УДК 517.9

Шестидесятилетию А.И. Кожанова посвящается

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина

Неклассическими называют те модели математической физики, чьи представления в виде уравнений или систем уравнений в частных производных не укладываются в рамках одного из классических типов – эллиптического, параболического или гиперболического. В частности, к неклассическим относятся модели, описываемые уравнениями смешанного типа (например, уравнением Трикоми), вырождающимися уравнениями (например, уравнением Келдыша) или уравнениями соболевского типа (например, уравнением Баренблатта – Желтова – Кочиной). Статья содержит обзор некоторых, на наш взгляд, главных достижений А.И. Кожанова в области неклассических моделей математической физики. Основные его достижения в области линейных неклассических моделей относятся к теории уравнений составного типа, где он развил практически до совершенства метод априорных оценок и сделал максимально возможные обобщения. Кроме того, метод априорных оценок наряду с принципом сравнения А.И. Кожанов весьма эффективно применял для изучения нелинейных неклассических моделей таких как обобщенное фильтрационное уравнение Буссинеска, а также классических нелинейных моделей, в частности, моделей джозефсоновского контакта. Особое место в творчестве А.И. Кожанова занимают обратные коэффициентные задачи, где наряду с решением требуется найти еще и неизвестный коэффициент. И здесь он получил выдающиеся результаты как в линейном, так и в нелинейном случаях.

Ключевые слова: уравнения составного типа, уравнения соболевского типа, обобщенное фильтрационное уравнение Буссинеска, обратные коэффициентные задачи.

Введение

Математическая физика, пожалуй, единственная математическая наука, которая опирается не на аксиомы (как например, алгебра) или фундаментальные понятия (как например, математический анализ), а непосредственно на законы природы. Отцом математической физики принято считать Архимеда, который в своих математических изысканиях широко использовал известные ему естественнонаучные представления. Некоторые из них (например, закон Архимеда о плавании тел в жидкости) применяется и ныне, а некоторые (например, ограниченность Вселенной сферой звезд) давно утратили свою актуальность. Спустя приблизительно два тысячелетия с развитием наук, в особенности физики и математики, пришло осознание объекта изучения математической физики – уравнения и системы уравнений в частных производных, моделирующие те или иные явления природы.

Первый шаг к такому пониманию сделали П. Ферма и Ж.Л.Р. Даламбер, получив и исследовав первые математические модели – уравнение распространения тепла в тонком стержне ($u_t = au_{xx}$) и уравнение колебания струны ($u_{tt} = au_{xx}$) соответственно. Вскоре эти модели были обобщены и сейчас известны как уравнение теплопроводности

$$u_t = a\Delta u \tag{1}$$

и волновое уравнение

$$u_{tt} = a\Delta u. \tag{2}$$

Изучение свойств решений уравнений (1) и (2) с самого начала обнаружило столь сильную их несхожесть, что пришлось ввести в рассмотрение два типа – параболические уравнения, включающие (1), и гиперболические уравнения, включающие (2). Кроме того, потребовались еще и эллиптические уравнения, ярким представителем которых служит уравнение Пуассона

$$\Delta u = f. \tag{3}$$

Довольно долгое время этих типов уравнений было достаточно, чтобы описать феномены новых моделей математической физики как, например, системы уравнений Максвелла, моделирующей динамику электромагнитного поля; или системы уравнений Навье – Стокса, моделирующей течение вязкой несжимаемой жидкости. Сложилась традиция – все математические модели, чьи уравнения можно отнести к одному из этих трех типов, называть классическими.

Термин «неклассические уравнения математической физики» ввел в обиход В.Н. Врагов [1] для того, чтобы обособить область своих исследований. Первоначально это были уравнения смешанного типа, прообразом которых является уравнение Трикоми

$$y^{\alpha}u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4}$$

(оно эллиптично в верхней полуплоскости и гиперболично в нижней); а также вырождающиеся уравнения, прообразом которых является уравнение Келдыша

$$y^{\alpha}u_{yy} - u_{xx} + au_{y} = 0 \tag{5}$$

(оно эллиптично в верхней полуплоскости и имеет параболическое вырождение на той части границы, которая лежит на оси Ox). Уравнения (4) и (5) моделируют некоторые (различные) феномены газодинамики высоких скоростей. Наиболее последовательным учеником В.Н. Врагова стал А.И. Кожанов, который не только активно развивает идеи своего учителя, но и организовывает в его память конференции, труды которых затем публикуются в сборниках под общим названием «Неклассические уравнения математической физики». Основополагающей идеей В.Н. Врагова было изучение не только самой математической модели, но, в первую очередь, выделение возможно более широкого класса уравнений, обладающего сходными с данной моделью свойствами. Затем изучается сразу все множество таких уравнений. А.И. Кожанов развил эту идею до совершенства.

