

## ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕКОЭРЦИТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*М.О. Корпусов, Д.В. Лукьяненко, Е.А. Овсянников, А.А. Панин*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва

Рассмотрена начально-краевая задача для уравнения ионно-звуковых волн в плазме. При этом распределение Больцмана плотности электронов приближено квадратичной функцией. Для рассмотренной задачи доказана локальная (по времени) разрешимость и проведено аналитико-численное исследование разрушения решения. Методом пробных функций получены достаточные условия разрушения решения за конечное время и оценка сверху на время разрушения. В конкретных численных примерах эти оценки уточнены численно методом сгущения сеток по Ричардсону. Промежуток времени для численного счета выбирается согласно аналитически полученной оценке сверху на время разрушения решения. В свою очередь, численное моделирование уточняет момент и характер этого разрушения. В частности, показано распространение разрушения в пространстве. Таким образом, аналитическая и численная части исследования взаимно дополняют друг друга.

*Ключевые слова:* разрушение решения; нелинейная начально-краевая задача; уравнение соболевского типа; экспоненциальная нелинейность; экстраполяция по Ричардсону.

### Введение

В этой работе мы продолжаем исследования нелинейных уравнений, описывающих уравнения ионно-звуковых волн в различных модельных предположениях и начатые в работах [1–4]. В данной работе мы рассмотрим следующую модельную «1+1»-мерную задачу:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( u_{xx} - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 \right) + u_{xx} = 0 \quad \text{при } (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{при } x \in [0, l]. \quad (3)$$

Решение мы будем искать в классе  $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[0, l])$ . Поэтому нам с необходимостью нужно потребовать выполнимость условий согласования начального и граничного условий

$$u_{0x}(0) = u_{0x}(l) = u_{1x}(0) = u_{1x}(l) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (1) описывает нелинейные ионно-звуковые волны в плазме с очень большим радиусом Дебая

$$r_D = \left( \frac{kT_e}{4\pi e^2 n_0} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{r_D^2}.$$

Ниже приведен вывод уравнения (1) в многомерном случае. Затем мы докажем локальную во времени классическую разрешимость и получим достаточное условие разрушения решения задачи (1) – (3) за конечное время и получим оценку сверху на это время.

## 1. Вывод уравнения

Рассмотрим ионно-электронную плазму в области  $D \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . В приближении квазистационарного электрического поля имеют место следующие уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi en, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}$  – это вектор напряженности электрического поля,  $n = n_e + n_i$  – это суммарная плотность электронов и ионов. В предположении, что область  $D$  является поверхностью односвязной, можно ввести потенциал электрического поля  $\phi$ , связанный с вектором  $\mathbf{E}$  равенством

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (6)$$

В этом случае плотность электронов хорошо описывается распределением Больцмана

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right), \quad (7)$$

где  $n_0$  – равновесная плотность электронов,  $T_e$  – температура электронов. А для концентрации ионов  $n_i$  справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{J}$  – это плотность тока ионной составляющей плазмы и учитывает временную дисперсию

$$\mathbf{J} = \int_0^t \sigma(t, \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau, \quad \sigma(t, \tau) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T] \otimes [0, T]). \quad (9)$$

Из уравнений (5) – (7) мы получим следующее дифференциальное следствие:

$$\Delta\phi - 4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) = 4\pi en_i. \quad (10)$$

Из системы уравнений (8) и (9) мы получим следующее дифференциальное следствие:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = - \int_0^t \sigma(t, \tau) \Delta\phi(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Из уравнений (10) и (11) вытекает дифференциальное следствие

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta\phi - 4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \right) + 4\pi e \int_0^t \sigma(t, \tau) \Delta\phi(\tau) d\tau = 0. \quad (12)$$

В одном частном, но важном случае  $\sigma(t, \tau) = \sigma_0 > 0$  мы приходим к следующему дифференциальному следствию:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta\phi - 4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \right) + 4\pi e \sigma_0 \Delta\phi = 0. \quad (13)$$

Сделаем в этом уравнении замену  $u = \frac{\phi}{4\pi en_0}$ , тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta u - \exp\left(\frac{u}{r_D^2}\right) \right) + 4\pi e \sigma_0 \Delta u = 0, \quad (14)$$

где

$$r_D = \left( \frac{kT_e}{4\pi e^2 n_0} \right)^{1/2}$$

– это так называемый радиус экранировки Дебая. В случае плазмы радиус Дебая достаточно большой настолько, что можно ограничиться рассмотрением первых трех членов разложения функции  $\exp(\varepsilon u)$  по малому параметру  $\varepsilon = 1/r_D^2$ :

$$\exp(\varepsilon u) = 1 + \varepsilon u + \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 + \bar{o}(\varepsilon^2 u^2). \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) вытекает искомое уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta u - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 \right) + \Delta u = 0, \quad (16)$$

в котором мы коэффициент  $4\pi e \sigma_0$  при слагаемом  $\Delta u$  заменили единицей.

## 2. Локальная разрешимость

Будем доказывать локальную во времени разрешимость задачи (1) – (3) в классе  $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[0, l])$ . Введем функцию Грина дифференциального оператора  $-\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon I$ ,  $\varepsilon > 0$ ,

$$G_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} \sinh(\sqrt{\varepsilon} l)} \begin{cases} \cosh(\sqrt{\varepsilon} x) \cosh(\sqrt{\varepsilon}(y - l)), & \text{при } x < y; \\ \cosh(\sqrt{\varepsilon} y) \cosh(\sqrt{\varepsilon}(x - l)), & \text{при } x > y. \end{cases}$$

Перепишем рассматриваемое уравнение для удобства в эквивалентном виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -u_{xx} + \varepsilon u + \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 \right) - u_{xx} + \varepsilon u = \varepsilon u.$$

В классе гладкости  $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[0, l])$  с учетом введенной функции Грина получим интегродифференциальное равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( u + \frac{\varepsilon^2}{2} \hat{G}_\varepsilon u^2 \right) + u = \varepsilon \hat{G}_\varepsilon u, \quad (17)$$

