УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА

Г.А. Лукина

BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE LINEARIZED KORTEWEG – DE VRIES EQUATION

G.A. Lukina

Для линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза исследуются краевые задачи с заданием граничных условий интегрального вида. Доказываются теоремы разрешимости в классах регулярных решений.

Ключевые слова: линеаризованное уравнение Кортевега – де Фриза, интегральные граничные условия, регулярное решение, существование и единственность.

The boundary value problems with integral conditions for the linearized Korteweg – de Vries equation are investigated. We prove the existence and uniqueness theorems in the class of regular solutions.

Keywords: linearized Korteweg – de Vries equation, integral boundary conditions, regular solution, existence and uniqueness.

Введение

Уравнения с кратными характеристиками активно изучаются в школе академика АН Республики Узбекистан Т.Д. Джураева – см. [1, 2]. Но нелокальные задачи с интегральными условиями для таких уравнений ранее не исследовались. Используемый в данной работе метод будет близок к методу [3, 4].

1. Постановка задач

Пусть Ω есть интервал (0,1) оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $\mu(x,t)$, $f(x,t)$, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$, $K_3(x,t)$– заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Краевая задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_t + u_{xxx} - \mu(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = \int\limits_0^1 K_1(x,t)u(x,t)dx, \quad u(1,t) = \int\limits_0^1 K_2(x,t)u(x,t)dx,$$

$$u_x(1,t) = \int\limits_0^1 K_3(x,t)u(x,t)dx, \quad 0 < t < T. \tag{1.3}$$

Краевая задача II: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), *а так же условия*

$$u_{xx}(0,t) = \int\limits_0^1 K_1(x,t)u(x,t)dx, \quad u(1,t) = \int\limits_0^1 K_2(x,t)u(x,t)dx,$$

$$u_x(1,t) = \int\limits_0^1 K_3(x,t)u(x,t)dx, \quad 0 < t < T. \tag{1.4}$$

2. Разрешимость краевой задачи I

Обозначим для краткости

$$V_0 = W^{3,1}_{2,x,t}(Q);$$

норма в пространстве V_0 есть стандартная норма в анизотропном соболевском пространстве.

Пусть ε есть фиксированное положительное число, V_1 есть пространство

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in V_0, \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q), \quad v_{xxxxxx}(x,t) \in L_2(Q)\};$$

норму в V_2 определим равенством

$$\|v\|_{V_1} = (\int\limits_0^T \int\limits_0^1 (\varepsilon v_{tt}^2 + \varepsilon v_{xxxxxx}^2 + v_t^2 + v_{xxx}^2)dxdt)^{\frac{1}{2}}.$$

Прежде чем доказывать разрешимость задачи I, заметим, что для функций $v(x,t)$ из пространства V_1 имеют место следующие неравенства:

$$\int\limits_0^1 v_x^2(x,t)dx \le \delta_0 \int\limits_0^1 v_{xxx}^2(x,t)dx + C(\delta_0) \int\limits_0^1 v^2(x,t)dx; \tag{2.1}$$

$$\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx \le \delta_0 \int\limits_0^1 v_{xxx}^2(x,t)dx + C(\delta_0) \int\limits_0^1 v^2(x,t)dx, \tag{2.2}$$

в которых δ_0 есть произвольное положительное число, число C вычисляется вполне определенным образом через δ_0.

Проведем некоторые вспомогательные построения. Пусть $B_i u$ есть интегральные операторы, действие которых определяется равенствами

$$(B_i u)(t) = \int\limits_0^1 K_i(y,t)u(y,t)dy, \quad i = \overline{1,3},$$

$w(x,t)$ есть функция

$$w(x,t) = u(x,t) - (x-1)^2(B_1 u)(t) + x(x-2)(B_2 u)(t) - x(x-1)(B_3 u)(t). \tag{2.3}$$