Неклассические уравнения математической физики в различных аспектах активно изучаются не только А.И. Кожановым, но и другими последователями В.Н. Врагова (см. например, [2]). Однако мы предпочитаем все же говорить о *неклассических моделях математической физики*, понимая под этим модели, которые представлены уравнениями и системами уравнений в частных производных, и которые невозможно отнести ни к одному из трех классических типов уравнений. Широкий спектр таких моделей представлен *уравнениями соболевского типа*, называемых также «псевдопараболическими уравнениями», «уравнениями неразрешенными относительно старшей производной» и даже «уравнениями не типа Коши – Ковалевской». (Последняя дефиниция нам кажется особенно двусмысленной потому, что так можно назвать и классические параболические уравнения). Историю уравнений соболевского типа принято отсчитывать с пионерских работ А. Пуанкаре, однако активное их исследование началось после появления основополагающих работ С.Л. Соболева (см. прекрасный исторический обзор в [3]). В настоящее время исследования таких уравнений переживают пору бурного расцвета, о чем свидетельствует большое число вышедших недавно монографий (см. например [4, 5]).

Статья содержит весьма краткий (к сожалению!) обзор многогранной деятельности А.И. Кожанова на ниве неклассических уравнений математической физики. Мы обращаем внимание читателя всего лишь на три наиболее ярких, на наш взгляд, грани его многомерного математического дарования. Прежде всего, следует отметить *уравнения составного типа*, где наш юбиляр получил фундаментальные результаты, определившие объект исследований. Затем необходимо упомянуть нелинейные уравнения соболевского типа, где А.И. Кожанов помимо его глубоких результатов был первым, чей перевод на русский термина Sobolev type equations стал ныне общепринятым. (О происхождении исходного термина см. [6]). И, наконец, вершина математической деятельности юбиляра – *обратные коэффициентные задачи*, где полученные им результаты уже сегодня следует признать классическими. К нашему глубокому сожалению, наш интеллектуальный уровень недостаточно высок, чтобы охватить весь диапазон творчества А.И. Кожанова. К примеру, за период 1995 – 2010 г.г. им (и в соавторстве) опубликованы работы по исследованию краевых условий для уравнений соболевского типа [7], нелинейного волнового уравнения в нецилиндрических областях [8], математических моделей в биологии [9]. И это далеко не полный перечень статей, опубликованных юбиляром за указанный период! Поэтому приносим читателям свои извинения за столь скромную библиографию к данной статье, которая не дает полного представления о творчестве А.И. Кожанова, а отражает лишь вкусы и пристрастия авторов статьи. В заключение поздравляем Александра Ивановича с юбилеем и желаем ему ясности мысли, бодрости духа, крепости тела и новых толковых учеников!

1. Уравнения составного типа

Уравнения составного типа возникли в работах Ж. Адамара (см.например, [10]). К ним, в частности, относится уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u, \tag{6}$$

моделирующее диффузию жидкости в трещинновато пористых средах [11], влагоперенос в почве [12] и теплопроводность в среде с «двумя температурами» [13]. А.И. Кожанов рассматривает модель (6) в рамках класса линейных уравнений соболевского типа вида [10], [14]

$$Au_t^{(m)} = Bu + f, \tag{7}$$

определенных в цилиндре $D \times \mathbb{R}_+$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, на границу которой Γ наложены весьма специфические условия (цитируется [14]).

Определим условие «характеристической выпуклости», которое будет существенно использоваться ниже. Пусть M и R – симметричные эллиптико-параболические операторы вида

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_i}(m^{ij}u_{x_j}), \quad Ru = \frac{\partial}{\partial x_i}(r^{ij}u_{x_j}).$$

(Отметим, что коэффициенты всех дифференциальных операторов определены на D). Обозначим через Γ^0_{MR} множество точек Γ, в которых одновременно оба оператора M и R эллиптичны. Для положительного числа δ (достаточно малого) обозначим через $\Gamma^{0,\delta}_{M,R}$ множество точек $\Gamma^0_{M,R}$, отстоящих от границы $\Gamma^0_{M,R}$ на расстояние, большее δ, через $\Gamma^{1,\delta}_{M,R}$ – множество $\Gamma \setminus \Gamma^{0,\delta}_{M,R}$. В силу компактности и гладкости граница Γ может быть разбита на конечное число компонент, в каждой из которых возможен переход к таким локальным координатам $y_1, \ldots, y_n$, что указанная компонента преобразуется в часть плоскости $y_n = 0$. Пусть данная компонента описывается уравнением $F(x) = 0$ (для каждой компоненты своим). Тогда требуемое преобразование можно взять следующим: $y_1 = x_1, \ldots, y_n = F(x)$. Для удобства искомое преобразование будем записывать в виде $y_k = F^k(x)$. Положим