где

$$\hat{G}_\varepsilon f = \int_0^l G_\varepsilon(x, y) f(y) dy.$$

Проинтегрируем равенство (17) один раз по времени, тогда получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{\varepsilon^2}{2} \hat{G}_\varepsilon u^2 \right) = u_1(x) + \varepsilon^2 \hat{G}(u_0 u_1)(x) + \int_0^t ds \left( -u(x, s) + \varepsilon \hat{G}_\varepsilon u(s) \right) ds, \quad (18)$$

где

$$\hat{G}(u_0 u_1)(x) = \int_0^l G_\varepsilon(x, y) u_0(y) u_1(y) dy. \quad (19)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{\varepsilon^2}{2} \hat{G}_\varepsilon u^2 \right) = \left( I + \hat{K}_\varepsilon^* \right) \frac{du}{dt}, \quad (20)$$

где  $I$  – это единичный оператор, а

$$\hat{K}_\varepsilon(u) * w = \int_0^l \varepsilon^2 \hat{G}_\varepsilon(x, y) u(y, t) w(y, t) dy. \quad (21)$$

Тогда уравнение (18) можно переписать в следующем виде:

$$\left( I + \hat{K}_\varepsilon(u) * \right) \frac{du}{dt} = u_1(x) + \varepsilon^2 \hat{G}(u_0 u_1)(x) + \int_0^t ds \left( -u(x, s) + \varepsilon \hat{G}_\varepsilon u(s) \right) ds. \quad (22)$$

Рассмотрим банахово пространство  $\mathbb{B} \equiv L^\infty((0, T) \times (0, l))$ , где  $T > 0$  – произвольное фиксированное. Точно так же, как и в [1], можно доказать, что

$$\|\hat{K}_\varepsilon(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq c_1(l) \varepsilon \|v\|, \quad (23)$$

где  $\|\cdot\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}$  – это операторная норма линейного пространства всех линейных непрерывных операторов, действующих из  $\mathbb{B}$  в  $\mathbb{B}$ . Введем теперь замкнутое, ограниченное и выпуклое подмножество банахова пространства  $\mathbb{B}$ :

$$B_{\mu n} = \{v(x, t) \in \mathbb{B} : \|v\|_{L^\infty((0, l) \times (0, T))} \leq \mu n\}, \quad (24)$$

$$\|u_0\|_{L^\infty(0, l)} \leq \mu, \quad \|u_1\|_{L^\infty(0, l)} \leq \mu, \quad (25)$$

где  $n = n(T) \in \mathbb{N}$  некоторое фиксированное, которое мы фиксируем позже, а  $\mu = \mu(T, \varepsilon) > 0$  – достаточно малое число. При фиксированных  $T, l, \varepsilon$  и  $n$  выберем  $\mu > 0$  настолько малым, чтобы

$$c_1(l) \varepsilon \mu n \leq \frac{1}{2}.$$

В этом случае оператор  $\left( I + \hat{K}_\varepsilon(u) * \right)^{-1}$  существует и представим в виде ряда Неймана

$$\left( I + \hat{K}_\varepsilon(u) * \right)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} [-\hat{K}_\varepsilon(u) *]^m.$$

Следовательно, уравнение (22) можно переписать в виде

$$\frac{du}{dt} = \left( I + \hat{K}_\varepsilon(u) * \right)^{-1} \left( u_1(x) + \varepsilon^2 \hat{G}(u_0 u_1) + \int_0^t ds \left( -u(x, s) + \varepsilon \hat{G}_\varepsilon u(s) \right) ds \right). \quad (26)$$

Далее это уравнение можно проинтегрировать один раз по времени и получить следующее равенство:

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t A(u)(x, s) ds, \quad (27)$$

где

$$A(u)(x, t) = \left( I + \hat{K}_\varepsilon(u) * \right)^{-1} \left( u_1(x) + \varepsilon^2 \hat{G}(u_0 u_1) + \int_0^t ds \left( -u(x, s) + \varepsilon \hat{G}_\varepsilon u(s) \right) ds \right). \quad (28)$$

Точно так же, как в [1, 2], можно доказать, что при выборе  $\mathbb{N} \ni n > 4T + 1$  – фиксированном и при достаточно малом  $\mu > 0$  имеют место следующие свойства

$$A(u) : B_{\mu n} \rightarrow B_{\mu n}, \quad \|A(v_1) - A(v_2)\| \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|,$$

т.е. оператор  $A(v)$  является сжимающим на  $B_{\mu n}$ . Используя вариант принципа сжимающих отображений работы [5], можно доказать существование единственного решения  $u(x, t) \in B_{\mu n} \subset \mathbb{B}$  интегрального уравнения (27).

Далее так же, как и в [1], нужно воспользоваться «бутстэп»-методом для повышения гладкости решений интегральных уравнений и получить, что на самом деле решение интегрального уравнения (27) принадлежит классу  $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}([0, l]))$ . Стало быть, нами доказана следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть фиксированы исходные параметры задачи:  $\varepsilon > 0, l > 0$ . Тогда для произвольного  $T > 0$  найдется такое  $\mu > 0$ , что при достаточно малых начальных функций  $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, l])$  и  $u_1(x) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, l])$  :

$$\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} \leq \mu, \quad \|u_1\|_{L^\infty(0,l)} \leq \mu,$$

удовлетворяющих условиям

$$u_{0x}(0) = u_{0x}(l) = u_{1x}(0) = u_{1x}(l) = 0,$$

существует единственное решение рассматриваемой задачи в классе  $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}([0, l]))$ .

### 3. Разрушение и оценка времени разрушения решения

Пусть  $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[0, l])$  – это локальное единственное решение задачи (1)–(3). В этом разделе мы докажем, что

$$T \leq T_\infty = \int_{\Omega} \left(u_0(x) - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dx \left[ -2 \int_{\Omega} \left(u_0(x) - \frac{1}{\varepsilon}\right) u_1(x) dx \right]^{-1} \quad (29)$$

при достаточном условии, что

$$\int_{\Omega} \left(u_0(x) - \frac{1}{\varepsilon}\right) u_1(x) dx < 0. \quad (30)$$

Действительно, интегрируя уравнение (1) по области  $(0, l)$ , с учетом граничных условий (2) мы получим следующее равенство:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^l \left( \varepsilon u(x, t) - \frac{\varepsilon^2}{2} u^2(x, t) \right) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \int_0^l \left( u(x, t) - \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 dx = 0. \quad (31)$$

Интегрируя равенство (31) по времени, с учетом начальных условий (3) получим следующее равенство:

$$0 \leq \int_0^l \left( u(x, t) - \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 dx = \int_0^l \left( u_0(x) - \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 dx + 2t \int_{\Omega} \left( u_0(x) - \frac{1}{\varepsilon} \right) u_1(x) dx. \quad (32)$$

Потребуем выполнения условия (30). Тогда сразу же приходим к искомой оценке (29), поскольку при  $t > T_\infty$  равенство (32) становится противоречивым.

