КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков

OPTIMAL CONTROL OF SOLUTIONS OF INITIAL-FINISH PROBLEM FOR THE LINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS

N.A. Manakova, A.G. Dylkov

В работе исследовано оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа с (L,p)-секториальным оператором.

Ключевые слова: оптимальное управление, начально-конечная задача, уравнения соболевского типа.

An optimal control of solutions of an initial-finish problem for the linear Sobolev type equations with (L,p)-sectorial operator are investigated in this work.

Keywords: optimal control, initial-finish problem, Sobolev type equations.

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, а оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Y}$ $(\tau < \infty)$ подлежат дальнейшему определению. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M (см. [1, гл. 4]). Пусть вдобавок оператор M (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (см. [1, гл. 5]), тогда существуют вырожденные аналитические полугруппы операторов $X^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu$ и $Y^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu$, где $t \in \mathbb{R}_+$, а контур $\Gamma \subset S^L_{a,\Theta}(M)$ такой, что $|\arg\mu| \to \Theta$ при $\mu \to \infty$, $\mu \in \Gamma$, $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Положим $\mathfrak{X}^0(\mathfrak{Y}^0) = \ker X^\bullet(\ker Y^\bullet)$, $\mathfrak{X}^1(\mathfrak{Y}^1) = \operatorname{im} X^\bullet(\operatorname{im} Y^\bullet)$ и обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathfrak{X}^k(\mathfrak{X}^k \cap \operatorname{dom} M)$, $k = 0, 1$. В дальнейшем нам потребуются два условия:

$$\mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1 = \mathfrak{X} \ (\mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1 = \mathfrak{Y}), \tag{A1}$$

$$\text{существует оператор } L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1). \tag{A2}$$

Пусть L-спектр оператора M представим в виде

$$\sigma^L(M) = \sigma^L_{fin}(M) \cup \sigma^L_{in}(M), \tag{A3}$$

где $\sigma^L_{fin}(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей γ, причем $\gamma \cap \sigma^L(M) = \emptyset$.

Построим относительно спектральные проекторы [2] $P_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)d\mu$, $P_{in} = P - P_{fin}$. Итак, пусть выполнены условия $(A1)$–$(A3)$. Для уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \tag{1}$$

рассмотрим начально-конечную задачу

$$P_{in}(x(0)-x_0)=0,\ P_{fin}(x(\tau)-x_\tau)=0, \tag{2}$$

где $\tau\in\mathbb{R}_+$, x_0, $x_\tau\in\mathfrak{X}$.

Определение 1. Вектор-функцию $x\in H^1(\mathfrak{X})=\{x\in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}):\dot{x}\in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением уравнения* (1), если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x=x(t)$ уравнения (1) назовем *сильным решением начально-конечной задачи,* если $P_{fin}(x(0)-x_0)=0$ и $\lim\limits_{t\to\tau-}P_{in}(x(t)-x_\tau)=0$.

Построим пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y})=\{v\in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}):v^{(p+1)}\in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}),p\in\{0\}\cup\mathbb{N}\}$.

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален, и выполнены условия* (A1)–(A3). *Тогда для любых $x_0,x_\tau\in\mathfrak{X}$ и $y\in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (2) для уравнения (1).*

Пространство управлений $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ гильбертово, в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$. Выделим в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$ – *множество допустимых управлений.* Введем в рассмотрение $\mathfrak{Z}$ – некоторое гильбертово пространство наблюдений и оператор $C\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$, задающий наблюдение $z(t)=Cx(t)$. Заметим, что если $x\in H^1(\mathfrak{X})$, то $z\in H^1(\mathfrak{Z})$.

Определение 2. Вектор-функцию $u_0\in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением решениями задачи* (2.1), (0.2), если

$$J(u_0)=\min\nolimits_{u\in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})}J(u). \tag{3}$$

Нашей целью является доказательство существования единственного управления $u_0\in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал стоимости

$$J(u)=\sum_{q=0}^{1}\int\limits_0^\tau\|z^{(q)}-z_0^{(q)}\|^2_{\mathfrak{Z}}dt+\sum_{q=0}^{p+1}\int\limits_0^\tau\left\langle N_qu^{(q)},u^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{U}}dt.$$

Здесь $N_q\in\mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q=0,\ 1,\ \ldots,\ p+1$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_0=z_0(t)$ – желаемое наблюдение. Справедлива

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,p)-секториален, и выполнены условия* (A1)–(A3). *Тогда для любых $y\in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0,x_\tau\in\mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (1), (2).*

Литература

1. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Koln; Tokyo, 2003.
2. Загребина С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». – 2008. – №15 (115), вып. 1. – С. 23 – 26.

Манакова Наталья Александровна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, manakova@hotbox.ru.

Дыльков Андрей Геннадьевич, кафедра математического анализа, Магнитогорский государственный университет, dylkov@masu.ru.

Поступила в редакцию 11 марта 2011 г.