$$\psi_{ki}(y) = F^k_{x_i}(x), \quad \varphi_k(y) = \nu_k(x),$$

$$\widetilde{m}^{il}(y) = m^{ij}(x) r^{kl}_{x_j}(x)\nu_k(x) - m^{ij}(x) r^{kl}_{x_k}(x)\nu_j(x).$$

Определим (MR)-условие (условие «характеристической выпуклости») области G относительно пары операторов M и R – на каждой компоненте множества $\Gamma^{1,\delta}_{MR}$

$$\widetilde{m}^{il}\psi_{ni}\psi_{nl} + m^{ij}r^{kl}[\varphi_k\psi_{ni}\psi_{ql}(\psi_{nj})_{y_q} - \varphi_j\psi_{ni}\psi_{qk}(\psi_{nl})_{y_q}] -$$

$$-\frac{1}{2}\left(m^{ij}r^{kl}\psi_{ni}\left[\sum_{q<n}\{(\psi_{nl}\psi_{qj} + \psi_{nj}\psi_{ql})\varphi_k - (\psi_{nl}\psi_{qk} + \psi_{nk}\psi_{ql})\varphi_j\}\right]\right)_{y_q} \geq 0. \tag{MR}$$

Здесь и далее $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ – вектор внутренней нормали к Γ. Кроме того, предполагаем выполненным следующее условие: существуют функции α^i, $\beta^i \in C^\infty(\overline{D})$ такие, что

$$0 \leq \lambda_0\alpha^i\xi_i^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \lambda_1\alpha^i\xi_i^2, \quad 0 \leq \mu_0\beta^i\xi_i^2 \leq (-1)^{m_0+1}b^{0,ij}\xi_i\xi_j \leq \mu_1\beta^i\xi_i^2, \tag{8}$$

где λ_k, $\mu_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 0, 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и соблюдается правило суммирования по повторяющимся индексам; $m = 2m_0 + 1$, $m_0 = 0, 1, \ldots$.

Для уравнения (7) поставим следующую начально-краевую задачу:

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \tag{9}$$

$$u(x,0) = \ldots = u_t^{(m_0)}(x,0) = u_t^{(m_0+1)}(x,T) = \ldots = u_t^{(2m_0)}u(x,T) = 0. \tag{10}$$

A и B – дифференциальные операторы по «пространственным переменным» второго порядка, причем

$$Au = a_0u - (a^{ij}u_{x_i})_{x_j}, \quad B = B_0 + B_1,$$

где

$$B_0u = (b^{0,ij}u_{x_i})_{x_j} + b_0u, \quad b^{0,ij}\xi_i\xi_j \geq 0,$$

$$B_1u = \gamma[(b^{1,ij}u_{x_i})_{x_j} + b^{1,i}u_{x_i} + b_1u], \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, предполагается, что оператор B_1 подчинен оператору A, т.е.

$$|b^{1,ij}\xi_i\xi_j| \leq \gamma_0\alpha^i\xi_i^2, \tag{11}$$

и еще

$$||\widetilde{B}_1\varphi||_{L_2} \leq k||A\varphi||_{L_2}, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{D}), \tag{12}$$

где $\widetilde{B}_1\varphi = b^{1,ij}\varphi_{x_ix_j} + b^{1,i}\varphi_{x_i} + b_1\varphi$. Наконец, обозначим через $\overline{B}_0$ оператор $(-1)^{m_0+1}\widetilde{B}_0$, где $\widetilde{B}_0u = (b^{0,ij}u_{x_i})_{x_j}$, а через $\overline{b}^{0,ij}$ коэффициенты $\overline{B}_0$.