#### 4. Численная диагностика разрушения решения

В этом разделе мы детально обсудим методы, которые помогут нам численно диагностировать факт разрушения решения и уточнить его локализацию как во времени, так и в пространстве. Напомним, что априорная информация, полученная аналитически в разделе «Разрушение и оценка времени разрушения решения», дает нам оценку времени разрушения решения, однако не дает детального описания процесса разрушения. Численный же подход, использующий аналитически полученную априорную информацию, может помочь детализировать процесс разрушения и уточнить момент разрушения.

Будем использовать обозначения  $u_{init_0}(x), u_{init_1}(x)$  вместо  $u_0(x), u_1(x)$  в связи с тем, что мы используем подобные индексы для определения сеточных значений функций. Момент времени разрушения обозначим через  $T_{bl}$ .

Для начала сведем исходное уравнение (1) – (3) к системе первого порядка по времени. Это необходимо для применения эффективных численных методов, которые будут описаны ниже. Таким образом, задача<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( u_{xx} - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 \right) + u_{xx} = 0, & x \in (0, l), \quad t \in (0, T_{bl}], \\ u(x, 0) = u_{init_0}(x), \quad u_t(x, 0) = u_{init_1}(x), \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( u_{xx} - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 \right) = v, & x \in (0, l), \quad t \in (0, T_{bl}], \\ \frac{\partial}{\partial t} v + u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = u_{init_0}(x), \\ v(x, 0) = u_{init_1}(x)_{xx} - \varepsilon u_{init_1}(x) - \varepsilon^2 u_{init_0}(x) u_{init_1}(x), \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

#### 5. Жесткий метод прямых и схема Розенброка с комплексным коэффициентом

С целью численного решения системы (34) мы применяем жесткий метод прямых (SMOL) [6, 7] для того, чтобы свести исходную систему уравнений в частных производных к неявной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (к сожалению, не разрешенной относительно производных), которая может быть эффективно решена с помощью одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом CROS1 [8].

Сначала мы введем равномерную сетку  $X_N$  только по пространственной переменной  $x$  с шагом  $h = (l - 0)/N$ , содержащую  $N + 1$  узлов (что соответствует  $N$  интервалам):  $X_N = \{x_n, 0 \leq n \leq N : x_n = 0 + nh\}$ . Таким образом, после конечноразностной

<sup>1</sup> *Замечание.* Мы ставим задачу нахождения решения до момента времени  $T_{bl}$  включительно, хотя знаем, что решение в этот момент времени не существует и, более того, даже может разрушиться ранее. Это допущение связано с тем, что мы хотим диагностировать разрушение решения численно, а значит, нам необходимо найти *численное* решение вплоть до этого момента времени включительно.

аппроксимации пространственных производных со вторым порядком точности в (34) мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, из которой требуется определить  $N - 1$  неизвестных функций  $u_n \equiv u_n(t) \equiv u(x_n, t)$  ( $n = \overline{1, N-1}$ ,  $u_0$  и  $u_N$  определяются из соотношений, заданных граничными условиями:  $u_0 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2$ ,  $u_N = \frac{4}{3}u_{N-1} - \frac{1}{3}u_{N-2}$ ) и  $N - 1$  вспомогательных функций  $v_n \equiv v_n(t) \equiv v(x_n, t)$  ( $n = \overline{1, N-1}$ ,  $v_0$  и  $v_N$  не входят в систему):

$$\begin{cases} \frac{du_{n-1}}{dt} - \left(2 + \varepsilon h^2 + \varepsilon^2 h^2 u_n\right) \frac{du_n}{dt} + \frac{du_{n+1}}{dt} = h^2 v_n, \\ \frac{du_n}{dt} = -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}, \\ u_n(0) = u_{init_0}(x_n), \\ v_n(0) = \frac{u_{init_1}(x_{n+1}) - 2u_{init_1}(x_n) + u_{init_1}(x_{n-1})}{h^2} - \varepsilon u_{init_1}(x_n) - \varepsilon^2 u_{init_0}(x_n) u_{init_1}(x_n), \\ u_0 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2, \\ u_N = \frac{4}{3}u_{N-1} - \frac{1}{3}u_{N-2}. \end{cases} \quad (35)$$

Эта система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{u}) \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{init}, \end{cases} \quad (36)$$

где  $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_{N-1} \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_{N-1})^T$ ,  $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots \ f_{2N-2})^T$  и  $\mathbf{u}_{init} = (u_1(0) \ u_2(0) \ u_3(0) \ \dots \ u_{N-1}(0) \ v_1(0) \ v_2(0) \ v_3(0) \ \dots \ v_{N-1}(0))^T$ .