Умножая (2.3) поочередно на $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$ и интегрируя по x в пределах от 0 до 1, получим систему относительно $(B_1u)(t)$, $(B_2u)(t)$, $(B_3u)(t)$:

$$\begin{aligned}
&[1-\int\limits_0^1(x-1)^2K_1(x,t)dx](B_1u)(t)+\int\limits_0^1 x(x-2)K_1(x,t)dx(B_2u)(t)-\\
&-\int\limits_0^1 x(x-1)K_1(x,t)dx(B_3u)(t)=(B_1w)(t),\\
&-\int\limits_0^1(x-1)^2K_2(x,t)dx(B_1u)(t)+[1+\int\limits_0^1 x(x-2)K_2(x,t)dx](B_2u)(t)-\\
&-\int\limits_0^1 x(x-1)K_2(x,t)dx(B_3u)(t)=(B_2w)(t),\\
&-\int\limits_0^1(x-1)^2K_3(x,t)dx(B_1u)(t)+\int\limits_0^1 x(x-2)K_3(x,t)dx(B_2u)(t)+\\
&+[1-\int\limits_0^1 x(x-1)K_3(x,t)dx](B_3u)(t)=(B_3w)(t).
\end{aligned}$$

Обозначим через $\Delta_1(t)$ определитель этой системы. Если он не равен нулю при $t\in[0,T]$, то имеют место равенства

$$\begin{aligned}
(B_1u)(t)&=a_1(t)(B_1w)(t)+a_2(t)(B_2w)(t)+a_3(t)(B_3w)(t),\\
(B_2u)(t)&=b_1(t)(B_1w)(t)+b_2(t)(B_2w)(t)+b_3(t)(B_3w)(t),\\
(B_3u)(t)&=c_1(t)(B_1w)(t)+c_2(t)(B_2w)(t)+c_3(t)(B_3w)(t),
\end{aligned}$$

где функции $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$ вычисляются вполне определенным образом через $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$.

Из этих равенств и из (2.3) следует, что функция $u(x,t)$ имеет представление

$$u(x,t)=w(x,t)+A_{11}(x,t)(B_1w)(t)+A_{21}(x,t)(B_2w)(t)+A_{31}(x,t)(B_3w)(t). \tag{2.4}$$

Определим операторы B и L:

$$(Bu)(x,t)=u(x,t)-(x-1)^2(B_1u)(t)+x(x-2)(B_2u)(t)-x(x-1)(B_3u)(t),$$

$$Lu=u_t+u_{xxx}-\mu(x,t)u.$$

Далее, определим функцию $\Phi(x,t,u)$

$$\begin{aligned}
&\Phi(x,t,u)=\int\limits_0^1[(x-1)^2K_1(y,t)-x(x-2)K_2(y,t)+x(x-1)K_3(y,t)]u_{yyy}(y,t)dy+\\
&+\int\limits_0^1[-(x-1)^2K_{1t}(y,t)+x(x-2)K_{2t}(y,t)-x(x-1)K_{3t}(y,t)+\\
&+(\mu(x,t)-\mu(y,t))((x-1)^2K_1(y,t)+x(x-2)K_2(y,t)+x(x-1)K_3(y,t))]u(y,t)dy.
\end{aligned}$$

Продолжая функцию $\Phi(x,t,u)$ с помощью (2.4) и используя условие

$$K_i(0,t)=K_i(1,t)=K_{iy}(0,t)\equiv 0,\quad i=\overline{1,3}, \tag{2.5}$$

получим представление:

$$\Phi(x,t,u)=\Phi_1(x,t,w)=\int\limits_0^1 N_1(x,y,t)w(y,t)dy,$$

в котором $N_1(x,y,t)$ есть функция, вычисляемая через функции $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$, и $\mu(x,t)$.

Используя неравенство Гельдера, нетрудно получить оценку

$$\Phi_1^2 \le \overline{N}_1 \int\limits_0^1 w^2(x,t)dx, \tag{2.6}$$

в которой постоянная $\overline{N}_1$ определяется функциями $\mu(x,t)$, $K_i(x,\tau), i=\overline{1,3}$.