Теорема 1. *Пусть оператор $A + \overline{B}_0$ равномерно эллиптичен в $\overline{D}$, выполнены условия (11), (12) и $a_0 \leq -\overline{a}_0 < 0$, $(-1)^{m_0}b_0 \geq 0$, $|a^{ij}_{x_k}| \leq M_0\sqrt{a^i}$, $|b^{ij}_{x_k}| \leq M_0\sqrt{\beta^i}$, где $i, j, k = 1, \ldots, n$, $M_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$, а также $(A_0\overline{B}_0)$-условие. Пусть функция $f(x,t)$ имеет все производные по t вплоть до порядка $2(2m_0+1)$, принадлежащие L_2. Пусть $f(x,t)$, $D_t^{2m_0+1}f(x,t)$, $D_t^{2(2m_0+1)}f(x,t)$ удовлетворяют условиям (9), (10). Тогда существует постоянная $\overline{\beta}_0 \in \mathbb{R}_+$, что для $|\beta_0| \leq \overline{\beta}_0$ задача (9), (10) имеет решение $u = u(x,t)$, причем $u \in L_2(0,T;W_2^2)$, $D_t^{2m_0+1} \in L_2(0,T;W_2^2)$.*

Отметим, что повсюду в статье функциональные пространства определены на D, если не оговорено противное.

Замечание 1. Теорема 1 в [10], [14] имеет более общий вид, в частности оператор A может быть вырождающимся.

Замечание 2. Условия (10) можно рассматривать как своеобразную начально-конечную задачу (см. напр., [6], [15]). Хочется выразить уверенность, что такая задача может быть рассмотрена для уравнений соболевского типа высокого порядка [16], [17] методами теории полугрупп операторов.

2. Полулинейные неклассические модели фильтрации

В классической монографии П.Я. Кочиной (Полубариновой – Кочиной) [18] основной объект исследования – фильтрационное уравнение Буссинеска. Здесь же отмечен главный недостаток этой модели – она не учитывает вертикльную составляющую скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости. Ответом на эту критику стал вывод уравнения [19], учитывающего все возможные феномены фильтрации жидкости. Мы приведем здесь частный вид общего уравнения

$$(\lambda - \Delta)u_t = \Delta(|u|^{p-2}u) + f, \tag{13}$$

имея в виду, что именно такое уравнение было получено позже [20] при других физических предпосылках. В (13) функция $u = u(x,t)$ имеет физический смысл потенциала скорости фильтрации жидкости. Начально-краевая задача для уравнения (13) рассматривалась в разных аспектах [21], [22], однако А.И. Кожанов рассмотрел задачу с присущей только ему оригинальностью. Из всего цикла его работ на эту тему мы выбрали наиболее общую [23], которая и будет цитироваться в дальнейшем.

Итак, пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная облать с границей Γ. В цилиндре $Q = D \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$u_t - \Delta\psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0, \tag{14}$$

которое, очевидно, обобщает (13). Для (14) поставим начально-краевую задачу

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in D,\ u\big|_{\Gamma\times(0,T)} = \mu_0(x,t),\ x \in \Gamma,\ t \in (0,T). \tag{15}$$

Особенностью подхода А.И. Кожанова к задаче (14), (15) является виртуозное использование принципа сравнения.

Теорема 2. (Принцип сравнения). *Пусть $u(x,t)$ есть регулярное решение краевой задачи (14), (15), $v(x,t)$ есть решение неравенства*

$$v_t - \Delta\psi(v) - \Delta v_t + q(v) > 0\ (< 0)$$

в цилиндре Q, удовлетворяющее условиям

$$v(x,0) = v_0(x),\ x \in D,\ v\big|_{\Gamma\times(0,T)} = \mu_1(x,t),\ x \in \Gamma,\ t \in (0,T).$$

Если функция $\lambda(\xi) = q(\xi) - \psi(\xi)$ есть убывающая по ξ при $\xi \in \mathbb{R}$ функция и если при $x \in \overline{D}$ выполняется неравенство $v_0(x) > u_0(x)$ (соответственно $v_0(x) < u_0(x)$), а при $x \in \Gamma$, $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$\mu_{1t}(x,t) + \psi(\mu_1(x,t)) > \mu_{0t}(x,t) + \psi(\mu_0(x,t)),\ \mu_1(x,t) > \mu_0(x,t)$$

(соответственно

$$\mu_{1t}(x,t)+\psi(\mu_1(x,t))<\mu_{0t}(x,t)+\psi(\mu_0(x,t)),\ \mu_1(x,t)<\mu_0(x,t)),$$

то для $x\in\overline{D}$ *и* $t\geq 0$ *справедливо неравенство* $v(x,t)>u(x,t)$ *(соответственно* $v(x,t)<u(x,t)$*).*

Затем доказанный принцип сравнения применяется для доказательства существования регулярных решений. В дальнейшем через R обозначен радиус минимального из шаров с центром в начале координат и содержащий область D.

