

ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИСТРУКТУРИРОВАННЫХ ЛОКАЛЬНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИЛЬНОТОЧНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

В.М. Свешников, Д.О. Беляев

Рассматривается алгоритм построения квазиструктурированных сеток, которые состоят из равномерных прямоугольных подсеток и строятся в два этапа. На первом из них расчетная область покрывается равномерной прямоугольной макросеткой, а на втором в каждом макроэлементе задается своя прямоугольная равномерная подсетка. Существенным является то, что подсетки могут быть несогласованными. За счет регулировки плотности узлов подсеток достигается адаптация квазиструктурированной сетки к неоднородностям внутри области. Для адаптации сетки к внешней границе подсетки подвергаются локальной модификации, состоящей в сдвиге приграничных узлов на границу. Излагается алгоритм локальной модификации для построения качественной квазиструктурированной сетки, который не нарушает структурированности подсеток. Предлагаемые квазиструктурированные сетки выгодно отличаются от структурированных сеток тем, что не требуют введения лишних узлов, которые необходимы лишь для поддержки структурированности, и от неструктурированных сеток тем, что не требуют хранения большого объема информации. Решение краевых задач на квазиструктурированных сетках ищется методом декомпозиции расчетной области на подобласти, сопрягаемые без наложения. Данный метод легко распараллеливается и поэтому может быть применим для проведения расчетов на многопроцессорных суперЭВМ.

Ключевые слова: квазиструктурированная сетка, локальная модификация, метод декомпозиции области, краевые задачи, сильноточная электроника.

Введение

Задачи сильноточной электроники, заключающиеся в моделировании движения интенсивных пучков заряженных частиц в электромагнитных полях [1], характеризуются значительной разномасштабностью геометрии расчетной области и неоднородностью пучка [2]. Применение для их дискретизации структурированных прямоугольных, пусть даже неравномерных сеток, требует введения неоправданно большого количества узлов. Неструктурированные сетки позволяют отследить неоднородность решения, но для работы с ними необходимо хранить поузловую, пореберную и поэлементную информацию большого объема. Кроме того, на таких сетках возрастает трудоемкость расчета траекторий движения заряженных частиц и вносимого ими объемного заряда по сравнению с расчетами на структурированных сетках. Компромиссным вариантом являются квазиструктурированные сетки, состоящие из структурированных подсеток. В работе [3] были предложены и реализованы квазиструктурированные адаптивные сетки, которые предполагали разбиение расчетной области на подобласти различного вида, построение в каждой подобласти своей подсетки, адаптивной к границе, регулировку плотности узлов в заданном регионе. Их основным недостатком являлось то, что подсетки должны быть согласованными, что приводило к введению большого количества вспомогательных подобластей, чтобы удовлетворить требованию согласованности.

В настоящей статье предлагаются квазиструктурированные несогласованные сетки. При их построении преследуются две цели: 1) простота в использовании, 2) адаптивность к внешней границе и к неоднородностям внутри области. Для их достижения результирующая квазиструктурированная сетка строится в два этапа. На первом из них при помощи структурированной макросетки проводится разбиение на подобласти, а на втором в каждой подобласти строится своя структурированная подсетка. Предельная простота такой сетки обусловлена тем, что и макросетка, и подсетки являются структурированными прямоугольными и равномерными. Адаптация сетки к внешней границе достигается за счет локальной модификации приграничных узлов, а к неоднородностям внутри области за счет регулировки плотности узлов подсеток. Существенным является то, что подсетки являются несогласованными, что дает возможность уменьшать или увеличивать шаги подсеток в подобластях, руководствуясь лишь физическими особенностями задачи. Так, например, применительно к задачам электрофизики происходит локальное сгущение сетки вблизи поверхности старта заряженных частиц или в районе кроссовера пучка, то есть в подобластях значительно влияющих на поведение пучка во всей расчетной области. Введение подсеток, обладающих таким важным при практическом использовании свойством, стало возможным благодаря подходу к построению методов декомпозиции расчетной области на подобласти, сопрягаемые без наложения, предложенному в работе [4]. Его коренным отличием от других работ на данную тему [5] является введение на интерфейсе своей сетки, на которой аппроксимируется уравнение Пуанкаре – Стеклова, и отдельная аппроксимация исходного уравнения в подобластях. В настоящей работе излагается алгоритм локальной модификации для построения качественной квазиструктурированной сетки, который не нарушает структурированности подсеток и допускает применение метода декомпозиции. Результирующая квазиструктурированная сетка проста в использовании, так как мы имеем дело с простейшими прямоугольными структурированными сетками почти всюду, за исключением небольшого количества приграничных узлов и, кроме того, она является адаптивной по построению.