Введем обозначения: $\mu_1 = \max\limits_{\overline{Q}} |\mu_{xxx}(x,t)|$; $\mu_2 = \max\limits_{\overline{Q}} |\mu_{xx}(x,t)|$; $\mu_3 = \max\limits_{\overline{Q}} |\mu_x(x,t)|$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (2.5) *и*

$$\mu(x,t) \in C^3(\overline{Q}), \quad -\mu(x,t) \ge \mu_0 > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \tag{2.7}$$

$$\mu_t(x,T) \le 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{2.8}$$

$$\mu_0^2 - \overline{N}_1 > 0; \tag{2.9}$$

$$K_i(x,t) \in C^3(\overline{Q}), \quad i=\overline{1,3};$$

$$\Delta_1(t) \ne 0 \quad \forall t \in [0,T];$$

$$f(x,t) \in L_2(Q).$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_1.

Доказательство. Пусть $g(x,t)$ есть заданная функция из $L_2(Q)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$w_t + w_{xxx} - \mu(x,t)w = g(x,t) + \Phi_1(x,t,w) \tag{2.10}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} &w(x,0)=0, \quad x\in\Omega, \\ &w(0,t)=w(1,t)=w_x(1,t)=0, \quad t\in(0,T). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения (2.10) докажем, используя метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

Пусть ε есть фиксированное положительное число. Рассмотрим краевую задачу с параметром ε: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$-\varepsilon w_{tt} + w_t - \varepsilon w_{xxxxxx} + w_{xxx} - \mu(x,t)w = g(x,t) + \Phi_1(x,t,w) \tag{2.10_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} &w(x,0)=w_t(x,T)=0, \quad x\in\Omega, \\ &w(0,t)=w(1,t)=w_x(1,t)=0, \\ &w_{xxx}(0,t)=w_{xxx}(1,t)=w_{xxxx}(0,t)=0, \quad t\in(0,T). \end{aligned} \tag{2.11*}$$

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$-\varepsilon w_{tt} + w_t - \varepsilon w_{xxxxxx} + w_{xxx} - \mu(x,t)w = g(x,t) + \lambda\Phi_1(x,t,w) \tag{$2.10_{\varepsilon,\lambda}$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.11*).

Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения (($2.10_{\varepsilon,\lambda}$) докажем с помощью теоремы о методе продолжения по параметру [5].

Обозначим через Λ множество всех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача $(2.10_{\varepsilon,\lambda})$, (2.11^*) имеет решение $w(x,t)$, принадлежащее пространству V_1 при выполнении всех условий теоремы 1, фиксированном ε и любой функции $g(x,t)$ из $L_2(Q)$. Если мы покажем, что множество Λ не пусто, открыто и замкнуто, то оно, как известно (см.[5]), будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$.

При $\lambda = 0$ краевая задача $(2.10_{\varepsilon,0})$, (2.11^*) при выполнении всех условий теоремы 1 разрешима в пространстве V_1 – см. [6]. Из этого следует, что число 0 принадлежит Λ и тем самым – что множество Λ не пусто.

Открытость и замкнутость множества Λ доказывается с помощью априорных оценок. Установим их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[-\varepsilon w_{tt}+w_t-\varepsilon w_{xxxxxx}+w_{xxx}-\mu(x,t)w]wdxdt=\int\limits_0^T\int\limits_0^1[g(x,t)+\lambda\Phi_1(x,t,w)]wdxdt.$$

Интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции $w(x,t)$, неравенство Юнга и условие (2.7), нетрудно перейти к следующему неравенству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[\varepsilon w_t^2+\varepsilon w_{xxx}^2+\mu_0 w^2]dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w^2(x,T)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^T w_x^2(0,t)dt\le$$
$$\le\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 w^2dxdt+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 g^2(x,t)dxdt+\frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 w^2dxdt+\frac{1}{2\delta_2^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1\Phi_1^2(x,t,w)dxdt,$$

в котором δ_1, δ_2 есть произвольные положительные числа.

