УДК 517.711.3

ОБОБЩЕННАЯ ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева

THE GENERALIZED HOMOGENOUS THERMOCONVECTION PROBLEM OF THE NON-COMPRESSIBLE VISCOELASTIC FLUID

O.P. Matveeva, T.G. Sukacheva

Рассматривается однородная задача термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта высшего порядка. В рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, являющегося квазистационарной полутраекторией, и получено описание ее фазового пространства.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, несжимаемая вязкоупругая жидкость, фазовое пространство.

The homogenous thermoconvection model of the non-compressible viscoelastic Kelvin – Voight fluid of the highest order is considered. The existence and uniqueness theorem of the solution which is a quasi-stationary semi-trajectory is proved in the frames of the Sobolev type equations theory. The description of the phase space is obtained.

Keywords: Sobolev type equations, an incompressible viscoelastic fluid, phase space.

Введение

Система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}(1-\lambda\nabla^2)\mathbf{v}_t=\nu\nabla^2\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{q=0}^{n_m-1}A_{m,q}\nabla^2\mathbf{w}_{m,q}-\\ g\gamma\theta-\mathbf{p}+\mathbf{f}, \qquad 0=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}),\\ \dfrac{\partial\mathbf{w}_{m,0}}{\partial t}=\mathbf{v}+\alpha_m\mathbf{w}_{m,0}\ , \qquad \alpha_m\in\mathbb{R}_-, \quad m=\overline{1,\ M},\\ \dfrac{\partial\mathbf{w}_{m,q}}{\partial t}=q\mathbf{w}_{m,p-1}+\alpha_m\mathbf{w}_{m,q}, \qquad q=\overline{1,\ n_m-1},\\ \theta_t=\kappa\nabla^2\theta-\mathbf{v}\cdot\nabla\theta+\mathbf{v}\cdot\gamma\end{array}\right. \tag{1}$$

моделирует эволюцию скорости $\mathbf{v}=(v_1,...,v_n)$, $v_i=v_i(x,t)$, градиента давления $\mathbf{p}=(p_1,...,p_n)$, $p_i=p_i(x,t)$ и температуры $\theta=\theta(x,t)$ несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта высшего порядка K $(K=n_1+...+n_M)$ [1]. Параметры $\lambda\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{R}_+$ и

$\kappa \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругость, вязкость и теплопроводность жидкости соответственно; $g \in \mathbb{R}_+$ – ускорение свободного падения; $\gamma = (0, ..., 0, 1)$ – орт в $\mathbb{R}^n$. Параметры $A_{m,q} \in \mathbb{R}_+$, определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободный член $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)$, $f_i = f_i(x,t)$ отвечает внешнему воздействию на жидкость.

Рассмотрим разрешимость первой начально – краевой задачи

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), & \mathbf{w}_{m,q}(x,0) = \mathbf{w}^0_{m,q}(x), \\
\theta(x,0) = \theta_0(x), & \forall x \in \Omega; \\
\mathbf{v}(x,t) = 0, & \mathbf{w}_{m,q}(x,t) = 0, \\
\theta(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \ , \\
m = \overline{1,\ M}, & q = \overline{0,\ n_m - 1}
\end{array} \tag{2}$$

для однородной системы (1) ($f \equiv 0$). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3, 4$) — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Ранее задача (1), (2) в случае ($K = 0$, $f = f(x)$) изучалась Г.А. Свиридюком [2]. Для несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта порядка $K > 0$ указанная однородная задача рассматривается впервые. В данной работе обобщаются результаты, полученные в [3].

Статья состоит из трех частей. В первой части приводятся необходимые результаты из теории полулинейных уравнений соболевского типа, основанные на понятии p-секториального оператора и полугрупповом подходе [4, 5]. Во второй части проводится редукция однородной задачи (1), (2) к задаче Коши для полулинейного уравнения соболевского типа. В третьей части устанавливается существование квазистационарных полутраекторий и описывается фазовое пространство указанной задачи.

