УДК 519.642.8

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ СНИЗУ ОПЕРАТОРОВ

С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова

NUMERIC METHOD OF FINDING THE EIGENVALUES FOR THE DISCRETE LOWER SEMIBOUNDED OPERATORS

S.I. Kadchenko, L.S. Ryazanova

В работе разработан эффективный метод нахождения собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных снизу операторов, когда собственные значения невозмущенных операторов имеют произвольную кратность. Получены новые результаты, позволяющие применять метод специалистам, имеющие начальные знания в области спектральной теории операторов.

Ключевые слова: поправки теории возмущений, дискретные и самосопряженные операторы, собственные значения, собственные функции.

In the work the effective method of finding the eigenvalues of the perterbed discrete lower semibounded operators, when the eigenvalues of not perterbed operators have an arbitary multiplicity, is developed. New results, allowing to apply this method by experts, having basic knowledge in the area of the spectral theory of operators are received.

Keywords: amendments of the theory of pertubation, discrete and the self-adjoint operators, eigenvalues, eigenfunctions.

Введение

В работах [1 – 11] был разработан новый неитерационный метод вычисления собственных значений полуограниченных снизу дискретных операторов, который был назван методом *регуляризованных следов* (РС). Развивая метод РС, в статье получены простые формулы для вычисления собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов в случае, когда собственные значения невозмущенных операторов имеют произвольную кратность. Излагаются новые результаты, позволяющие с успехом применять метод РС специалистам, имеющим начальные знания в области спектральной теории операторов.

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений оператора $T + P$

$$\Big(T + P\Big)\varphi = \beta\varphi, \tag{1}$$

где T – дискретный полуограниченный снизу оператор, P – ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, которые занумерованны в порядке возрастания собственных значений μ_n по величине с учетом кратности. Обозначим через ν_n кратность собственного значения μ_n, а количество всех неравных друг другу собственных значений μ_n, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n|} < 1$, тогда первые $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ являются решениями системы m_0 нелинейных уравнений вида [1]

$$\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0),\ p = \overline{1, m_0}. \tag{2}$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0) = \dfrac{(-1)^k p}{2\pi k i} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1} \Big[P R_\mu(T) \Big]^k d\mu$ – k-е поправки теории возмущений оператора $T+P$ целого порядка p, $R_\mu(T)$ - резольвента оператора T.

Известно, что в этом случае контур T_{n_0} содержит одинаковое количество собственных значений операторов T и $T+P$ [12].

Система уравнений (2) лежит в основе численного метода РС, позволяющего находить собственные значения возмущенных самосопряженных операторов в случае, когда самосопряженные операторы имеют собственные значения с произвольной кратностью.

В работе [9] показано, что *если T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. При этом система собственных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является базисом H, и существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$, тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = Sp\mathbf{A}^p - \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \delta_p(m_0),\ p = \overline{1, m_0}, \tag{3}$$

$$|\delta_1(m_0)| \leq \Big| \sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0) \Big| + n_0 \rho_{n_0} \frac{q^{t_1+1}}{1-q},\ q = \max_{n \geq 1} q_n,\ t_1 \in N,$$

$$|\delta_p(m_0)| \leq \Big| \sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \Big(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} +$$

$$+ \sum_{\substack{j_2,\ldots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p} \{j_n\} = \varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} \Big) \Big| + p n_0 \rho_{n_0}^p \frac{q^{t_p+1}}{1-q},\ p = \overline{2, m_0},\ t_p \in N.$$

Здесь $\delta_p(m_0) = \sum\limits_{k=1}^{m_0} \widetilde{\delta}_{kp}(m_0)$, $\widetilde{\delta}_{kp}(m_0) = \beta_k^p - \widetilde{\beta}_k^p(m_0)$, $\{\widetilde{\beta}_k(m_0)\}_{k=1}^{m_0}$ – приближенные значения по Бубнову – Галеркину соответствующих собственных значений $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ оператора $T+P$, $a_{km} = \mu_k \delta_{km} + V_{km}$, δ_{kn} – символ Кронекера, $V_{km} = (P\omega_k, \omega_m)$, $r = \begin{cases} s+1,\ s \neq p, \\ 1,\ s = p. \end{cases}$ След p – ой степени матрицы $\mathbf{A}$ вычисляется по формуле

$$Sp\mathbf{A}^p(m_0) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_p = 1}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r}. \tag{4}$$

1. Формулы для вычисления собственных значений методом РС

В статье [11] получены формулы, позволяющие вычислять собственные значения возмущенных дискретных операторов для случая, когда собственные значения невозмущенного оператора имеют произвольную кратность. Для их использования необходимо почленно суммировать числовые ряды Релея – Шредингера $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0)$, для чего надо вычислять поправки теории возмущений оператора $T+P$, которые находятся путем суммирования кратных числовых рядов. Причем кратность этих рядов на единицу меньше номера поправки. Это вызывает большие вычислительные трудности при применении этих формул. В данном разделе получены простые формулы, которые лишены этого недостатка и позволяющие с высокой *вычислительной эффективностью* находить собственные значения дискретного полуограниченного снизу оператора вида $T+P$, когда собственные значения и собственные функции оператора T известны, а для возмущающего оператора P выполнены неравенства $q_n<1$ для любых натуральных n.