1. Основные принципы построения квазиструктурированных сеток и решения на них краевых задач

Математически задача расчета интенсивного стационарного пучка заряженных частиц сводится к нелинейной самосогласованной задаче, постановка которой приведена, например, в работе [6]. Ее решение осуществляется каким-либо итерационным методом, на каждом шаге которого решаются две основные вычислительные задачи: 1) расчет потенциала электрического поля, 2) вычисление траекторий движения заряженных частиц и объемного заряда, вносимого ими. Эти задачи имеют различные аспекты в вопросе построения сеток. Решение первой из них требует качественной триангуляции для аппроксимации уравнения Пуассона, из которого находится потенциал, а для второй наиболее важна структурированность подсеток, так как именно она в значительной мере определяет объем вычислений при моделировании пучка. Критерии оценки качества сеток приведены, например, в монографии [7].

Пусть в замкнутой двумерной плоской или осесимметричной области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ с границей Γ требуется решить краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = g_1, lu|_{\Gamma} = g_2. \quad (1)$$

Здесь $u = u(T)$ – искомая функция (потенциал электрического поля), $g_1 = g_1(T)$, $g_2 = g_2(T)$ – заданные функции, где $T = (x, y)$ – текущая точка, рассматриваемая в декартовых или цилиндрических координатах, причем в последнем случае $x = r, y = z$, Δ – оператор Лапласа, l – оператор граничных условий, включающих условия Дирихле или Неймана.

Будем предполагать без существенного ограничения общности, что Γ является кусочно-гладкой границей, состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей, и условие Неймана задано на отрезках прямых, параллельных координатным осям.

В прямоугольнике $\bar{R} = \{0 \leq x \leq D_x, 0 \leq y \leq D_y\}$, описанном вокруг расчетной области ($\bar{G} \subset \bar{R}$), где D_x, D_y заданы, построим прямоугольную равномерную макросетку

$$\bar{\Omega}_H = \{X_I = IH_x, Y_J = JH_y, I = \overline{0, N_x}, J = \overline{0, N_y}, H_x = \frac{D_x}{N_x}, H_y = \frac{D_y}{N_y}\},$$

где N_x, N_y – заданные целые числа, с шагами $H_x, H_y \gg h$ (h – максимальный шаг сетки, на которой аппроксимируется задача (1)). Фактически мы тем самым проводим декомпозицию G на подобласти $G_{I,J}$. Среди них будем различать $G_{I,J}^{(0)}$ – внешние, $G_{I,J}^{(1)}$ – внутренние, $G_{I,J}^{(2)}$ – граничные подобласти, которые соответственно не содержат точек G , содержат только точки G , содержат точки G и Γ . Точки пересечения координатных линий $x = X_I, y = Y_J$ макросетки являются макроузлами, которые обозначим как T_p , а отрезки координатных линий, принадлежащие расчетной области, образуют границу сопряжения подобластей γ или интерфейс.

Внешние подобласти $\bar{G}_{I,J}^{(0)}$ исключаются из дальнейших расчетов. Их роль состоит в поддержании структурированности макросетки, упрощении работы с ней. В замкнутых подобластях $\bar{G}_{I,J}^{(1)}, \bar{G}_{I,J}^{(2)}$ построим равномерные прямоугольные подсетки

$$\bar{\Omega}_{h,k} = \{x_{i_k} = X_I + i_k h_{x,k}, y_{j_k} = Y_J + j_k h_{y,k}, i_k = \overline{0, n_{x,k}}, j_k = \overline{0, n_{y,k}}\}$$

с шагами $h_{x,k} = \frac{X_{I+1} - X_I}{n_{x,k}}, h_{y,k} = \frac{Y_{J+1} - Y_J}{n_{y,k}}$, причем будем предполагать без существенного ограничения общности, что $n_{x,k} = 2^{m_{x,k}}, n_{y,k} = 2^{m_{y,k}}$, где $m_{x,k}, m_{y,k} > 0$ – целые числа. Здесь введена единая нумерация подобластей и подсеток по индексу $k = \overline{1, K}$. По аналогии с подобластями будем различать подсетки двух типов внутренние $\bar{\Omega}_{h,k}^{(1)}$ и граничные $\bar{\Omega}_{h,k}^{(2)}$.