1. Полулинейные уравнения соболевского типа

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, причем $\ker L \neq \{0\}$; оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Обозначим через $\mathcal{U}_M = \{u \in \mathrm{dom}\ M : \ \ \|u\| = \|M\,u\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{U}}\}$. Пусть оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для *полулинейного уравнения соболевского типа*

$$L\,\dot{u} \ = \ M\,u \ + \ F(u). \tag{4}$$

Локальным решением (далее просто — *решением*) задачи (3), (4) назовем вектор-функцию $u \in \mathcal{C}^\infty((0,T);\mathcal{U}_M)$, удовлетворяющую уравнению (4) и такую, что $u(t) \to u_0$ при $t \to 0+$.

Будем рассматривать задачу (3), (4) при условии, что оператор M сильно $(L,\ p)$-секториален [4, 5]. Известно, что при этом условии решение задачи (3), (4) может быть неединственным [6]. Поэтому ограничимся поиском только таких решений уравнения (4), которые являются *квазистационарными полутраекториями.*

Определение 1. *Пусть* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \oplus \mathcal{U}_1$, *причем* $\ker L \subset \mathcal{U}_0$. *Решение* $u = v + w$, *где* $v(t) \in \mathcal{U}_0$, $w(t) \in \mathcal{U}_1$ *при всех* $t \in (0,T)$, *назовем квазистационарной полутраекторией, если* $L\dot{v} \equiv 0$.

Замечание 1. В динамическом случае понятие квазистационарной полутраектории совпадает с понятием квазистационарной траектории [6].

Также хорошо известно [7 – 9], что решения задачи (3), (4) существуют не для всех $u_0 \in \mathcal{U}_M$. Поэтому введем

Определение 2. *Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_M$ назовем фазовым пространством уравнения* (4), *если для любой точки $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное решение задачи* (3), (4), *причем $u(t) \in \mathcal{B}$.*

В силу того, что оператор M сильно (L,p)-секториален, пространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{F}^0$ — ядра, а $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{F}^1$ — образы аналитических разрешающих полугрупп

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu$$

($\Gamma \subset \rho^L(M)$ — контур такой, что $\arg\mu \to \pm\Theta$ при $|\mu| \to +\infty$) линейного однородного уравнения

$$L\dot{u} = Mu. \tag{5}$$

Обозначим через $L_k(M_k)$ сужение оператора $L(M)$ на $\mathcal{U}^k$ $\quad(\mathcal{U}^k \cap \mathrm{dom}\ M)$, $\ k = 0,\ 1$. Тогда $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M_k\ :\ \ \mathcal{U}^k \cap \mathrm{dom}\ M \to \mathcal{F}^k$, $\ k = 0,\ 1$, причем M_0 и L_1 являются линейными непрерывными операторами и имеют ограниченные обратные операторы.

В силу этих результатов [4, 5] приведем задачу (3), (4) к эквивалентной системе, которую назовем *нормальной формой* задачи (3), (4):

$$R\dot{u}^0 = u^0 + G(u)\ ,\quad u^0(0) = u^0_0; \qquad \dot{u}^1 = Su^1 + H(u)\ ,\quad u^1(0) = u^1_0. \tag{6}$$

Здесь $u^k \in \mathcal{U}^k$, $\ k = 0,1$; $u = u^0 + u^1$; операторы $R = M_0^{-1}L_0$, $\ S = L_1^{-1}M_1$, $\ G = M_0^{-1}(I - Q)F$, $\ H = L_1^{-1}QF$. ($Q \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ — проектор, расщепляющий пространство $\mathcal{F}$ требуемым образом).

Далее будем изучать такие квазистационарные полутраектории, для которых $R\dot{u}^0 \equiv 0$. Для этого предположим, что оператор R — *бирасщепляющий* [10], т.е. его ядро $\ker R$ и образ $\mathrm{im}\ R$ дополняемы в пространстве $\mathcal{U}$. Обозначим $\mathcal{U}^{00} = \ker R$, а через $\mathcal{U}^{01} = \mathcal{U}^0 \ominus \mathcal{U}^{00}$ обозначим некоторое дополнение к подпространству $\mathcal{U}^{00}$. Тогда первое уравнение (6) примет вид:

$$R\dot{u}^{01} = u^{00} + u^{01} + G(u), \quad u = u^{00} + u^{01} + u^1. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, а оператор R — бирасщепляющий. Пусть существует квазистационарная полутраектория уравнения* (4). *Тогда она удовлетворяет соотношениям*