Теорема 3. *Пусть в уравнении (14) выполняется*

$$\psi(\xi)\equiv\xi^m,\ q(\xi)\equiv-\beta\xi^p,\ p\geq m\geq 2,\ \beta\geq 0,$$

и пусть $\mu_0(x,t)\equiv 0$*, функция* $u_0(x)$ *неотрицательна, принадлежит классу* $C^2(\overline{D})$ *и удовлетворяет условию согласования, а граница области* D *принадлежит классу* $C^{2+\varkappa}$*,* $\varkappa>0$*. Тогда, если положительные постоянные* A*,* T_0*,* α *и* β *таковы, что выполняются неравенства*

$$(m-1)\alpha^{m-1}A^{m-1}>1,\ u_0(x)<AT_0^{-1/(m-1)}(\alpha+|x|^2),$$

$$\frac{2n}{m-1}+4m(m-1)\alpha^{m-1}A^{m-1}>\frac{R_0}{m-1}+4m(m-1)A^{m-1}R_0^{m-1}+2mnA^{m-1}R_0^{m-1}+\beta A^{p-1}R_0^p,$$

где $R_0=\alpha+R$*, то задача (14), (15) будет иметь регулярное решение, и это решение будет удовлетворять неравенствам*

$$0\leq u(x,t)\leq R_0A(T_0+t)^{-1/(m-1)}$$

для всех $t\geq 0$*.*

Кроме существования регулярных решений А.И. Кожанов выявил условия, при которых в задаче (14), (15) могут возникать режимы с обострением.

Теорема 4. *Пусть область* D *есть шар* $D=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<R\}$*,* $\psi(\xi)$ *и* $q(\xi)$ *имеют тот же вид, что и в теореме 3, но с дополнительным условием* $p>m$*. Тогда, если граничная функция* $\mu_0(x,t)$ *и начальная функция* $u_0(x)$ *задачи (14), (15) есть гладкие функции такие, что для положительных постоянных* A*,* T_0 *и* γ *выполняются неравенства*

$$\mu_{0t}+\mu_0^m\Big|_{|x|=R}>-A\lambda(\gamma R^2)^{\lambda-1}+A^m(\gamma R^2)^{\lambda m},$$

$$\mu_0\Big|_{|x|=R}>A(\gamma R^2)^{\lambda},\ u_0(x)>A(T_0+\gamma|x|^2)^{\lambda},$$

$$(T_0+\gamma R^2)^{\lambda_1}+2A^{m-1}\gamma m(n-2m)+4A^{m-1}\gamma m^2\lambda\leq 0,$$

$$2\gamma\lambda(\lambda-1)(T_0+\gamma R^2)^{\lambda_1}+4T_0A^{m-1}\gamma\lambda m(\lambda m-1)<A^{p-1},$$

где $\lambda=-2/(p-m)$*,* $\lambda_1=2(m-1)/(p-m)$*, то гладкое решение задачи (14), (15) будет таким, что* $u(0,t)\to+\infty$ *при* $t\to T_0-0$*.*

3. Классические нелинейные модели второго порядка

Пусть как и выше $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей Г. В цилиндре $D \times (0, T)$ рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_{tt} = \lambda \Delta u_t + \Delta u + g(u, u_t) + f \tag{16}$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x, 0) = u_0(x),\ u_t(x, 0) = u_1(x),\ u|_{\Gamma \times (0,T)} = 0. \tag{17}$$

Уравнение (16) моделирует процесс движения электронов в системе «сверпроводник – диэлектрик с туннельной проводимостью – сверхпроводник», так называемый джозефсоновский контакт. Причем постоянная λ может быть как положительной, так и равной нулю. Рассмотрим сначала случай $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 5. *Пусть $g(\xi, \eta)$ – непрерывно дифференцируемая при $(\xi, \eta) \in R^2$ функция, удовлетворяющая условиям*

$$k_1|\eta|^{p-1} \le |g(\xi, \eta)| \le k_2|\eta|^{p-1},\ k_1 > 0,\ p \le 2,$$

$\eta g(\xi, \eta) > 0$ при $\eta \ne 0$, $g(\xi, 0) \equiv 0$; далее, пусть $u_0(x) \in C^2(\overline{D})$, $u_1(x) \in C^1(\overline{D})$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ обращаются в нуль на Г, f – ограниченная в Q измеримая функция. Тогда задача (16), (17) имеет единственное решение $u = u(x, t)$ такое, что

$$u \in L_\infty(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)) \cap L_2(0, T; W^2_2(D)) \cap L_\infty(Q),$$

$$u_t \in L_\infty(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)) \cap L_2(0, T; W^2_2(D)) \cap L_\infty(Q),\ u_{tt} \in L_2(Q).$$

Доказательство [24] содержит весьма изощренное применение метода априорных оценок. Отметим, что в [24] наряду с однородным граничным условием (17) расмотрено еще и неоднородное. Перейдем к случаю $\lambda = 0$.