Граничные подсетки $\bar{\Omega}_{h,k}^{(2)}$ подвергаются локальной модификации, состоящей в сдвиге приграничных узлов на границу Γ , в результате которой они преобразуются в подсетки $\bar{\Omega}_{h,k}^{(m)}$. Объединение подсеток $\bar{\Omega}_{h,k}^{(1)}$ и $\bar{\Omega}_{h,k}^{(m)}$ образует результирующую квазиструктурированную сетку Ω_h , на которой аппроксимируется краевая задача (1).

На границе сопряжения введем сетку ω_h , не содержащую макроузлов $T_p : \omega_h = \{(x_i, y_i) \in \gamma, (x_i, y_i) \neq T_p, i = \overline{1, N}\}$, где (x_i, y_i) – узлы подсеток $\Omega_{h,k}$, лежащие на γ , N – известное целое число. Если в смежных подобластях подсетки на общей границе имеют различное число узлов, то в ω_h входят узлы густой подсетки. Дополнив ω_h макроузлами T_p , образуем сетку $\bar{\omega}_h = \{\omega_h, T_1, T_2, \dots, T_p\}$. По построению координаты узлов сетки ω_h совпадают с координатами подмножества узлов $\Omega_{h,k}$, но это узлы различных сеток, и они играют различные роли в решении задачи: на первой аппроксимируется уравнение Пуанкаре–Стеклова (см. ниже), а узлы второй служат для аппроксимации исходного уравнения. В связи с этим подчеркнем, что модификация подсеток $\bar{\Omega}_{h,k}^{(2)}$ не затрагивает узлы сетки $\bar{\omega}_h$.

Краевая задача (1) методом конечных объемов [8] заменяется приближенной задачей

$$\Delta_h u_h = g_1, l_h u_h|_{\Gamma} = g_2, u_h|_{\gamma} = v_h, \quad (2)$$

где u_h, v_h – приближенные значения функций u, v , (v – значение искомой функции на γ), а Δ_h, l_h – аппроксимации оператора Лапласа и оператора граничных условий. Ее решение сводится к решению подзадач во внутренних и граничных подобластях с условием Дирихле на интерфейсе. Основной проблемой при этом является нахождение функции v_h . Для ее решения применяется подход, предложенный в работе [4]. Вкратце его суть заключается в следующем.

На интерфейсе справедливо уравнение Пуанкаре–Стеклова

$$\left(\frac{\partial u(v)}{\partial \vec{n}}\right)^{(+)} - \left(\frac{\partial u(v)}{\partial \vec{n}}\right)^{(-)} = 0, \quad (3)$$

где \vec{n} – нормаль к γ , а знаками \pm отмечены функции, лежащие по разные стороны от γ . Данное уравнение в узлах сетки $\bar{\omega}_h$ заменяется системой линейных алгебраических уравнений [4]

$$A\bar{v}_h + b = 0, \quad (4)$$

где $A = \{a_{i,j}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N+P}\}$ – прямоугольная матрица, $b = \{b_i, i = \overline{1, N}\}$ – известный, а $\bar{v} = \{\bar{v}_{h,j}, j = \overline{1, N+P}\}$ – искомый векторы. Для отыскания \bar{v}_h в макроузлах уравнения (4) дополняются системой уравнений

$$(\Delta_h^{(p)}\bar{v}_h)_j = g_{1,j}, j = \overline{N+1, N+P}, \quad (5)$$

где $\Delta_h^{(p)}$ – аппроксимация оператора Лапласа на сеточном шаблоне, включающем узлы сетки ω_h и один из макроузлов. Система уравнений (4), (5) записывается как

$$\bar{A}\bar{v}_h + \bar{b} = 0,$$

где \bar{A} квадратная матрица порядка $N+P$, а $\bar{b} = (b, g)'$, $g = \{g_{1,j}, j = \overline{N+1, N+P}\}$. Решение данной системы осуществляется итерационным методом декомпозиции вида

$$\bar{v}_h^{(n+1)} = \Lambda(\bar{v}_h^{(n)}, \bar{A}\bar{v}_h^{(n)}), n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

где Λ – функция, определяющая конкретный метод (это может быть, например, метод сопряженных градиентов). На каждой итерации (6) решаются краевые задачи в подобластях и вычисляется действие $A\bar{v}_h$ матрицы A на вектор \bar{v}_h , равное

$$(A\bar{v}_h)_i = (d_h u_h)_i^{(+)} - (d_h u_h)_i^{(-)}, i = \overline{1, N},$$

где верхний индекс n опущен, а d_h^\pm – операторы, аппроксимирующие нормальные производные в уравнении (3). Функция v_h , входящая в формулу (2), определяется интерполяцией функции \bar{v}_h : $v_h = S_h \bar{v}_h$, где S_h – оператор интерполирования.