Пусть $\delta_2=\sqrt{\mu_0}$, тогда получаем неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[\varepsilon w_t^2+\varepsilon w_{xxx}^2+\frac{\mu_0}{2}w^2]dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w^2(x,T)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^T w_x^2(0,t)dt\le$$
$$\le\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 w^2dxdt+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 g^2(x,t)dxdt+\frac{1}{2\mu_0}\int\limits_0^T\int\limits_0^1\Phi_1^2(x,t,w)dxdt.$$

Далее, продолжаем полученное неравенство с помощью (2.6)

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[\varepsilon w_t^2+\varepsilon w_{xxx}^2+\frac{\mu_0}{2}w^2]dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 w^2(x,T)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^T w_x^2(0,t)dt\le$$
$$\le\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 w^2dxdt+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 g^2(x,t)dxdt+\frac{\overline{N}_1}{2\mu_0}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 w^2dxdt.$$

Используя условия (2.9) и подбирая число δ_1 малым, нетрудно получить оценку

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[\varepsilon w_t^2+\varepsilon w_{xxx}^2+w^2]dxdt\le M_1, \tag{2.12}$$

с постоянной M_1, определяющейся числом μ_0 и функцией $g(x,t)$.

Заметим, что имеет место следующая оценка

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1\Phi_1^2dxdt\le M_2, \tag{2.13}$$

с постоянной M_2, определяющейся функциями $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$, и $\mu(x,t)$.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_0^T\int_0^1[-\varepsilon w_{tt}+w_t-\varepsilon w_{xxxxxx}+w_{xxx}-\mu(x,t)w]w_{tt}dxdt=-\int_0^T\int_0^1[g(x,t)+\lambda\Phi_1(x,t,w)]w_{tt}dxdt.$$

Вновь интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции $w(x,t)$, неравенство Юнга и условие (2.7), от данного равенства переходим к следующему неравенству

$$\int_0^T\int_0^1[\varepsilon w_{tt}^2+\varepsilon w_{xxxt}^2+\mu_0 w_t^2+\tfrac{1}{2}\mu_{tt}(x,t)w^2(x,t)]dxdt+$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^T w_{xt}^2(0,t)dt+\tfrac{1}{2}\int_0^1 w_t^2(x,0)dx-\tfrac{1}{2}\int_0^1\mu_t(x,T)w^2(x,T)dx\le$$
$$\le\tfrac{\delta_3^2}{2}\int_0^T\int_0^1 w_{tt}^2dxdt+\tfrac{1}{2\delta_3^2}\int_0^T\int_0^1 g^2(x,t)dxdt+\tfrac{\delta_3^2}{2}\int_0^T\int_0^1 w_{tt}^2dxdt+\tfrac{1}{2\delta_3^2}\int_0^T\int_0^1\Phi_1^2(x,t,w)dxdt,$$

в котором δ_3 есть произвольное положительное число.

Фиксируя $\delta_3=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ и используя оценки (2.12), (2.13), получаем, что из данного неравенства вытекает оценка

$$\int_0^T\int_0^1[\varepsilon w_{tt}^2+\varepsilon w_{xxxt}^2+w_t^2]dxdt\le M_3, \tag{2.14}$$

с постоянной M_3, определяющейся функциями $g(x,t)$, $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$, $\mu(x,t)$ и числом ε.

Далее, рассмотрим равенство

$$-\int_0^T\int_0^1[-\varepsilon w_{tt}+w_t-\varepsilon w_{xxxxxx}+w_{xxx}-\mu(x,t)w]w_{xxxxxx}dxdt=$$
$$=-\int_0^T\int_0^1[g(x,t)+\lambda\Phi_1(x,t,w)]w_{xxxxxx}dxdt.$$

Вновь интегрируя по частям, используя указанные выше граничные и начальные условия для функции $w(x,t)$, переходим к следующему равенству

$$\int_0^T\int_0^1[\varepsilon w_{xxxxxx}^2+\varepsilon w_{xxxt}^2-\mu(x,t)w_{xxx}^2]dxdt+\tfrac{1}{2}\int_0^1 w_{xxx}^2(x,T)dx+\tfrac{1}{2}\int_0^T w_{xxxx}^2(1,t)dt=$$
$$=\int_0^T\int_0^1[\mu_{xxx}ww_{xxx}+3\mu_{xx}w_xw_{xxx}+3\mu_xw_{xx}w_{xxx}-g(x,t)w_{xxxxxx}-\Phi_1(x,t,w)w_{xxxxxx}]dxdt.$$