$$0 = u^{00} + u^{01} + G(u), \quad u^{01} = \mathrm{const}. \tag{8}$$

Теорема 1 дает необходимые условия существования квазистационарной полутраектории уравнения (4). Рассмотрим теперь достаточные условия. Известно, что при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M оператор S секториален. Следовательно, он порождает на $\mathcal{U}^1$ аналитическую полугруппу, которую мы обозначим через $\{U^t_1\ :\ t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$, так как оператор U^t_1 есть сужение оператора U^t на $\mathcal{U}^1$. Из того, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ следует, что существует проектор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, соответствующий данному расщеплению. Оказывается, что $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M)$, и тогда $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}^0_M \oplus \mathcal{U}^1_M$, причем вложение $\mathcal{U}^k_M \subset \mathcal{U}^k$, $\ k = 0,1$ плотно и непрерывно [4, 5].

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, оператор R — бирасщепляющий, оператор $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$. Пусть*

(A1) *в некоторой окрестности* $\mathcal{O}_{u_0} \subset \mathcal{U}_M$ *точки* u_0 *выполнено соотношение*

$$0 = u_0^{01} + (I - P_R)(G(u^{00} + u_0^{01} + u^1)); \tag{9}$$

(A2) *проектор* $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, *и оператор* $I + P_R G'_{u_0} \ : \ \mathcal{U}_M^{00} \to \mathcal{U}_M^{00}$ — *топлинейный изоморфизм* $(\mathcal{U}_M^{00} = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}^{00})$;

(A3) *для аналитической полугруппы* $\{U_1^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ *выполнено соотношение*

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Тогда существует единственное решение задачи (3), (4), *являющееся квазистационарной полутраекторией уравнения* (4).

Замечание 2. Условие (10) для обычных аналитических полугрупп, имеющих оценку $\|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1)} < t^{-1}\mathrm{const}$, не выполняется. Обозначим через $\mathcal{U}_\alpha^1 = [\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_M^1]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ — некоторое интерполяционное пространство, построенное по оператору S. В теореме 2 условие «$F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1;\mathcal{F})$» дополним условием «$H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1;\mathcal{U}_\alpha^1)$», а соотношение (10) заменим соотношением

$$\int_0^\tau \|U_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{U}_\alpha^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{11}$$

Тогда утверждение теоремы 2 не изменится. Обсуждение этого круга вопросов см. в [11, гл. 9]. Очевидно, что окрестность $\mathcal{O}_{u_0}$ является частью фазового пространства уравнения (4).

Пусть теперь $\mathcal{U}_k$ и $\mathcal{F}_k$ — банаховы пространства, операторы $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_k, \mathcal{F}_k)$, а операторы B_k : dom $B_k \to \mathcal{F}_k$ линейны и замкнуты с областями определений dom B_k плотными в $\mathcal{U}_k$, $k = 1, 2$. Построим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и операторы $L = A_1 \otimes A_2$, $M = B_1 \otimes B_2$. По построению оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор M : dom $M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, dom M = dom $B_1 \times$ dom B_2.

Теорема 3. *Пусть операторы* B_k *сильно* (A_k, p_k)*-секториальны,* $k = 1, 2$. *Тогда оператор* M *сильно* (L, p)*-секториален,* $p = \max(p_1, p_2)$.

2. Редукция к полулинейному уравнению соболевского типа

Для того, чтобы редуцировать задачу (1), (2) к задаче (3), (4), введем, следуя [12, 13], пространства $\mathbf{H}_\sigma^2$, $\mathbf{H}_\pi^2$, $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$. $\mathbf{H}_\sigma^2$ и $\mathbf{H}_\sigma$ — подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W_2^2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ и $(L_2(\Omega))^n$ соответственно, а $\mathbf{H}_\pi^2$ и $\mathbf{H}_\pi$ — их ортогональные (в смысле $(L_2(\Omega))^n$) дополнения. Обозначим через Σ ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$, причем его сужение на пространство $(W_2^2(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^n$ будем обозначать тем же символом. Положим $\Pi = I - \Sigma$. Формулой $A = \nabla^2 E_n \ : \ \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n — единичная матрица порядка n, зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Формулой $B : \mathbf{v} \to \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B \ : \ \mathbf{H}_\sigma^2 \oplus \mathbf{H}_\pi^2 \to \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B = \mathbf{H}_\sigma^2$. Положим $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2$, и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = \overline{1,\ K}$. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \oplus_{l=0}^K \mathcal{U}_{1l}$, $\mathcal{F}_1 = \oplus_{l=0}^K \mathcal{F}_{1l}$. Операторы A_1 и $B_1 \ : \ \mathcal{U}_1 \to \mathcal{F}_1$ определим формулами $A_1 = \mathrm{diag}\,[\hat{A}_1\ , E_K]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I - \lambda A)\Sigma & \Sigma A(I - \lambda A)\Pi \\ \Pi(I - \lambda A)\Sigma & \Pi A(I - \lambda A)\Pi \end{pmatrix}.$$