2. Модификация подсеток вблизи границ

Структурированные прямоугольные сетки, каковыми являются рассматриваемые подсетки, имеют существенный недостаток, а именно: при пресечении с границей их узлы могут оказаться на малом расстоянии от границы, что приводит к появлению сеточных элементов с сильно различающимися длинами сторон и, в конечном итоге, к увеличению погрешности приближенного решения. Способом избавиться от данного недостатка и в то же время сохранить структурированность сетки является сдвиг таких узлов на границу или локальная модификация сетки. Данный прием был предложен и исследован А.М. Мацокиным [9]. В дальнейшем он получил активное развитие, например, в работах [7, 10]. В настоящей статье разработан алгоритм локальной модификации применительно к квазиструктурированным сеткам для решения рассматриваемого класса задач, направленный на сохранение структурированности подсеток и выполнение критериев качества их триангуляции.

Вариант метода декомпозиции, рассматриваемый в настоящей работе, позволяет проводить аппроксимацию уравнения (1) отдельно на каждой подсетке, используя интерфейс как границу с условиями Дирихле. Это обстоятельство дает возможность осуществить построение подсеток и, главное, их модификацию также отдельно для каждой подобласти. Тем не менее, то, что подсетки входят в результирующую квазиструктурированную сетку, вызывает некоторые особенности в алгоритме модификации, которые излагаются ниже.

Локальной модификации подвергаются граничные подсетки $\overline{\Omega}_{h,k}^{(2)}$. Для этого узлы, отстоящие от границы на расстояние

$$\delta \leq \frac{h}{2}, \quad (7)$$

где h – максимальный шаг рассматриваемой подсетки, по правилам, изложенным ниже, сдвигаются на границу области. В граничных подсетках различаются внутренние, то есть принадлежащие расчетной области, и внешние, то есть лежащие вне ее, узлы. В результате сдвига, кроме того, появляются граничные или локально модифицированные узлы, которые лежат на границе. В расчетах участвуют лишь внутренние и граничные узлы. Внешние узлы не участвуют в расчетах и не входят в сеточные шаблоны.

При проведении локальной модификации подсеток мы будем соблюдать два условия: 1) сохранение структурированности подсеток, 2) построение сеточных шаблонов, удовлетворяющих условию Делоне [11]. Для выполнения последнего условия достаточно построения нетупоугольных сеточных элементов. Соблюдение условия Делоне, обеспечивающее выполнение важных критериев качества сетки, перечень которых приводится в работе [11], необходимо при аппроксимации уравнения (1) для потенциала электрического поля. При расчете траекторий движения заряженных частиц и объемного заряда допускаются и тупоугольные треугольники. В этом случае гораздо важнее сохранение структурированности подсеток, так как ее нарушение влечет за собой дополнительные арифметико-логические операции по локализации сеточных элементов.

Локальная модификация осуществляется в два этапа. На первом из них узлы, удовлетворяющие условию (7), сдвигаются на границу по нормали к ней. Прямоугольный шаблон при этом может трансформироваться как в треугольный, так и в произвольный четырехугольный шаблон, который кратчайшей диагональю разбивается на два треугольника. В результате не исключено появление тупоугольных треугольников. Для их ликвидации поступаем следующим образом. Если вершина 2 тупого угла в треугольнике 123 не лежит на границе области (рис. 1), то из узла 2 опускаем нормаль 24 на линию 13, срединяющую граничные узлы, и продолжаем ее до пересечения с границей Γ в точке 5. Значение функции u_4 в точке 4 определяем путем линейной интерполяции по значениям в точках 2 и 5

$$u_4 = u_2 + l_{4,5} \frac{u_2 - u_5}{l_{2,5}}, \quad (8)$$

где $l_{i,j}$ – расстояние между точками i, j . Затем из сеточного уравнения в точке 2 при помощи соотношения (8) исключается u_4 и, следовательно, добавление точки 4 не сказывается на структурированности сетки.