Теорема 1. *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для всех $n\in N$ выполняются неравенства $q_n<1$ и собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T является базисом в H, то собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:*

$$\beta_n=\mu_n+(P\omega_{n,n},\omega_{n,n})+\tilde{\delta}_1(n),\ n=\overline{1,m_0}, \tag{5}$$

где для $\tilde{\delta}_1(n)$ справедливы оценки $|\tilde{\delta}_1(n)|\le(2n-1)\rho_n\dfrac{q^2}{1-q}$.

Доказательство. Из системы уравнений (2) для $m_0=n$ и $m_0=n-1$ при $p=1$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k=\sum_{k=1}^{n}\mu_k+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}(n), \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k=\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(1)}(n-1). \tag{7}$$

Вычитая из уравнения (6) уравнение (7), найдем

$$\beta_n=\mu_n+\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(1)}(n)-\alpha_k^{(1)}(n-1)]. \tag{8}$$

Используя (3), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(1)}(n)-\alpha_k^{(1)}(n-1)]=Sp\mathbf{A}(n)-Sp\mathbf{A}(n-1)-\mu_n+\delta_1(n)-\delta_1(n-1). \tag{9}$$

Из равенства (4), получаем

$$Sp\mathbf{A}(n)-Sp\mathbf{A}(n-1)=(P\omega_{nn},\omega_{nn}). \tag{10}$$

Подставляя равенства (9) и (10) в (8), найдем формулы (5).

Оценки погрешностей $\tilde{\delta}_1(n)$ вычисления собственных значений оператора $T+P$, входящие в формулы (5), найдем, используя соотношения (3)

$$|\tilde{\delta}_1(n)|=|\delta_1(n)-\delta_1(n-1)|\le|\delta_1(n)|+|\delta_1(n-1)|\le$$

$$\leq \Big[n\rho_n + (n-1)\rho_{n-1}\Big]\frac{q^2}{1-q} \leq (2n-1)\rho_n\frac{q^2}{1-q}.$$

□

2. Численный эксперимент

Для проверки полученных выше теоретических положений рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа, который в некоторых случаях имеет кратный спектр. Пусть оператор $T = -\Delta$ задан на прямоугольнике $\Pi = [0,a] \times [0,b]$ с границей Γ. Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. В качестве возмущающего оператора P возьмем оператор умножения на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $p(x,y)$, определенную на прямоугольнике Π.

Рассмотрим спектральную задачу

$$(T+P)\varphi = \beta\varphi,\ \varphi \in D_T, \tag{11}$$

$$D_T = \Big\{\varphi \mid \varphi \in C^2(\Pi)\bigcap C[\Pi], \Delta\varphi \in L_2[\Pi] : \varphi\Big|_{\Gamma} = 0\Big\}.$$

Известно, что собственные значения μ_{nk} и собственные функции ω_{nk} оператора T имеют вид:

$$\mu_{nk} = \pi^2\Big(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\Big),\ \omega_{nk}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b},\quad n,k = \overline{1,\infty}.$$

Система собственных функций $\{\omega_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2[\Pi]$. В случае когда $\dfrac{a^2}{b^2}$, – рациональное число оператор T имеет кратные собственные значения.

Пронумеруем собственные значения $\{\mu_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ и собственные функции $\{\omega_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ оператора T одним индексом в порядке возрастания величин μ_{nk} с учетом кратности.

В таблице приведены результаты вычислений первых собственных значений спектральной задачи (11), найденных методом РС по формулам (5) и методом Бубнова-Галеркина. В первом случае собственные значения обозначены через $\widehat{\beta}_n$, во втором – $\widetilde{\beta}_n$.

Проведенные многочисленные расчеты показывают, что результаты вычислений первых собственных значений возмущенного оператора Лапласа методом РС, используя формулы (5), и методом Бубнова – Галеркина хорошо согласуются. Надо отметить, что время, затраченное персональным компьютером при вычислении первых 19 собственных значений оператора $T+P$ методом РС примерно на *два порядка меньше,* чем при вычислении методом Бубнова – Галеркина. При этом, чем больше номер вычисляемого собственного значения, тем больше разница во времени вычислений. Это связано с тем, что для вычисления собственных значений $\{\beta_k\}_{k=1}^{n}$ оператора $T+P$ методом Бубнова – Галеркина надо находить собственные значения матрицы порядка $n \times n$, а для их вычисления методом РС используются простые формулы (5).

Выводы

Разработан новый неитерационный метод вычисления собственных значений возмущенных самосопряженных операторов. Проведенные численные эксперименты показали его надежность и вычислительную эффективность по сравнению с методом Бубнова – Галеркина.