Оператор $B_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{F}_1$ положим равным оператору $\tilde{M}$ (см. формулу (14) в [13]).

Замечание 3. Пространство $\mathcal{U}_1$ ($\mathcal{F}_1$) определяется точно так же, как пространство $\mathcal{U}$ ($\mathcal{F}$) в модели [13], а оператор A_1 совпадает с оператором L в [13].

Замечание 4. Обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на $\mathbf{H}^2_\sigma$. По теореме Солонникова-Воровича-Юдовича спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Из соответствующих результатов [13] вытекает следующая

Теорема 4. (i) *Операторы* $A_1, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1; \mathcal{F}_1)$*, и, если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$*, то оператор* A_1 *— бирасщепляющий,* $\ker A_1 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K}$, $\operatorname{im} A_1 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathcal{F}_{11} \times \mathcal{F}_{12} \times \ldots \times \mathcal{F}_{1K}$.

(ii) *Если* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$*, то оператор* B_1 $(A_1, 1)$*-ограничен.*

Замечание 5. Впервые понятие (A, σ)-ограниченного оператора B введено в [14]. Оператор (L, p)-ограничен, если порядок несущественной особой точки в бесконечности равен p. Он совпадает со степенью нильпотентности оператора R.

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(\Omega)$ и формулой $B_2 = \kappa\nabla^2 \ : \ \operatorname{dom} B_2 \to \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\operatorname{dom} B_2 = W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Положим $A_2 \equiv I$. Тогда в силу секториальности оператора B_2 [15] справедлива

Теорема 5. *Оператор* B_2 *сильно* A_2*-секториален.*

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = \operatorname{col}\,(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K, u_\theta)$, где $\operatorname{col}\,(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_K) \in \mathcal{U}_1$, а $u_\theta \in \mathcal{U}_2$. Здесь $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (I - \Sigma)v = \Pi v$, $u_p = \bar{p}$. Операторы L и M определим формулами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M \ : \ \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$. Из теоремы 4 и замечания 2.1.1 [5] следует, что оператор B_1 сильно $(A_1, 1)$-секториален. В силу этого и теорем 3, 4, 5 справедлива

Теорема 6. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A)$, *тогда оператор* M *сильно* $(L, 1)$*-секториален.*

Перейдем к построению нелинейного оператора F. В данном случае его можно представить в виде $F = F_1 \otimes F_2$, где $F_1 = F_1(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = \operatorname{col}\,(-\Sigma(((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + g\gamma u_\theta), -\Pi(((u_\sigma+u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma+u_\pi)+g\gamma u_\theta), \underbrace{0, \ldots, 0}_{K+1})$, а $F_2 = F_2(u_\sigma, u_\pi, u_\theta) = (u_\sigma+u_\pi)\cdot(\gamma-\nabla u_\theta)$.

Далее, в нашем случае пространство $\mathcal{U}_M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$. Аналогично [3], легко показать, что при любых $u \in \mathcal{U}_M$ оператор $F'_u \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$, вторая производная Фреше F''_u оператора F — непрерывный билинейный оператор из $\mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_M$ в $\mathcal{F}$, а $F'''_u \equiv O$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Оператор* $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Итак, редукция задачи (1), (2) к задаче (3), (4) закончена.

3. Фазовое пространство и квазистационарные полутраектории

В дальнейшем всюду будем отождествлять задачи (1), (2) и (3), (4). Теперь перейдем к проверке условий теорем 1 и 2.