Используя условия (2.7) и оценивая слагаемые правой части с помощью неравенств Юнга, получаем

$$\int_0^T\int_0^1[\varepsilon w_{xxxxxx}^2+\varepsilon w_{xxxt}^2+\mu_0 w_{xxx}^2]dxdt+\tfrac{1}{2}\int_0^1 w_{xxx}^2(x,T)dx+\tfrac{1}{2}\int_0^T w_{xxxx}^2(1,t)dt\le$$
$$\le\int_0^T\int_0^1[\tfrac{\delta_4^2}{2}w_{xxx}^2+\tfrac{\mu_1^2}{2\delta_4^2}w^2+\tfrac{\delta_4^2}{2}w_{xxx}^2+\tfrac{9\mu_2^2}{2\delta_4^2}w_x^2+\tfrac{\delta_4^2}{2}w_{xxx}^2+\tfrac{9\mu_3^2}{2\delta_4^2}w_{xx}^2]dxdt+$$
$$\tfrac{\delta_5^2}{2}\int_0^T\int_0^1 w_{xxxxxx}^2dxdt+\tfrac{1}{2\delta_5^2}\int_0^T\int_0^1 g^2(x,t)dxdt+\tfrac{\delta_5^2}{2}\int_0^T\int_0^1 w_{xxxxxx}^2dxdt+\tfrac{1}{2\delta_5^2}\int_0^T\int_0^1\Phi_1^2(x,t,w)dxdt,$$

в котором δ_4, δ_5 есть произвольные положительные числа.

Далее, пусть $\delta_5 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Используя условия (2.1) и (2.2), получаем неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[\varepsilon w_{xxxt}^2 + \frac{\varepsilon}{2}w_{xxxxxx}^2 + \mu_0 w_{xxx}^2]dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 w_{xxx}^2(x,T)dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^T w_{xxxx}^2(1,t)dt \leq$$
$$\leq \int\limits_0^T\int\limits_0^1[\frac{3\delta_4^2}{2} + \frac{9\delta_0}{2\delta_4^2}(\mu_2^2+\mu_3^2)]w_{xxx}^2dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_0^1[\frac{\mu_1^2}{2\delta_4^2} + \frac{9C(\delta_0)}{2\delta_4^2}(\mu_2^2+\mu_3^2)]w^2dxdt +$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 g^2(x,t)dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1^2(x,t,w)dxdt.$$

Фиксируя числа $\delta_4 = \sqrt{\frac{\mu_0}{3}}$, $\delta_0 = \frac{\mu_0^2}{27(\mu_2^2+\mu_3^2)}$ и применяя (2.1) и (2.2), приходим к следующей оценке

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1[\varepsilon w_{xxxt}^2 + \varepsilon w_{xxxxxx}^2 + w_{xxx}^2]dxdt \leq M_4, \tag{2.15}$$

с постоянной M_4, определяющейся функциями $g(x,t)$, $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$, $\mu(x,t)$ и числами ε, μ_0.

Оценки (2.12), (2.14) и (2.15) дают очевидную априорную оценку

$$\|w\|_{V_1} \leq M_0. \tag{2.16}$$

Как уже говорилось выше, этой оценки достаточно для применения теоремы о методе продолжения по параметру. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 краевая задача ($2.10_{\varepsilon,\lambda}$), ($2.11^*$) имеет решение $w(x,t)$, принадлежащее пространству V_1, при всех значениях λ, в том числе и при $\lambda = 1$.

Априорной оценки (2.16)вполне достаточно для перехода в семействе решений задачи (2.10_ε, (2.11^*) к пределу при $\varepsilon \to 0$, предельная функция $w(x,t)$ будет решением краевой задачи (2.10), (2.11), принадлежащим пространству V_1.