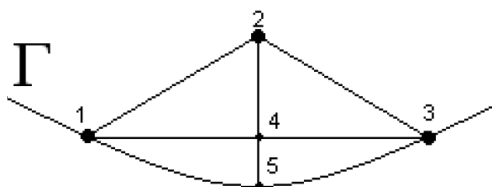


Рис. 1. Тупоугольный треугольник вблизи границы

Другой ситуацией, при которой появляются тупоугольные треугольники, является наличие двух тупых углов в четырехугольном шаблоне на одной стороне (на рис. 2 это сторона

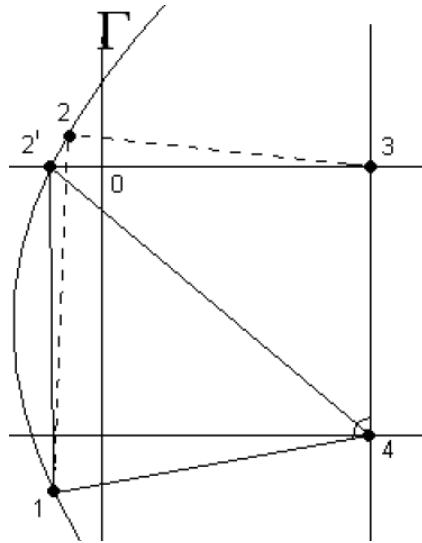


Рис. 2. Два тупых угла на одной стороне

34). Тогда один из тупых углов, например, 234 заменяется прямым $2'34$. Это фактически означает модификацию сетки в данной окрестности не по нормали, а вдоль координатной линии, то есть вместо сдвига 02 применяется сдвиг $02'$. Аналогичная процедура сдвига вдоль координатных линий применяется в случае, если два тупых угла появляются на стороне, примыкающей к Γ , а также при появлении тупоугольных треугольных шаблонов. Такая корректировка реализуется во время второго прохода по всем приграничным узлам. Сделаем важное замечание: если изначально делать сдвиг узлов вдоль координатных линий, а не по нормали, то это может привести к появлению узлов, отстоящих от границы на малое расстояние, то есть к ухудшению качества сетки, что, в свою очередь, как показали численные эксперименты, вызывает скачкообразное возрастание погрешности.

Сетка $\bar{\omega}_h$ на интерфейсе γ не подвергается модификации. В узлах, лежащих вблизи γ , при $\delta = O(h^2)$ (узел 2 на рис. 3) полагается $u_2 = u_4$, где 4 – точка пересечения координатной линии с границей Γ . При этом предполагается, что на данном куске границы задано условие Дирихле. При достаточно больших расстояниях от границы (узел 1 на рис. 3) проводится аппроксимация нормальной производной, входящей в уравнение Пуанкаре – Стеклова.

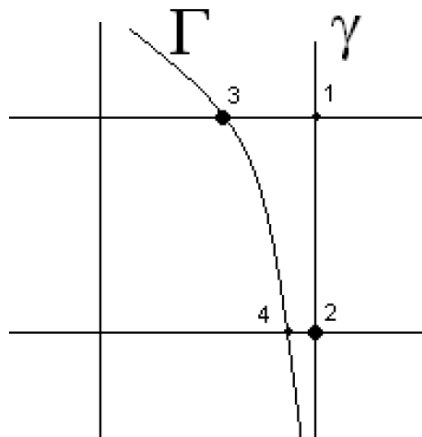


Рис. 3. Узлы интерфейса вблизи внешней границы

Макроузлы тоже не модифицируются, так как их сдвиг приводит к излому линий интерфейса, и, как следствие, к неоднозначности локальной модификации узлов смежных подсеток и существования нормальных производных. Допускается сдвиг узлов подсеток $\bar{\Omega}_{h,k}$, лежащих на γ . На рис. 4 изображена соответствующая ситуация.

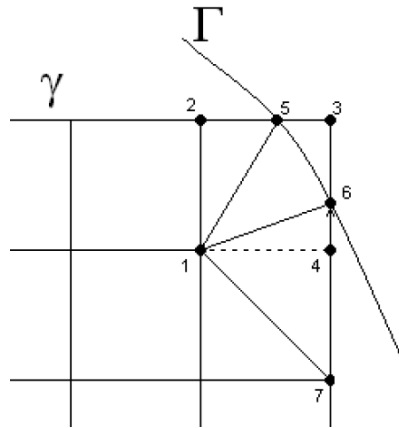


Рис. 4. Пересечение внешней границы и интерфейса

Макроузел 3 не сдвигается ни на границу Γ , ни в точку 5 пересечения границы с интерфейсом, несмотря на то, что $l_{3,5} < h/2$. В то же время, узел подсетки 4 сдвигается в точку 6 вдоль линии 34, являющейся куском интерфейса ($l_{4,6} < h/2$).

3. Сеточная структура данных (ССД)

ССД для квазиструктурированной сетки состоит из следующих основных массивов.

3.1. Макросетка Ω_H

$A_t(N_x, N_y)$ – целый двумерный массив типов подобластей (-1 – внешняя, 0 – внутренняя, 1 – граничная).