В силу теоремы 6 и теоремы 2.2.1 [5] существует аналитическая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ разрешающих операторов уравнения (5), которую в данном случае естественно представить в виде $U^t = V^t \times W^t$, где $V^t(W^t)$ — сужение оператора U^t на $\mathcal{U}_1(\mathcal{U}_2)$. Так как оператор B_2 секториален, то $W^t = \exp(tB_2)$, откуда следует, что ядро этой полугруппы $\mathcal{W}^\circ = \{0\}$, а образ $\mathcal{W}^1 = \mathcal{U}_2$.

Рассмотрим полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. В силу теорем 4 и 6 и замечания 2.2.2 [5] данная полугруппа продолжима до группы $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Ее ядро $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$, где $\mathcal{U}_1^{00} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}(= \ker A_1$ по теореме 5), а $\mathcal{U}_1^{01} = \Sigma A_\lambda^{-1} A_{\lambda\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{K+1}$.

Здесь $A_\lambda = I - \lambda A$, $A_{\lambda\pi}$ — сужение оператора ΠA_λ^{-1} на $\mathbf{H}_\pi$. В [12] показано, что если $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$, то оператор $A_{\lambda\pi} : \mathbf{H}_\pi \to \mathbf{H}_\pi^2$ — топлинейный изоморфизм. Обозначим через $\mathcal{U}_1^1$ образ $\mathcal{V}^1$. Тогда в силу сильной $(A_1,\ 1)$-секториальности оператора B_1 пространство $\mathcal{U}_1$ разлагается в прямую сумму подпространств: $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01} \oplus \mathcal{U}_1^1$.

Построим оператор $R = B_{10}^{-1} A_{10} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$, где $A_{10}(B_{10})$ — сужение оператора $A_1(B_1)$ на $\mathcal{V}^0 = \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$. (Оператор B_{10}^{-1} существует в силу теоремы 6, следствия 2.2.2 и замечания 2.1.1 [5]). По построению $\ker R = \mathcal{U}_1^{00}$, а в [12] показано, что $\operatorname{im} R = \mathcal{U}_1^{01}$. Значит, оператор R — бирасщепляющий. Обозначим через P_R проектор пространства $\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01}$ на $\mathcal{U}_1^{00}$ вдоль $\mathcal{U}_1^{01}$. В силу конструкции пространства $\mathcal{U}_M$ проектор $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$, где $\mathcal{U}_M^0 = \mathcal{U}_M \cap (\mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})(\equiv \mathcal{U}_1^{00} \oplus \mathcal{U}_1^{01})$. Зафиксируем это в следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда оператор R — бирасщепляющий, причем $P_R \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_M^0)$.*

Проекторы $P_k,\ Q_k, k = 0, 1$ определим формулами (17), (18) в [13]. Из результатов [13] и в силу того, что ядро $\mathcal{W}^0 = \{0\}$, следует, что $I - P = (P_0 + P_1) \times O, \quad Q = (I - Q_0 - Q_1) \times I, \quad P : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^1, \quad Q : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^1$. Применяя проектор $I - P$ к уравнению (4) в данной интерпретации, получаем

$$\begin{gathered} \Pi(\nu A(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi) + \\ \sum_{m=1}^{M} \sum_{q=0}^{n_m-1} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - u_p - g\gamma u_\theta) = 0, \\ B u_\pi = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Отсюда, в силу теоремы 1 и свойств оператора B, получаем необходимое условие квазистационарности полутраектории $u_\pi \equiv 0$. То есть, все решения нашей задачи (если они существуют) с необходимостью должны лежать в плоскости $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{U}_M : u_\pi = 0\}$. А так как $\Pi u_p = u_p$, то из первого уравнения (12) получаем соотношение (8) в нашей транскрипции

$$u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla) u_\sigma + \sum_{m=1}^{M} \sum_{q=0}^{n_m-1} A_{m,q} \nabla^2 w_{m,q} - g\gamma u_\theta). \tag{13}$$

Очевидно, $P_0 \equiv P_R$, поэтому второе уравнение (12) есть соотношение (9) применительно к нашей ситуации. Итак, справедлива

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *любое решение задачи* (1), (2) *лежит во множестве*

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{U}_M,\ u_\pi = 0, \quad u_p = \Pi(\nu A u_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)u_\sigma + \sum_{m=1}^{M}\sum_{q=0}^{n_m-1} A_{m,q}\nabla^2 w_{m,q} - g\gamma u_\theta))\,\}.$$

Замечание 6. Из (13) сразу следует условие (A2) теоремы 2 для любой точки $u_0^0 \in \mathcal{U}_M^{00}(\equiv \mathcal{U}_1^{00} \times \{0\})$. Поэтому множество $\mathcal{A}$ — простое банахово многообразие $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфное подпространству $\mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$ — является кандидатом на роль фазового пространства $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ задачи (1), (2).