Определим теперь функцию $u(x,t)$ с помощью (2.4). Далее, справедливо равенство

$$BLu = (Lw)(x,t) - \Phi_1(x,t,w) = g(x,t).$$

Выберем функцию $g(x,t)$ специальным образом: $g(x,t) = (Bf)(x,t)$.

Очевидно теперь, что функция $u(x,t)$ есть решение краевой задачи I. Принадлежность $u(x,t)$ пространству V_1 очевидна. $\square$

3. Разрешимость краевой задачи II

Вновь проведем некоторые вспомогательные построения. Пусть B_iu есть интегральные операторы, определенные в п.2, $w(x,t)$ есть функция

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{1}{2}(x-1)^2(B_1u)(t) - (B_2u)(t) - (x-1)(B_3u)(t). \tag{3.1}$$

Умножая (3.1) поочередно на $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$ и интегрируя по x в пределах от 0 до 1, получим систему относительно $(B_1u)(t)$, $(B_2u)(t)$, $(B_3u)(t)$:

$$
\begin{aligned}
&[1-\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1(x-1)^2K_1(x,t)dx](B_1u)(t)-\int\limits_0^1 K_1(x,t)dx(B_2u)(t)-\\
&-\int\limits_0^1(x-1)K_1(x,t)dx(B_3u)(t)=(B_1w)(t),\\
&-\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1(x-1)^2K_2(x,t)dx(B_1u)(t)+[1-\int\limits_0^1 K_2(x,t)dx](B_2u)(t)-\\
&-\int\limits_0^1(x-1)K_2(x,t)dx(B_3u)(t)=(B_2w)(t),\\
&-\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1(x-1)^2K_3(x,t)dx(B_1u)(t)-\int\limits_0^1 K_3(x,t)dx(B_2u)(t)+\\
&+[1-\int\limits_0^1(x-1)K_3(x,t)dx](B_3u)(t)=(B_3w)(t).
\end{aligned}
$$

Обозначим через $\Delta_2(t)$ определитель этой системы. Если он не равен нулю при $t\in[0,T]$, то вновь можно выразить функции $(B_iu)(t)$ через функции $(B_iw)(t)$, $i=\overline{1,3}$. Вновь функция $u(x,t)$ имеет представление

$$
u(x,t)=w(x,t)+A_{12}(x,t)(B_1w)(t)+A_{22}(x,t)(B_2w)(t)+A_{32}(x,t)(B_3w)(t), \tag{3.2}
$$

где функции $A_{12}(x,t)$, $A_{22}(x,t)$, $A_{32}(x,t)$ вычисляются вполне определенным образом через $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$.

Определим оператор B:

$$
(Bu)(x,t)=u(x,t)-\frac{1}{2}(x-1)^2(B_1u)(t)-(B_2u)(t)-(x-1)(B_3u)(t).
$$

Далее, определим функцию $\Phi(x,t,u)$

$$
\begin{aligned}
&\Phi(x,t,u)=\int\limits_0^1[\tfrac{1}{2}(x-1)^2K_1(y,t)+K_2(y,t)+(x-1)K_3(y,t)]u_{yyy}(y,t)dy+\\
&+\int\limits_0^1[-\tfrac{1}{2}(x-1)^2K_{1t}(y,t)-K_{2t}(y,t)-(x-1)K_{3t}(y,t)+\\
&+(\mu(x,t)-\mu(y,t))(\tfrac{1}{2}(x-1)^2K_1(y,t)+K_2(y,t)+(x-1)K_3(y,t))]u(y,t)dy.
\end{aligned}
$$

Продолжая функцию $\Phi(x,t,u)$ с помощью (3.2) и используя условие

$$
K_i(1,t)=K_{iy}(0,t)=K_{iyy}(0,t)\equiv 0,\quad i=\overline{1,3}, \tag{3.3}
$$

получим представление:

$$
\Phi(x,t,u)=\Phi_2(x,t,w)=\int\limits_0^1 N_2(x,y,t)w(y,t)dy,
$$

в котором $N_2(x,y,t)$ есть функция, вычисляемая через функции $K_i(x,t), i=\overline{1,3}$, и $\mu(x,t)$.