Вектор-функция  $\mathbf{f}$  имеет следующую структуру:

$$f_n = \begin{cases} h^2 v_n, & \text{если } n = \overline{1, N-1}, \\ -\frac{1}{h^2} \left( u_2 - 2u_1 + \left( \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 \right) \right), & \text{если } n = N, \\ -\frac{1}{h^2} \left( u_{n-N+2} - 2u_{n-N+1} + u_{n-N} \right), & \text{если } n = \overline{N+1, 2N-3}, \\ -\frac{1}{h^2} \left( \left( \frac{4}{3}u_{N-1} - \frac{1}{3}u_{N-2} \right) - 2u_{N-1} + u_{N-2} \right), & \text{если } n = 2N-2, \end{cases}$$

а матричная функция  $\mathbf{M}$  имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned} M_{n,n} &= \begin{cases} \frac{4}{3} - (2 + \varepsilon h^2 + \varepsilon^2 h^2 u_1), & \text{если } n = 1, \\ -(2 + \varepsilon h^2 + \varepsilon^2 h^2 u_n), & \text{если } n = \overline{2, N-2}, \\ \frac{4}{3} - (2 + \varepsilon h^2 + \varepsilon^2 h^2 u_{N-1}), & \text{если } n = N-1, \\ 1, & \text{если } n = \overline{N, 2N-2}, \end{cases} \\ M_{n,n-1} &= \begin{cases} 1, & \text{если } n = \overline{2, N-2}, \\ -\frac{1}{3} + 1, & \text{если } n = N-1, \end{cases} \\ M_{n,n+1} &= \begin{cases} -\frac{1}{3} + 1, & \text{если } n = 1, \\ 1, & \text{если } n = \overline{2, N-2}, \end{cases} \end{aligned}$$

остальные элементы матрицы  $\mathbf{M}$  равны нулю.

Для численного решения системы (36) мы будем использовать схему Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS1), которая является наилучшим выбором для решения задач такого рода по причине порядка точности этой схемы ( $O(\tau^1)$ ), ее монотонности и устойчивости ( $L_2$ ) [9].

Важно отметить, что в случае постоянной матрицы  $\mathbf{M}$  схема Розенброка с комплексным коэффициентом имеет порядок точности  $O(\tau^2)$  [10, 11]. Неявная система обыкновенных дифференциальных уравнений с такой матрицей может быть получена, если в системе (34) ввести следующую вспомогательную переменную:  $w = u_{xx} - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2}{2}u^2$ . В этом случае мы получим неявную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (подобную (35)) с постоянной (но вырожденной) матрицей, размерность которой будет в  $3/2$  раза больше исходной, что приведет к увеличению времени вычислений. Какой из этих подходов более эффективен с вычислительной точки зрения – открытый вопрос. Нашей же основной целью является демонстрация того, как можно численно диагностировать факт разрушения решения по времени и/или пространству, – таким образом, в данной работе мы не исследуем поднятый в этом замечании вопрос.

Для того чтобы применить эту схему, мы введем равномерную сетку (также можно использовать и квазиравномерную сетку без каких-либо изменений в алгоритме)  $T_M$  по  $t$ , которая имеет  $M + 1$  узлов (то есть  $M$  интервалов):  $T_M = \{t_m, 0 \leq m \leq M : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T_\infty\}$ , где напомним, что  $T_\infty$  – это верхняя оценка времени разрушения (см. (29)).

После этого мы можем применить схему CROS1 для решения системы (36):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_{m+1}) &= \mathbf{u}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) \operatorname{Re} \mathbf{w}, \\ \text{где } \mathbf{w} &\text{ является решением системы} \\ \left[ \mathbf{M}(\mathbf{u}(t_m)) - \frac{1+i}{2} (t_{m+1} - t_m) \mathbf{f}_u(\mathbf{u}(t_m)) \right] \mathbf{w} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}(t_m)). \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь  $\mathbf{f}_u$  – якобиан, который для рассматриваемой системы имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} (f_u)_{n,n+N-1} &= h^2, \quad \text{если } n = \overline{1, N-1}, \\ (f_u)_{n,n-N} &= \begin{cases} -\frac{1}{h^2}, & \text{если } n = \overline{N+1, 2N-3}, \\ -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{3h^2}, & \text{если } n = 2N-2, \end{cases} \\ (f_u)_{n,n-N+1} &= \begin{cases} \frac{2}{h^2} - \frac{4}{3h^2}, & \text{если } n = N, \\ \frac{2}{h^2}, & \text{если } n = \overline{N+1, 2N-3}, \\ \frac{2}{h^2} - \frac{4}{3h^2}, & \text{если } n = 2N-2, \end{cases} \\ (f_u)_{n,n-N+2} &= \begin{cases} -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{3h^2}, & \text{если } n = N, \\ -\frac{1}{h^2}, & \text{если } n = \overline{N+1, 2N-3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Другие компоненты матрицы  $\mathbf{f}_u$  в случае рассматриваемого уравнения равны нулю.

Таким образом, матрица системы (37) состоит из четырех блоков размерности  $(N-1) \times (N-1)$  (структура матрицы представлена на рис. 1). Этот факт дает возможность применить алгоритм решения СЛАУ, который найдет решение системы (37) за  $O(N)$  операций.



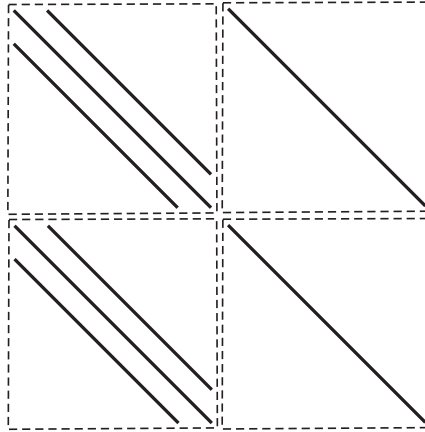


Рис. 1. Структура матрицы СЛАУ (37)

## 6. Вычисления на сгущающихся сетках

При численных расчетах важно не только получить приближенный численный результат, но также и выполнить некоторую оценку его точности. Метод вычисления апостериорной асимптотически точной оценки погрешности [10] позволяет это сделать. Но этот метод также может помочь и диагностировать факт разрушения точного решения [11]. Основные формулы и утверждения этого параграфа впервые были представлены в работах [10–12].

Мы аппроксимировали все пространственные производные в (34) с точностью  $O(h^2)$ , а при численном интегрировании системы (36) используем схему CROS1, которая имеет точность  $O(\tau^1)$ . Поэтому построенный метод решения системы (34) имеет точность  $O(\tau^1 + h^2)$ .