Теорема 6. *Пусть в уравнении (16) $\lambda = 0$, $n = 1$, $g(\xi, \eta) \in C^1(R^2)$ $g(\xi, \eta)\eta \ge a_0|\eta|^p$, $g_\eta(\xi, \eta) \ge a_0|\eta|^p$, $|g_\xi(\xi, \eta)| \le b(\xi)|\eta|^{p-1}$, $\xi \in R$, $\eta \in R$, $a_0 > 0$, $p > 1$, $b(\xi) \in C(R)$. Тогда для любых функций u_0, u_1 таких, что $u_0 \in W^2_2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_4(D)$, $u_1 \in \overset{\circ}{W}{}^1_4(D)$, и любой функции $f = f(x, t)$ такой, что $f \in L_4(Q)$, $f_t \in L_2(Q)$, существует решение задачи (16), (17) такое, что*

$$u \in L_\infty(0, T; W^2_2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)),\ u_t \in L_\infty(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)),\ u_{tt} \in L_\infty(0, T; L_2(D)),$$

причем это решение единственно.

Замечание 3. И хотя уравнение (16) относится к нелинейным гиперболическим уравнениям, мы не могли бы обойти вниманием как изящество результатов, так и изысканность доказательств.

4. Линейные обратные коэффициентные задачи

Рассмотрим подход А.И. Кожанова к линейным обратным коэффициентным задачам на примере фундаментальной работы [25]. Пусть D – интервал $(0, 1)$, Q – прямоугольник, $(0, 1) \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $q(x, t)$, $f(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu_0(t)$ и $\mu_1(t)$ суть функции, заданные при $x \in \overline{D}$, $t \in [0, T]$. Рассмотрим следующее уравнение теплопроводности

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}((p(x)u_x)) + q(x, t)u = f(x, t). \tag{18}$$

Поставим обратную задачу. Найти функции $u(x,t)$ и $p(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (18) при выполнении для функций $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in D, \tag{19}$$

$$u(0,t) = \mu_0(t),\ u(1,t) = \mu_1(t),\ 0 < t < T, \tag{20}$$

$$u(x,T) = u_1(x),\ x \in D. \tag{21}$$

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$f(x,t) \in L_2(Q),\ f_t(x,t) \in L_2(Q),\ f(x,0) \in W_4^1(D),\ f(x,T) \in W_4^1(D),\ q(x,t) \in C^1(\overline{Q}),$$

$$u_0(x) \in C^3(\overline{D}),\ u_1(x) \in C^3(\overline{D}),\ h(x) \in C^3(\overline{D}),\ \psi(x) \in C^2(\overline{D}),$$

$$\mu_0(t) \in C^2([0,T]),\ \mu_1(x) \in C^2([0,T]); \tag{22}$$

$$q_0 > 0,\ k_0 > 0,\ 2h_0^2 < 1; \tag{23}$$

$$u_1'(0) \leq 0,\ u_1'(1) \geq 0; \tag{24}$$

$$\varphi_0 > 0; \tag{25}$$

$$A_0 < 1,\ B_1 < 1,\ A_1 B_0 < (1 - A_0)(1 - B_1); \tag{26}$$

$$2N_{13}^{\frac{1}{2}} + N_2^{\frac{1}{2}} < \varphi_0; \tag{27}$$

$$u_0(0) = \mu_0(0),\ u_0(1) = \mu_1(0),\ u_1(0) = \mu_0(T),\ u_1(1) = \mu_1(T), \tag{28}$$

$$h(0) = h(1) = u_1'(0)h'(0) = u_1'(1)h'(1) = 0,\ \psi_0(0) = \mu_0'(0),\ \varphi(1) = \mu_1(T). \tag{29}$$

Тогда обратная коэффициентная задача (18) – (21) имеет решение $\{u(x,t), p(x)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in V$, $p(x) \in W_2^1(D)$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $p(x)u_x(x,t) \in L_2(0,T; W_2^1(D))$, $p(x)u_{xt}(x,t) \in L_2(0,T; W_2^1(D))$. *Здесь* $V = \{v(x,t) : v(x,t) \in H,\ v_t(x,t) \in H\}$,

$$H = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(D)) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(D)),\ v_t(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Доказательство теоремы зиждется на получении априорных оценок и последующим применением теоремы Шаудера о неподвижной точке. Ворох условий (22) – (29) делает теорему 7 практически неприменимой, к тому же возникает ощущение, что эти условия в совокупности определяют пустое множество. А.И. Кожанов отметает все сомнения, рассмотрев в заключение модельную ситуацию, где условия (22) – (29) проверяются достаточно просто, причем наглядно показано, что множество исходный данных задачи (18) – (21), для которых выполняются все требуемые условия, непусто.