Приступим к проверке условий (10) и (11). Построим пространство $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_1 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Данное пространство, очевидно, будет интерполяционным пространством для пары $[\mathcal{U}, \mathcal{U}_M]_\alpha$, причем $\alpha = 1/2$. Как отмечено выше, полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ продолжается до группы $\{V_1^t : t \in \mathbb{R}\}$ на $\mathcal{U}_1^1$, где V_1^t — сужение оператора V^t на $\mathcal{U}_1^1$. Поскольку $\mathcal{U}_M^1 = \mathcal{U}_M \cap \mathcal{U}_1^1$ (по построению) и оператор B_1 непрерывен (теорема 4), то в силу равномерной ограниченности полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ имеем

$$\int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1;\mathcal{U}_M^1)} dt \le \text{const}\|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1;\mathcal{F}_1)} \int_0^\tau \|V_1^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_1^1)} dt < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{14}$$

Далее, в силу неравенства Соболева [11, гл. 9] полугруппа $\{W^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\tau \|W^t\|_{\mathcal{L}(\mathrm{dom}\ B_2;\, \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} dt < \infty. \tag{15}$$

Положим $\mathcal{U}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}^1$, где $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}_1^1 \times \mathcal{U}_2$. Тогда из (14) и (15) вытекает

Лемма 3. *В условиях леммы* 1 *выполняется соотношение* (10).

Наконец, выполняя требование (11), найдем оператор H. Оператор H естественно представить в виде $H = H_1 \otimes H_2$, где $H_1 = A_{11}^{-1}(I - Q_0 - Q_1)F_1$, а $H_2 \equiv F_2$ (A_{11} — сужение оператора A_1 на $\mathcal{U}_1^1$). Включение $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M^1; \mathcal{U}_\alpha^1)$, показывается аналогично тому, как было показано включение $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_M; \mathcal{F})$.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому справедлива

Теорема 8. *Пусть* $\lambda^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. *Тогда при любом* u_0 *таком, что* $u_0 \in \mathcal{A}$ *и некотором* $T \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное решение* $u \in \mathcal{C}^\infty(\,(0,T);\ \mathcal{U}_M\,)$ *задачи* (1), (2), *являющееся квазистационарной полутраекторией, причем* $u(t) \in \mathcal{A}$.

Работа поддержана программой «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 годы)» проект № 2.1.1/2301.

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта / А.П. Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. – №179. – С. 126 – 164.
2. Свиридюк, Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Матем. – 1990. – №12. – С. 65— 70.
3. Сукачева, Т.Г. Об однородной модели термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева, О.П. Матвеева // Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер. Физико-математические науки. – 2010. – Вып. 5(21). – С. 37 – 45.

4. Sviridyuk, G.A. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov // Utrecht-Boston: VSP, 2003. – 179 p.
5. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, №4. – С. 47 – 74.
6. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, №3. – С. 192 – 207.
7. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31, №5. – С. 109 – 119.
8. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, №2. С. 250 — 258.
9. Levine, H.A. Some nonexistance and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Du_t = -Au + F(u)$ / H.A. Levine// Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V. 51, № 5. – P. 371 – 386.
10. Борисович, Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере – Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1977. – Т. 32, №4. – С. 3 – 54.
11. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
12. Свиридюк, Г.А. Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1994. – №1. – С. 62 – 70.
13. Сукачева, Т.Г. О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева // Изв. вузов. Матем. – 1998. –№ 3 (430). – С. 47 – 54.
14. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1991.– Т. 318, №4. – С. 828 – 831.
15. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Сукачева Тамара Геннадьевна, доктор физ.-мат. наук, доцент, кафедра математического анализа, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, tamara.sukacheva@novsu.ru.

Матвеева Ольга Павловна, кафедра математического анализа, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, oltan.72@mail.ru.

Поступила в редакцию 9 февраля 2011 г.