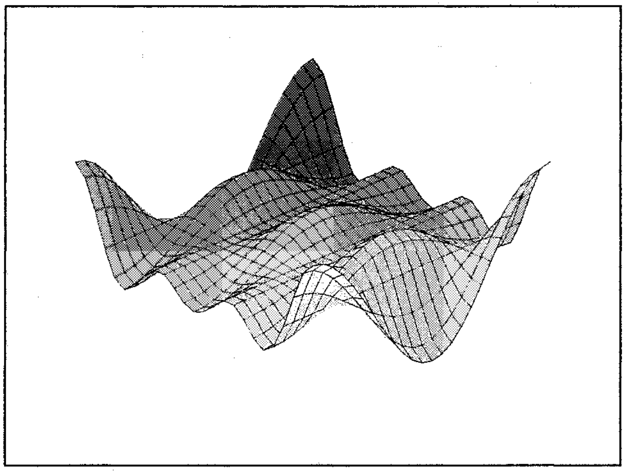
$$\widetilde{p} = \alpha_0 - \sqrt{2^N V} \sum_t \Big(\sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t, \varphi_j)^2}{(\lambda_t - \lambda_j)}\Big) \varphi_t^k.$$

В пакете Maple 6.0 разработана программа, которая по заданной последовательности собственных чисел определяет в явном виде приближенный потенциал, такой, что спектр возмущенного оператора будет совпадать в заданном смысле с введенной последовательностью.

Далее приведем пример, иллюстрирующий работу программы.
Пусть T — степень оператора T_0 ($\beta = 2$), определенного краевой задачей Дирихле (1) на прямоугольнике П со сторонами $a = 1$, $b = 4$. Пусть далее, $\xi_{mn} = \lambda_{mn} + 0.0001$, $m, n \le 3$. По теореме (1) существует потенциал $p \in L_2(\Pi)$ такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu_t} \mu_t^k, \quad \{\mu_{mn}\} = \sigma(T + P). \tag{4}$$

Приближенное решение исследуемой обратной спектральной задачи, найденной в предложенной программе по первым трем членам последовательности $\{\xi_{mn}\}$, имеет вид



Приближенный потенциал, восстановленный программой

Литература

1. Дубровский, В.В. К обратной задаче для степени оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 9. – С. 1563 – 1567.
2. Дубровский, В.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из L_2 / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // Дифференц. уравнения. – 1992. - Т. 28, № 9. – С. 1552 – 1561.
3. Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике / А.И. Седов, Г.А. Закирова // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 2(61). – С. 34 – 42.

Закирова Галия Амруловна, кандидат физико-математических наук, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, zakirova81@mail.ru.

Поступила в редакцию 2 августа 2010 г.