Все эти и многие другие результаты уважаемого юбиляра можно найти в его фундаментальном трактате [26].

Литература

1. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. – Новосибирск: НГУ, 1983.
2. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
3. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

4. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007.
5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
6. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т.3, №1. – С.51-72.
7. Кожанов, А.И. Задача с косой производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений / А.И. Кожанов // Сиб. мат. журн. – 1996. – Т.37, №6. – С. 1335–1346.
8. Кожанов, А.И. О разрешимости краевых задач для волнового уравнения с нелинейной диссипацией в нецилиндрических областях / А.И. Кожанов, Н.А. Ларькин // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т.42, №6. – С. 1278–1299.
9. Кожанов, А.И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных ультрапараболических уравнений некоторых математических моделей динамики биологических систем / А.И. Кожанов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2009. – Т.12, №4. – С. 64–78.
10. Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов. – Новосибирск: НГУ, 1990.
11. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т.24, №5. – С.58–73.
12. Hallaire, M. On a theory of moisture-transfer / M. Hallaire // Inst. Rech. Agronom. – 1964. – № 3. – P. 60–72.
13. Chen, P.J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – V.19. – P. 614–627.
14. Кожанов, А.И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной / А.И. Кожанов // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т.35, №2. – С. 359–376.
15. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейной системы Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: «Мат. моделирование и программирование». – Челябинск, 2010. – № 4 (221), вып. 7. – С. 35–39.
16. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. – №2. – С. 252–260.
17. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: «Мат. моделирование и программирование». – Челябинск, 2011. – №37 (254), вып. 10. – С. 22–29.
18. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977.
19. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С.Дзекцер // Докл. Акад. наук СССР. – 1972. – Т. 202. № 5. – С. 1031–1033.
20. Фураев, В.З. Вывод уравнения для свободной поверхности фильтрующейся жидкости в слое конечной глубины / В.З. Фураев, Г.А. Шадрин // Вычислит. математика и мат. физика. – М., 1982. – Т. 10. – С. 66–71.
21. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1989. – №2. – С. 55–61.

22. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Вестн. Магнитогор. гос. ун-та. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2005. – Вып.8. – С. 113–122.
23. Кожанов, А.И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником / А.И. Кожанов // Мат. заметки. – 1999. – Т. 65, №1. С. 70–75.
24. Кожанов, А.И. Некоторые классы нестационарных уравнений с растущими младшими членами / А.И. Кожанов // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №4. – С. 875–885.
25. Кожанов, А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т.46, №5. – С. 1053–1071.
26. Kozhanov, A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 1999.

Георгий Анатольевич Свиридюк, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), Georgy_Sviridyuk@mail.ru.

Загребина Софья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zagrebina_sophiya@mail.ru.

MSC 35-02, 35K70

Nonclassical Mathematical Physics Models

G.A. Sviridyuk, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
S.A. Zagrebina, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

Nonclassical called the models of mathematical physics, whose representation in the form of equations or systems of partial differential equations do not fit into one of the classical types – elliptic, parabolic or hyperbolic. In particular, the non-classical model are described by the equations of mixed type (eg, Tricomi equation), the degenerate equation (for example, the Keldysh equation) or the equations of Sobolev type (eg, Barenblatt – Zheltov – Kochina equation). The article provides an overview of some, in our opinion – the main A.I. Kozhanov achievements in the field of non-classical models of mathematical physics. His major achievements in the field of non-classical linear models belong to the theory of composite type equations, where he developed almost to perfection the method of a priori estimates and did the maximum possible generalization. Furthermore, the method of a priori estimates, along with the principle of comparing A.I. Kozhanov very effectively applied to the study of non-linear non-classical models such as the generalized Boussinesq filtration equation and classical nonlinear models, including models of the Josephson junction. Special place in activity of A.I. Kozhanov take the inverse problem, which, along with the decision and want to find another unknown factor. Here he received outstanding results in both linear and nonlinear cases.

Keywords: composite type equations, Sobolev type equations, weakened Showalter – Sidorov problem, generalized filtration Boussinesq equation, inverse coefficient problems.