Для начала введем базовую сетку  $X_N \times T_M: \{x_n, t_m\}$ ,  $0 \leq n \leq N$ ,  $0 \leq m \leq M$ . После этого произведем последовательное сгущение сетки, начиная с базовой, и вычислим решения  $u(x, t)$  на полученных сетках. В связи с тем, что теоретический порядок точности по времени равен 1, а по пространству 2, мы выполним последовательное сгущение сетки по времени в целое число раз  $r_t$  и сгущение пространственной сетки в целое число раз  $r_x$  так, чтобы выполнялось условие  $r_t^1 = r_x^2$  (подробности см. в [12]). Наиболее удобно для счета выбрать  $r_t = 4$  и  $r_x = 2$ . В этом случае каждая последующая сетка  $X_{r_x^{s-1}N} \times T_{r_t^{s-1}M}$  ( $s$  – номер сетки) имеет узлы, совпадающие с узлами базовой сетки  $(x_n, t_m)$ . В этих узлах  $(x, t)$  мы можем выполнить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности [11, 12]

$$\Delta^{(r_x^s N, r_t^s M)}(x, t) = \frac{u^{(r_x^s N, r_t^s M)}(x, t) - u^{(r_x^{s-1} N, r_t^{s-1} M)}(x, t)}{r_t^1 - 1} + o(\tau^1 + h^2)$$

и оценить эффективный порядок точности [11, 12]

$$p_s^{eff}(x, t) = \log_{r_t} \frac{u^{(r_x^{s-1} N, r_t^{s-1} M)}(x, t) - u^{(r_x^{s-2} N, r_t^{s-2} M)}(x, t)}{u^{(r_x^s N, r_t^s M)}(x, t) - u^{(r_x^{s-1} N, r_t^{s-1} M)}(x, t)}.$$

В точках  $(x, t)$ , в которых решение исходной задачи имеет непрерывные первые производные по времени и вторые по пространству, имеет место сходимость

$$p_s^{eff}(x, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} p^{theor} = 1, \tag{38}$$

и соответствующая оценка погрешности является асимптотически точной при  $s \rightarrow \infty$  (или, что то же самое,  $N, M \rightarrow \infty$ ). Нарушение этой сходимости (38) говорит о потере гладкости точного решения. В частности, в случае степенной «сингулярности»  $u(x, t) \sim (t^* - t)^{-\beta}$  для любого  $t > t^*$  эффективный порядок точности  $p^{eff}(x, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\beta$ . Это позволяет нам найти соответствующую степень  $\beta$ . Если  $p^{eff}(x, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\infty$  для любого  $t > t^*$ , мы можем утверждать, что решение экспоненциально возрастает, т.е.  $u(x, t) \rightarrow \infty$ ; если  $p^{eff}(x, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$  для любого  $t > t^*$ , то рост решения в окрестности «сингулярности» является логарифмическим:  $u(x, t) \sim \ln(t^* - t)$ . Момент разрушения решения  $t^*$  может быть найден с точностью до величины интервала базовой сетки по времени.

Если нарушение гладкости решения возникает во всей области по пространственной переменной одновременно, то отклонение сходимости  $p^{eff}(x, t)$  от 1 возникает во всех точках сетки  $\{x_n\}$  с первого временного слоя  $t \geq t^*$  (см. *Пример 1а*). Если разрушение решения возникает в одной-единственной точке  $x^*$ , то описанный метод позволяет проследить во времени процесс разрушения решения в остальных точках (см. *Пример 1б* и *Пример 1в*). Такая диагностика процесса разрушения решения возможна в связи с тем, что схема CROS не приводит к переполнению даже в том случае, если решение задачи устремляется к бесконечности [10, 11].

**Пример 1а.** Для начала рассмотрим пример со следующим набором входных данных:  $u_{init_0}(x) \equiv 0$ ,  $u_{init_1}(x) \equiv -1$ ,  $l = \pi$ ,  $\varepsilon = 1$ .

В данном случае решение уравнения (33) может быть найдено аналитически:

$$u(x, t) = \sqrt{1 - 2t} - 1. \quad (39)$$

Очевидно, что в данном случае время разрушения равно  $T_{bl} = T_\infty = 0,5$ . Кроме того, это подтверждается непосредственно формулой (29).

Применим численный алгоритм диагностики момента и места разрушения решения, а заодно и сверим получившиеся результаты с аналитическими расчетами. Для численного решения задачи (33) мы возьмем следующий набор параметров:  $T_\infty = 0,5$ ,  $N = 50$ ,  $M = 200$ ,  $r_x = 2$ ,  $r_t = 4$ ,  $S = 6$  (число последовательно используемых для вычислений сеток, включая начальную).

Получив приближенное численное решение на разных сетках, мы можем проверить сходимость эффективного порядка точности к теоретическому для каждого временного слоя по формуле

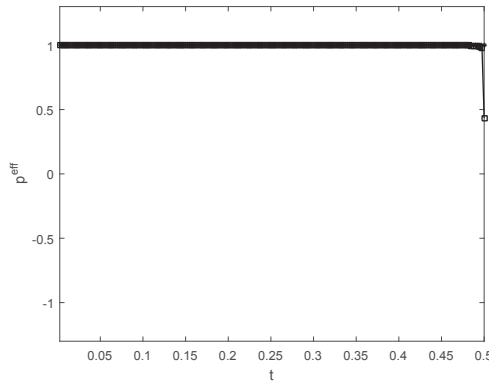
$$p_s^{eff}(t_m) = \log_{r_t} \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N (u(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)(x_n, t_m) - u(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)(x_n, t_m))^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N (u(r_x^sN, r_t^sM)(x_n, t_m) - u(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)(x_n, t_m))^2}}, \quad (40)$$

где  $s$  – номер соответствующей сетки. Также еще раз хотим обратить внимание, что под обозначением  $(x_n, t_m)$  подразумеваются узлы, совпадающие с соответствующими узлами базовой сетки. После вычислений на  $S$  вложенных сетках эффективный порядок точности  $p^{eff}$  для каждого временного слоя  $t_m$  сходится к  $p^{theor} = 1$  (см. рис. 2) за исключением временного слоя, соответствующего моменту времени  $t_{200}$ :  $p^{eff}(t_{200}) \rightarrow 0,5$ , что означает, что  $T_{bl} \in (t_{199}, t_{200}] \equiv (0,498, 0,5]$  является временем разрушения решения, и что в точке  $T_{bl}$  решение имеет степенной характер роста  $u(x, t) \sim (T_{bl} - t)^{0,5}$ . Мы также можем оценить эффективный порядок точности для