$A_a(N_x, N_y)$ – целый двумерный массив опорных адресов начал подмассивов узлов в подсетках $\Omega_{h,k}$ (для массивов B_t, U_B, F_B).

3.2. Квазиструктурированная сетка Ω_h

$B_t(N_B)$ – целый одномерный массив типов узлов в подсетках (-1 – внешний, 0 – внутренний, > 0 – модифицированный, причем данное число – адрес координат в массиве $C(2N_C)$ (см. ниже)).

$U_B(N_B)$ – вещественный одномерный массив значений искомой функции.

$F_B(N_B)$ – вещественный одномерный массив значений правой части исходного уравнения.

$C(2N_C)$ – вещественный одномерный массив координат локально модифицированных узлов.

3.3. Сетка на интерфейсе ω_h

$D_t(N_D)$ – целый одномерный массив типов узлов в сетке на интерфейсе (-1 – внешний или граничный, 0 – внутренний).

$U_D(N_D)$ – вещественный одномерный массив значений искомой функции.

$F_D(N_D)$ – вещественный одномерный массив значений правой части исходного уравнения.

$D_a(N_D)$ – целый одномерный массив опорных адресов начал подмассивов узлов в подсетках на отрезках интерфейса (для массивов D_t, U_D, F_D).

3.4. Макроузлы T_p

$E_t(N_x, N_y)$ – целый одномерный массив типов макроузлов (-1 – внешний или граничный, 0 – внутренний).

$U_E(N_x, N_y)$ – вещественный двумерный массив значений искомой функции.

$F_E(N_x, N_y)$ – вещественный двумерный массив значений правой части исходного уравнения.

Выше через N_ξ , где $\xi = A, B, C, D$, обозначены длины соответствующих массивов.

Принята следующая нумерация элементов и узлов во введенных сетках. Макроэлементы (подобласти) и макроузлы в структурированной макросетке Ω_H нумеруются стандартным образом: слева-направо, снизу-вверх. В структурированных подсетках $\Omega_{h,k}$ также вводится стандартная нумерация. Узлы сетки ω_h на интерфейсе нумеруются следующим образом: сначала слева-направо узлы, лежащие на координатных линиях, параллельных оси x (x -линиях), причем сами координатные линии перебираются снизу-вверх. Затем нумеруются снизу-вверх узлы на y -линиях, перебирая последние слева-направо. Аналогично нумеруются отрезки интерфейса.

Вещественные числа, фигурирующие в приведенной выше информации, представляются в ЭВМ с двойной точностью, а целые – в зависимости от массива, в который они входят, занимают от одного до четырех байт. Наибольший объем оперативной памяти отводится под хранение вещественных массивов значений искомой функции U_B и правой части F_B . Каждый такой массив имеет длину, равную числу узлов квазиструктурированной сетки Ω_h . Остальные массивы занимают гораздо меньший объем. Если сравнить объемы памяти, отводимые под хранение ССД в квазиструктурированной и в произвольной неструктурированной сетках, то можно отметить следующее. Массивы U_B, F_B должны храниться и в неструктурированных сетках. Кроме них в неструктурированных сетках необходимо запоминать поузловую, пореберную и поэлементную информацию, состоящую из нескольких вещественных и целых массивов каждый длиной, равной суммарному числу узлов. В квазиструктурированной сетке хранится лишь один дополнительный целый массив B_t длиной, равной суммарному числу узлов. Все остальные массивы имеют на порядок меньшую длину. Следовательно, можно утверждать, что квазиструктурированные сетки значительно экономичнее произвольных неструктурированных сеток.

4. Примеры построения квазиструктурированных сеток

На рис. 5 изображены квазиструктурированные сетки в цилиндрическом диоде. Расчетная область заключена между двумя четвертинками окружностей. На левом рис. 5 макросетка $\bar{\Omega}_H$ имеет параметры $N_x = N_y = 2$, а подсетки $\bar{\Omega}_{h,k}$ – параметры $n_{x,k} = n_{y,k} = 8$, то есть подсетки являются согласованными. Данный пример приведен с целью детальной демонстрации результатов локальной модификации. На правом рис. 5 параметры макросетки равны $N_x = N_y = 8$, а подсетки являются несогласованными, плотность узлов которых увеличивается по направлению к окружности с меньшим радиусом. Дело в том, что при стремлении радиуса данной окружности к нулю в задаче появляется особенность, которая и отслеживается путем увеличения числа узлов в подсетках.