Таблица

Значения $\{\widehat{\beta}_n\}_{n=1}^{19}$ и $\{\widetilde{\beta}_n\}_{n=1}^{19}$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $a = 1$, $b = 1$ и $p(x, y) = (1 + i)x^4y^2$

n	μ_n	$\widehat{\beta}_n$	$\widetilde{\beta}_n$	$\lvert\widehat{\beta}_n - \widetilde{\beta}_n\rvert$	$\frac{\lvert\widehat{\beta}_n - \widetilde{\beta}_n\rvert}{\lvert\widetilde{\beta}_n\rvert}100\%$
1	$19,7392088$	$19,771456 + 0,0322467i$	$19,771455 + 0,0321176i$	$0,000129$	$0,000653$
2	$49,3480220$	$49,384603 + 0,0365811i$	$49,369087 + 0,0210305i$	$0,021968$	$0,044157$
3	$49,3480220$	$49,397668 + 0,0496464i$	$49,413185 + 0,0649870i$	$0,021819$	$0,044157$
4	$79,9568352$	$79,013155 + 0,0563197i$	$79,013155 + 0,0562089i$	$0,000111$	$0,000140$
5	$98,6960440$	$98,733428 + 0,0373838i$	$98,733093 + 0.0369679i$	$0,005338$	$0,000541$
6	$98,6960440$	$98,749450 + 0,0534060i$	$98,749785 + 0,0537343i$	$0,000469$	$0,000475$
7	$128,3048572$	$128,362413 + 0,0575555i$	$128,336051 + 0,0311884i$	$0,037285$	$0,029053$
8	$128,3048572$	$128,365442 + 0,0605845i$	$128,391804 + 0,0869440i$	$0,037280$	$0,029036$
9	$167,7832758$	$167,820940 + 0,0376647i$	$167,820931 + 0,0375377i$	$0,000127$	$0,000076$
10	$167,7832758$	$167,838036 + 0,0547615i$	$167,838045 + 0,0547263i$	$0,000036$	$0,000022$
11	$177,6528792$	$177,714793 + 0,0619139i$	$177,714794 + 0,0618383i$	$0,000076$	$0,000043$
12	$197,3920882$	$197,450076 + 0,0579879i$	$197,448189 + 0,0561273i$	$0,002650$	$0,001342$
13	$197,3920882$	$197,454210 + 0,0621223i$	$197,456097 + 0,0642002i$	$0,000281$	$0,000142$
14	$246,7401100$	$246,802489 + 0,0623792i$	$246,773116 + 0,0330075i$	$0,041539$	$0,016833$
15	$246,7401100$	$246,803595 + 0,0634854i$	$246,832969 + 0,0930598i$	$0,041683$	$0,016887$
16	$256,6097144$	$256,647509 + 0,0377948i$	$256,647509 + 0,0377554i$	$0,000039$	$0,000015$
17	$256,6097144$	$256,665110 + 0,0553959i$	$256,665111 + 0,0553993i$	$0,000004$	$0,000001$
18	$286,2185276$	$286,276716 + 0,0581881i$	$286,276634 + 0,0582852i$	$0,000127$	$0,000044$
19	$286,2185276$	$286,281370 + 0,0628419i$	$286,281451 + 0,0631437i$	$0,000313$	$0,000011$

Литература

1. Вычисление первых собственных значений задачи гидродинамической устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 742 – 746.
2. Кадченко, С.И. Вычисление сумм рядов Релея – Шредингера возмущенных самосопряженных операторов / С.И. Кадченко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1494 – 1505.
3. Вычисление первых собственных чисел краевой задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В.А. Садовничий, В.А. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 1. – С. 50 – 53.
4. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // Докл. Акад. наук. – 2001. – Т. 378, № 4. – С. 443 – 446.
5. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // Докл. Акад. наук. – 2001. – Т. 380, № 2. – С. 160 – 163.
6. Новый метод вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической теории устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.Ф. Кравченко, В.А. Садовничий // Докл. Акад. наук. – 2001. – Т. 381, № 3. – С. 320 – 324.

7. Кадченко С.И. Новый метод вычисления первых собственных чисел дискретных несамосопряженных операторов / С.И. Кадченко // Уравнения соболевского типа: сб. науч. работ. – Челябинск, 2002. – С. 42 – 59.
8. Кадченко, С.И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С.И. Кадченко, И.И. Кинзина, // Журн. вычисл. математики и мат. физики. –2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265 – 1272.
9. Кадченко, С.И. Вычисление сумм рядов Рэлея – Шредингера возмущенных самосопряженных операторов / С.И. Кадченко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2007. – Т. 47, № 9. – С. 1494 – 1505.
10. Кадченко, С.И. Метод регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестн. ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 4, № 37(170). – С. 4 – 23.
11. Кинзина, И.И. Нахождение собственных чисел возмущенных дискретных операторов / И.И. Кинзина // Вестн. ЧелГУ. Сер. «Математика, механика, информатика». – 2008. – Вып. 10, № 6(107). – С. 34 – 43.
12. Садовничий, В.А. Теория операторов: учеб. для вузов / В.А. Садовничий. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1999.– 368 с.

Кадченко Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет, kadchenko@masu.ru.

Рязанова Любовь Сергеевна, старший преподаватель, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет, ryazanova2006@rambler.ru.

Поступила в редакцию 15 января 2011 г.