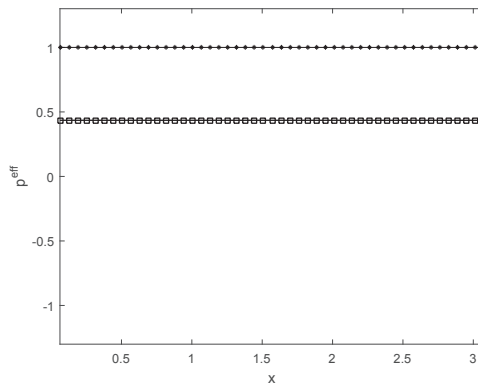
каждой пространственной точки выбранного временного слоя, соответствующего моменту времени  $t_m$ , по формуле

$$p_s^{eff}(x_n, t_m) = \log_{r_t} \frac{u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(x_n, t_m) - u^{(r_x^{s-2}N, r_t^{s-2}M)}(x_n, t_m)}{u^{(r_x^sN, r_t^sM)}(x_n, t_m) - u^{(r_x^{s-1}N, r_t^{s-1}M)}(x_n, t_m)}. \quad (41)$$

Можно использовать эту формулу, например, для временного слоя, соответствующего моменту времени  $t_{200}$ , в котором было диагностировано разрушение решения, с целью определить, возникло ли разрушение на всем временном слое или только в отдельных точках по пространственной переменной. На рис. 3 мы можем видеть, что решение разрушилось во всех пространственных точках соответствующего временного слоя. Тем не менее, как мы видим на рис. 2, «точной» сходимости  $p^{eff}$  к 0,5 нет. В данном случае этого можно добиться, увеличив число сеток  $S$ , на которых будут выполняться вычисления.



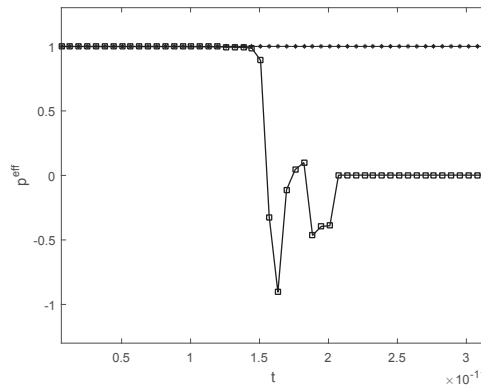
**Рис. 2.** Пример 1а. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя. Разрушение решения диагностировано в момент времени  $T_{bl} \in (t_{199}, t_{200}] \equiv (0, 498, 0, 5]$ . Здесь и далее нулевой временной слой не показан



**Рис. 3.** Пример 1а. Эффективный порядок точности для каждой пространственной точки временного слоя, соответствующего моменту времени  $t_{200} = 0, 5$ , на котором был диагностирован факт разрушения решения. Разрушение решения диагностировано во всех пространственных точках этого временного слоя

**Пример 1б.** Рассмотрим пример со следующим набором данных:  $u_{init_0}(x) \equiv 0$ ,  $u_{init_1}(x) \equiv -(x(\pi - x))^2 \sin \frac{x}{3}$ ,  $l = \pi$ ,  $\varepsilon = 10^{10}$ .

В данном случае решение уравнения (33) уже не может быть найдено аналитически. Для численной диагностики разрушения решения во времени и в пространстве опять применим описанный алгоритм. Верхняя оценка  $T_\infty$  для времени разрушения  $T_{bl}$  может быть вычислена по формуле (29):  $T_\infty \approx 3,14 \cdot 10^{-11}$ . Для численного решения задачи (33) мы будем использовать следующий набор параметров:  $T_\infty = 3,14 \cdot 10^{-11}$ ,  $N = 50$ ,  $M = 50$ ,  $r_x = 2$ ,  $r_t = 4$ ,  $S = 5$  (число сеток, использовавшихся для вычислений, включая исходную). Так же, как и в *Примере 1а*, мы можем оценить эффективный порядок точности по формуле (40). После вычислений на  $S$  вложенных сетках эффективный порядок точности  $p^{eff}$  для каждого временного слоя  $t_m$  сходится к  $p^{theor} = 1$  (см. рис. 4) до временного слоя, соответствующего моменту времени  $t_{25}$ . Это означает, что  $T_{bl} \in (t_{24}, t_{25}] \equiv (1,44, 1,51] \cdot 10^{-11}$  является временем разрушения решения. Мы также можем использовать формулу (41) для временного слоя, который соответствует моменту времени  $t_{25}$  и на котором было диагностировано разрушение решения, с целью определить, возникло ли разрушение на всем временном слое или только в отдельных точках по пространственной переменной. На рис. 5 мы можем видеть, что решение разрушается в одной пространственной точке соответствующего временного слоя, а затем взрыв распространяется постепенно на остальные точки отрезка.