Используя неравенство Гельдера, нетрудно получить неравенство

$$
\Phi_2^2\le\overline{N}_2\int\limits_0^1 w^2(x,t)dx,
$$

в которой постоянная $\overline{N}_2$ определяется функциями $\mu(x,t)$, $K_i(x,\tau), i=\overline{1,3}$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (3.3) *и*

$$\mu(x,t) \in C^3(\overline{Q}), \quad -\mu(x,t) \geq \mu_0 > 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

$$\mu_t(x,T) \leq 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$\mu_0^2 - \overline{N}_2 > 0;$$

$$K_i(x,t) \in C^3(\overline{Q}), \quad i = \overline{1,3};$$

$$\Delta_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T];$$

$$f(x,t) \in L_2(Q).$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_1.

Доказательство. Пусть $g(x,t)$ есть заданная функция из $L_2(Q)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$w_t + w_{xxx} - \mu(x,t)w = g(x,t) + \Phi_2(x,t,w) \tag{3.4}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} &w(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ &w(0,t) = w(1,t) = w_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.4) докажем, используя метод регуляризации.

Пусть ε есть фиксированное положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$-\varepsilon w_{tt} + w_t + w_{xxx} - \mu(x,t)w = g(x,t) + \Phi_2(x,t,w) \tag{3.4_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{aligned} &w(x,0) = w_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \\ &w_{xx}(0,t) = w(1,t) = w_x(1,t) = 0. \end{aligned} \tag{3.5^*}$$

Для нее выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{V_1} \leq M_0,$$

с постоянной M_0, определяющейся функциями $g(x,t)$, $K_i(x,t), i = \overline{1,3}$, $\mu(x,t)$ и числами ε, μ_0 (доказательство этой оценки проводится аналогично доказательству оценки (2.16)). Этой априорной оценки вполне достаточно для перехода в семействе решений задачи (3.4_ε), (3.5^*) к пределу при $\varepsilon \to 0$, предельная функция $w(x,t)$ будет решением краевой задачи (3.4), (3.5), принадлежащим пространству V_1.

Определим теперь функцию $u(x,t)$ с помощью (3.2). Далее, справедливо равенство

$$BLu = (Lw)(x,t) - \Phi_2(x,t,w) = g(x,t).$$

Выберем функцию $g(x,t)$ специальным образом: $g(x,t) = (Bf)(x,t)$.

Очевидно теперь, что функция $u(x,t)$ есть решение краевой задачи II. Принадлежность $u(x,t)$ пространству V_1 очевидна. □

Замечание 1. В [7] рассматривалась нелокальная краевая задача для уравнения (1.1) типа задачи II, при этом нелокальное условие имело вид $u_{xx}(x,t) = \lambda u(x_0,t)$, другие же краевые условия были локальными.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг. по мероприятию 1.3.1.

Литература

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно – составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. Джураев, Т.Д. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками / Т.Д. Джураев, Ю.П. Апаков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2007. – Т. 15, №2. – С. 18 – 26.
3. Абдрахманов, А.М. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка / А.М. Абдрахманов, А.И. Кожанов // Изв. вузов. Математика. – 2007. – №5. – С. 3 – 12.
4. Абдрахманов, А.М. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнения нечетного порядка / А.М. Абдрахманов // Математические заметки. – 2010. – Т. 88, №2. – С. 163 – 172.
5. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин – М.: Наука, 1980.
6. Якубов, С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, 1985.
7. Балкизов, Ж.А. Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками / Ж.А. Балкизов // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: материалы Первой Всерос. конф. молодых ученых. – Терское, 2010. – С. 39 – 41.

Галина Александровна Лукина, кафедра общей математики, Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова в г. Мирном, lukina-g@mail.ru.

Поступила в редакцию 2 февраля 2011 г.