References

1. Vragov V.N. Boundary problems for nonclassical equations of mathematical physics [Kraevye zadachi dlja neklassicheskih uravnenij matematicheskoj fiziki]. Novosibirsk, Novosibirskij gos. univ., 1983. (in Russian)

2. Pyatkov S.G. Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht, Boston, Kӧln, Tokyo, VSP., 2002.
3. Demidenko G.V., Uspenskii G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. New York, Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.
4. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Ju.D. Linear and nonlinear Sobolev type equation [Linejnye i nelinejnye uravnenija sobolevskogo tipa]. Moscow, Fizmatlit., 2007. (in Russian)
5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Kӧln, Tokyo, VSP., 2003.
6. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter − Sidorov problem as Phenomena of the Sobolev-type equations. News of Irkutsk State University. Ser. Mathematics, 2010, V. 3, no. 1, pp. 51–72. (in Russian)
7. Kozhanov A.I. A problem with oblique derivative for some pseudoparabolic equations and equations close to them. Siberian Mathematical J., 1996, V. 37, no. 6, pp. 1171–1181.
8. Kozhanov A.I., Lar'kin N. A. On Solvability of Boundary-Value Problems for the Wave Equation with a Nonlinear Dissipation in Noncylindrical Domains. Siberian Mathematical J., 2001, V. 42, no. 6, pp. 1062–1081.
9. Kozhanov A. I. On the solvability of boundary value problems for quasilinear ultraparabolic equations in some mathematical models of the dynamics of biological systems. J. of Applied and Industrial Mathematics, 2010, V. 4, no. 4, pp. 512–525.
10. Kozhanov A. I. Boundary value problems for equations of mathematical physics of odd order [Kraevye zadachi dlja uravnenij matematicheskoj fiziki nechetnogo porjadka]. Novosibirsk, Novosibirskij gos. univ., 1990. (in Russian)
11. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous fluids in fissurized rocks. J. Applied Mathematics and Mechanics (PMM), 1960, V. 24, no. 5, pp. 1286–1303.
12. Hallaire, M. On a theory of moisture-transfer. Inst. Rech. Agronom., 1964, no. 3, pp. 60–72.
13. Chen P.J., Gurtin M.E. On a theory of heat conduction involving two temperatures. Z. Angew. Math. Phys., 1968, V. 19, pp. 614–627.
14. Kozhanov A.I. Boundary value problems for some classes of higher-order equations that are unsolved with respect to the highest derivative. Siberian Mathematical J., 1994, V. 35, no. 2, pp. 324–340.
15. Zagrebina S.A. The initial-finish problem for the Navier − Stokes linear system. Bulletin of South Ural State University. Ser. «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software», 2010, no. 4 (221), issue 7, pp. 35–39. (in Russian)
16. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. The phase spaces of a class of linear higher-order Sobolev type equations. Differential Equations, 2006, V. 42, no. 2, pp. 269–278.
17. Zamyshlyaeva A.A. The Initial-finish value problem for Nonhomogenious Boussinesque − Lӧve equation. Bulletin of South Ural State University. Ser. «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software», 2011, no. 37 (254), issue 10, pp. 22–29. (in Russian)
18. Polubarinova-Kochina P.Y. Theory of Ground Water Movement. Princeton, New Jersey, Princeton University Press. 1962.
19. Dzektser E.S. Generalization of the groundwater flow from free surface. Doklady Mathematics (Doklady Akademii Nauk), 1972, V. 202, no. 5, pp. 1031–1033. (in Russian)

20. Furaev V.Z., Shadrin G.A. Derivation of the equation for the free surface of the filtered liquid in a layer of finite depth. Calculate. Mathematics and Math. Physics, Moscow, 1982, V. 10, pp. 66–71. (in Russian)
21. Sviridyuk G.A. A problem of generalized Boussinesq filtration equation. Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 1989, V. 33, no. 2, pp. 62–73.
22. Manakova N.A. The optimal control problem for a generalized Boussinesq filtration. Vestnik Magnitogorsk. gos. univ. Ser. Mathematics, Magnitogorsk, 2005, issue 8, pp. 113 – 122. (in Russian)
23. Kozhanov A.I. Initial boundary value problem for generalized Boussinesque type equations with nonlinear source. Math. Notes, 1999, V. 65, no. 1, pp. 59–63.
24. Kozhanov A.I. Solvability of the Inverse Problem of Finding Thermal Conductivity. Siberian Mathematical J., 2005, V. 46, no. 5, pp. 841–856.
25. Kozhanov A.I. Solvability of the Inverse Problem of Finding Thermal Conductivity. Siberian Mathematical J., 2005, V. 46, no. 5, pp. 841–856.
26. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 1999.

Поступила в редакцию 5 октября 2012 г.