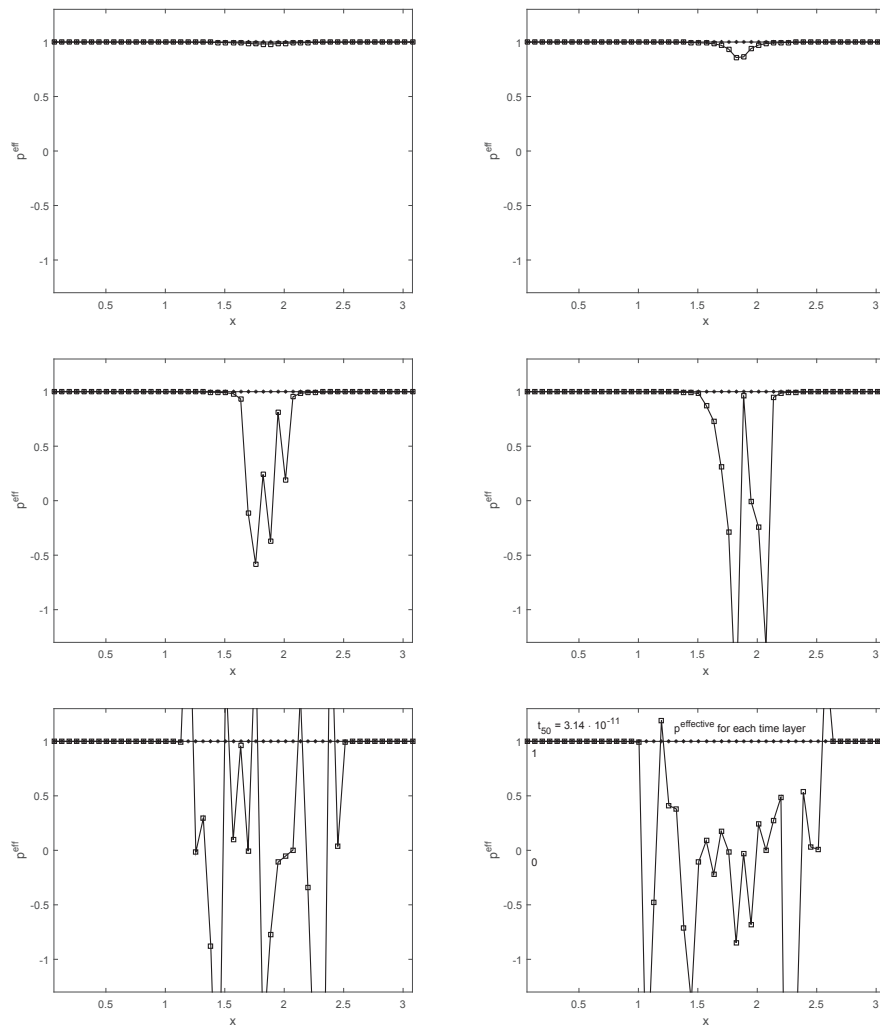


**Рис. 4.** Пример 1б. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя. Разрушение решения диагностировано в точке  $T_{bl} \in (t_{24}, t_{25}] \equiv (1,44, 1,51] \cdot 10^{-11}$

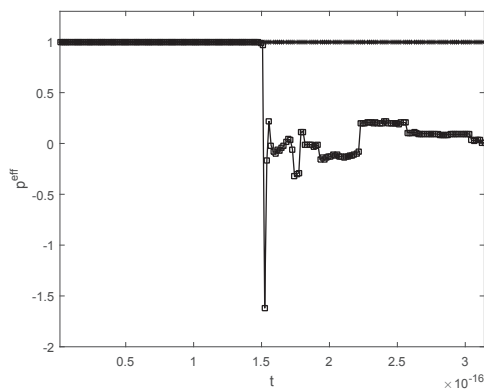
**Пример 1в.** Рассмотрим теперь аналогичную *Примеру 1б* задачу, но с более большим  $\varepsilon$ :  $u_{init_0}(x) \equiv 0$ ,  $u_{init_1}(x) \equiv -(x(\pi - x))^2 \sin \frac{x}{3}$ ,  $l = \pi$ ,  $\varepsilon = 10^{15}$ .

В этом случае решение уравнения (33) также не может быть найдено аналитически. Применим вновь описанный выше алгоритм для разрушения решения во времени и в пространстве. Верхнюю оценку  $T_\infty$  для времени разрушения  $T_{bl}$  вычисляем по формуле (29):  $T_\infty \approx 3,14 \cdot 10^{-16}$ . Для численного решения задачи (33) мы будем использовать следующий набор параметров:  $T_\infty = 3,14 \cdot 10^{-16}$ ,  $N = 50$ ,  $M = 200$ ,  $r_x = 2$ ,  $r_t = 4$ ,  $S = 5$  (число сеток, использовавшихся для вычислений, включая исходную).

Так же, как и в предыдущих двух примерах, мы можем оценить эффективный порядок точности по формуле (40). После вычислений на  $S$  вложенных сетках эффективный порядок точности  $p^{eff}$  для каждого временного слоя  $t_m$  сходится к  $p^{theor} = 1$  (см. рис. 6) до временного слоя, соответствующего моменту времени  $t_{98}$ . Это означает, что  $T_{bl} \in (t_{97}, t_{98}] \equiv (1,51, 1,52] \cdot 10^{-16}$  является временем разрушения решения. Используем формулу (41) для временного слоя, который соответствует моменту



**Рис. 5.** Пример 1б. Эффективный порядок точности для каждой пространственной точки для временных слоев  $(t_{24}, t_{25}, t_{26}, t_{27}, t_{28}, t_{39}, t_{50})$ . Здесь мы видим, что сначала разрушение происходит в одной пространственной точке, а потом оно распространяется на остальные точки отрезка



**Рис. 6.** Пример 1в. Эффективный порядок точности для каждого временного слоя. Разрушение решения диагностировано в точке  $T_{bl} \in (t_{97}, t_{98}] \equiv (1, 51, 1, 52] \cdot 10^{-16}$

времени  $t_{98}$  и на котором было диагностировано разрушение решения, с целью определить, возникло ли разрушение на всем временном слое или только в отдельных точках по пространственной переменной. На рис. 7 мы можем видеть, что решение разрушается в одной пространственной точке соответствующего временного слоя, а затем взрыв распространяется постепенно на остальные точки отрезка.