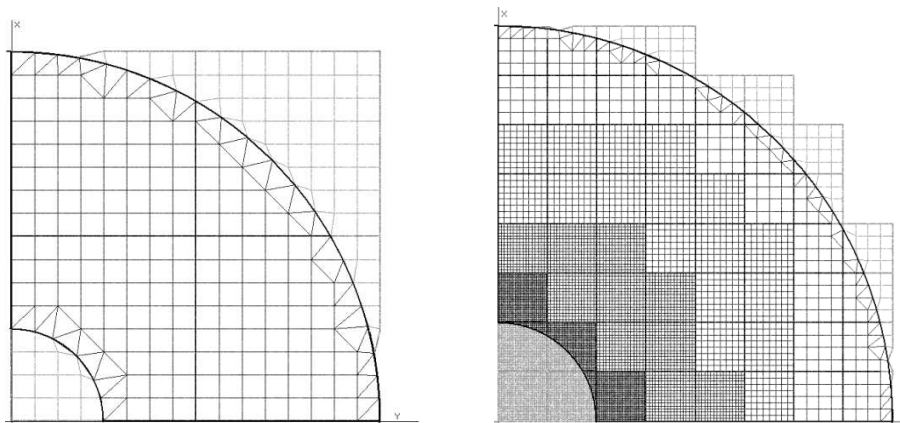


Рис. 5. Квазиструктурированные сетки в цилиндрическом диоде

Бледным цветом изображены внешние узлы, которые необходимы только для поддержания структурированности подсеток. В них вычисления не проводятся, поэтому качество сетки во внешней части области не имеет никакого значения.

Заключение

В настоящей работе предложены квазиструктурированные локально модифицированные сетки. По сравнению с обычными прямоугольными структурированными сетками они дают возможность локального сгущения или разрежения узлов, что в конечном итоге позволяет избежать введения лишних узлов, а также некачественных сеточных элементов со сторонами, длины которых существенно отличаются друг от друга. Подавляющее число элементов рассматриваемой сетки являются прямоугольными, за исключением малого числа элементов, примыкающих к границе. Это позволяет эффективно проводить расчет траекторий движения заряженных частиц в задачах сильноточной электроники, в которых многократно требуется решать задачу об определении сеточного элемента, содержащего заданную точку. Действительно, разработанная ССД позволяет по простейшим правилам найти подобласть, а затем по таким же правилам и сеточный элемент, содержащий заданную точку (исключение составляет малое число приграничных элементов). Это одно из отличий квазиструктурированных сеток от произвольных неструктурированных сеток.

Кроме того, по сравнению с неструктурированными сетками данные сетки имеют значительно меньшую по объему ССД. Небольшой объем хранимой информации не сказывается на эффективности: за счет сдвига приграничных узлов рассматриваемая сетка является адаптивной к границе, а за счет локальной регулировки плотности узлов – к неоднородностям решения. Качество сеточных шаблонов также не страдает, так как подавляющее

большинство элементов сетки имеют правильную форму, а приграничные элементы благодаря локальной модификации допускают качественную триангуляцию.

Наконец отметим, что решение краевых задач на квазиструктурированных сетках осуществляется итерационным методом декомпозиции, который естественным образом распараллеливается и поэтому может быть отображен без дополнительных алгоритмических затрат на многопроцессорные суперЭВМ.

Работа поддержана грантами РФФИ №12-01-00076 и СО РАН проекты ИП 104, ИП 126, ИП 130.

Литература

1. Сыровой, В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц / В.А. Сыровой. – М.: Энергоатомиздат, 2004. – 552 с.
2. Эмиссионная электроника / Н.Н. Коваль, Е.М. Окс, Ю.С. Протасов, Н.Н. Семашко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2009. – 596 с.
3. Ильин, В.П. О сеточных технологиях для двумерных краевых задач / В.П. Ильин, В.М. Свешников, В.С. Сынах // Сиб. Журн. Индустр. Матем. – 2000. – Т. 3, №1. – С. 124–136.
4. Свешников, В.М. Построение прямых и итерационных методов декомпозиции / В.М. Свешников // Сиб. Журн. Идустр. Матем. – 2009. – Т. 12, №3. – С. 99–109.
5. Василевский, Ю.В. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области / Ю.В. Василевский, М.А. Ольшанский. – М.: МГУ, 2007. – 103 с.
6. Свешников, В.М. Повышение точности расчета интенсивных пучков заряженных частиц / В.М. Свешников // Приклад. физика. – 2004. – №1. – С. 55–65.
7. Шайдуров, В.В. Многосеточные методы конечных элементов / В.В. Шайдуров. – М.: Наука. 1989. – 230 с.
8. Ильин, В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / В.П. Ильин. – Новосибирск: ИВМиМГ (ВЦ) СО РАН. 2001. – 318 с.
9. Мацокин, А.М. Автоматизация триангуляции областей с гладкой границей при решении уравнений эллиптического типа / А.М. Мацокин. – Новосибирск: Препринт ВЦ СО АН СССР, 1975. – № 15. – 15 с.
10. Sander, I.A. The program of Delaunay triangulation construction for the domain with the piecewise smooth boundary / I.A. Sander // Bull. Nov. Comp. Center, Num. Anal. – 1998. – P. 71–79.
11. Скворцов, А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А.В. Скворцов // Вычисл. методы и программирование. – 2002. – Т. 3, № 1. – С. 18–43.

Виктор Митрофанович Свешников, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительной физики, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Российская Федерация), victor@lapasrv.sccc.ru.

Дмитрий Олегович Беляев, аспирант, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Российская Федерация), victor@lapasrv.sccc.ru.

MSC 65N50

Construction of Quasi-Structured Locally Modified Grids for Solving Problems of High Current Electronics

V.M. Sveshnikov, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation),
D.O. Belyaev, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation)

An algorithm for constructing quasi-structured grids, which consist of the uniform rectangular subgrids and are built in two stages, is considered. At first, the computational domain is covered by a uniform rectangular macrogrid, and then an original uniform rectangular subgrid is set for each macroelement. It is essential that subgrids can be inconsistent. By adjusting a density of the subgrid nodes an adaptation of the quasi-structured grid to inhomogeneities within the domain is achieved. To adapt the grid to the exterior boundary we make local modifications consisting in a shift of the near boundary nodes to the boundary. Here we propose the algorithm of the local modification to construct a quasi-structured grid of high quality which does not break a subgrid structuring. The suggested quasi-structured grids profitably differ from structured grids in that they do not require extra nodes to support structuring and, also, storing a large amount of information as for unstructured ones. The solution of boundary value problems for quasi-structured grids is found by a decomposition of the computational domain into subdomains without overlapping. This method can be easily parallelized and, therefore, used to carry out calculations on multiprocessor supercomputers.

Keywords: quasi-structured grids, local modification, domain decomposition method, boundary value problems, high-current electronics.

References

1. Syrovoy V.A. *Introduction to the Theory of Intense Charged Particle Beams*. Moscow, Energoatomizdat, 2004. 552 p. (in Russian)
2. Koval N.N., Oks E.M., Protasov Yu.S., Semashko N.N. *Emission Electronics*. Moscow, Bauman MSTU Press, 2009. 596 p. (in Russian)
3. Ilyin V.P., Sveshnikov V.M., Sinih V.S. Grid Technologies for Two-Dimensional Boundary Value Problems. *J. of Applied and Industrial Mathematics*, 2000, vol. 3, no. 1, pp. 124–136. (in Russian)
4. Sveshnikov V.M. Construction of Direct and Iterative Methods of Decomposition. *J. of Applied and Industrial Mathematics*, 2009, vol. 12, no. 3, pp. 99–109. (in Russian)
5. Vasilevskiy Yu.V., Olshanskiy M.A. *A Short Course on Multigrid Methods and Domain Decomposition Methods*. Moscow, MSU, 2007. 103 p. (in Russian)
6. Sveshnikov V.M. Improving the accuracy of the calculation of intensive charged particle beams. *Applied Physics*, 2004, no. 1, pp. 55–65. (in Russian)
7. Shaidurov V.V. *Multigrid Finite Element Methods*. Moscow, Science Publishers. 1989. 230 p.
8. Ilyin V.P. *Methods of Finite Differences and Finite Volumes for Elliptic Equations*. Novosibirsk, ICM MG SB RAS, 2001. 318 p. (in Russian)
9. Matsokin A.M. *Automated Triangulation of Domains with Smooth Boundary in the Solution of Equations of Elliptic Type*. Novosibirsk, Preprint CC SB AS USSR, 1975, no. 15, 15 p. (in Russian)
10. Sander I.A. The Program of Delaunay Triangulation Construction for the Domain with the Piecewise Smooth Boundary. *Bull. Nov. Comp. Center, Num. Anal.*, 1998, pp. 71–79. (in Russian)
11. Skvortcov A.V. Overview of Algorithms for Constructing Delaunay Triangulation. *Numerical Methods and Programming*, 2002, vol. 3, no. 1, pp. 18–43. (in Russian)

Поступила в редакцию 5 февраля 2012 г.