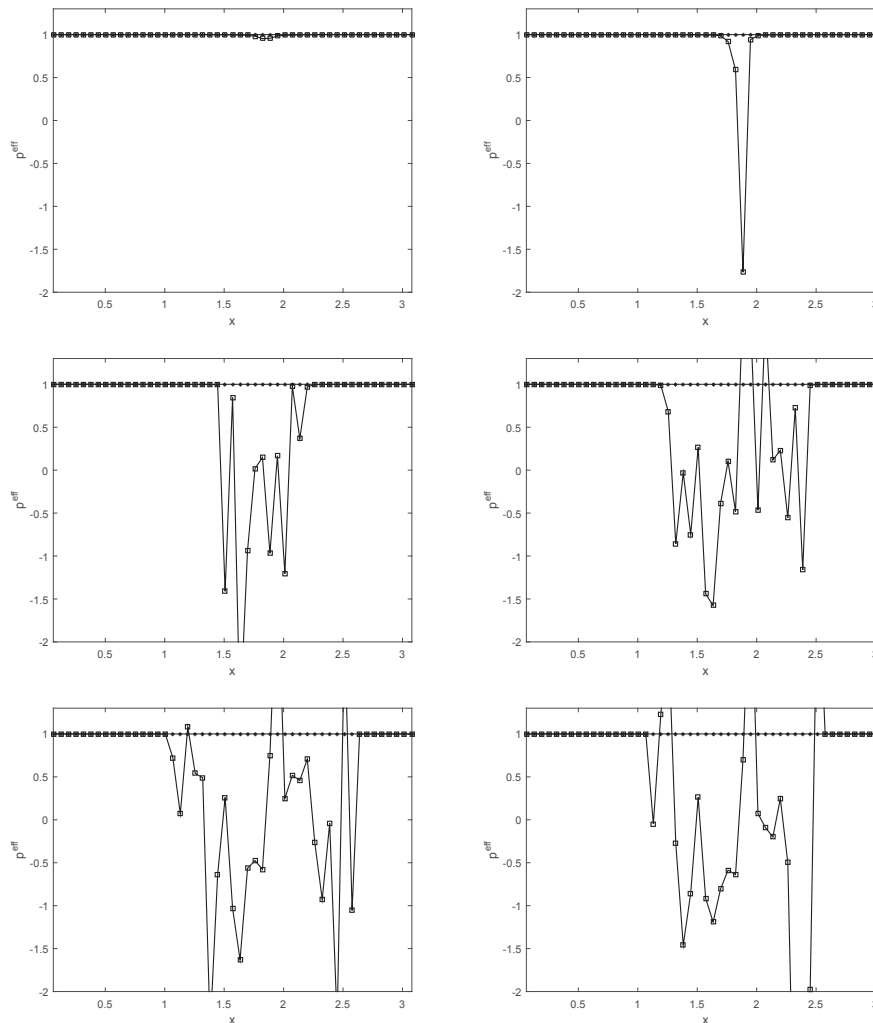


Рис. 7. Пример 1в. Эффективный порядок точности для каждой пространственной точки для временных слоев ( $t_{97}, t_{98}, t_{110}, t_{150}, t_{180}, t_{200}$ ). Здесь мы видим, что сначала разрушение происходит в одной пространственной точке, а потом оно распространяется на остальные точки отрезка

## Литература

1. Корпусов, М.О. Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа / М.О. Корпусов // Известия РАН. Серия математическая. – 2015. –Т. 79, № 5. – С. 103–162.
2. Korpusov, M.O. Blow-up for One Sobolev Problem: Theoretical Approach and Numerical Analysis / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, A.A. Panin, E.V. Yushkov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2016. – V. 442, № 2. – P. 451–468.

3. Korpusov, M.O. Blow-up Phenomena in the Model of a Space Charge Stratification in Semiconductors: Analytical and Numerical Analysis / M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, A.A. Panin, E.V. Yushkov // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2017. – V. 40, № 7. – P. 2336–2346.
4. Корпусов, М.О. О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения ионно-звуковых волн / М.О. Корпусов // *Теоретическая и математическая физика*. – 2016. – Т. 187, № 3. – С. 447–454.
5. Панин, А.А. О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра / А.А. Панин // *Математические заметки*. – 2015. – Т. 97, № 6. – С. 884–903.
6. Hairer, E. Solving of Ordinary Differential Equations / E. Hairer, G. Wanner. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
7. Калиткин, Н.Н. Численные методы решения жестких систем / Н.Н. Калиткин // *Математическое моделирование*. – 1995. – Т. 7, № 5. – С. 8–11.
8. Rosenbrock, H.H. Some General Implicit Processes for the Numerical Solution of Differential Equations / H.H. Rosenbrock // *The Computer Journal*. – 1963. – V. 5, № 4. – P. 329–330.
9. Альшин, А.Б. Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем / А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Н.Н. Калиткин, А.Б. Корягина // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2006. – Т. 46, № 8. – С. 1392–1414.
10. Альшина, Е.А. Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности / Е.А. Альшина, Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2005. – Т. 45, № 10. – С. 1837–1847.
11. Al'shin A.B. Numerical Diagnosis of Blow-up of Solutions of Pseudoparabolic Equations / A.B. Al'shin, E.A. Al'shina // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2008. – V. 148, № 1. – С. 143–162.
12. Вычисления на квазиравномерных сетках / Н.Н. Калиткин, А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Б.В. Рогов. – М.: Физматлит, 2005.

Максим Олегович Корпусов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики, физический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Российская Федерация), korpusov@gmail.com.

Дмитрий Витальевич Лукьяненко, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, физический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Российская Федерация), lukyanenko@physics.msu.ru.

Евгений Алексеевич Овсянников, студент, кафедра математики, физический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Российская Федерация), evg.bud@yandex.ru.

Александр Анатольевич Панин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, физический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Российская Федерация), a-panin@yandex.ru.

*Поступила в редакцию 7 марта 2017 г.*

**LOCAL SOLVABILITY AND DECAY OF THE SOLUTION  
OF AN EQUATION WITH QUADRATIC NONCOERCIVE  
NONLINEARITY**

*M.O. Korpusov, D.V. Lukyanenko, E.A. Ovsyannikov, A.A. Panin*  
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation,  
E-mail: korpusov@gmail.com, lukyanenko@physics.msu.ru,  
evg.bud@yandex.ru, a-panin@yandex.ru

An initial-boundary value problem for plasma ion-sound wave equation is considered. Boltzmann distribution is approximated by a quadratic function. The local (in time) solvability is proved and the analytical-numerical investigation of the solution's decay is performed for the considered problem. The sufficient conditions for solution's decay and an upper bound of the decay moment are obtained by the test function method. In some numerical examples, the estimation is specified by Richardson's mesh refinement method. The time interval for numerical modelling is chosen according to the decay moment's analytical upper bound. In return, numerical calculations refine the moment and the space-time pattern of the decay. Thus, analytical and numerical parts of the investigation amplify each other.

*Keywords: blow-up; nonlinear initial-boundary value problem; Sobolev type equation; exponential nonlinearity; Richardson extrapolation.*

## References

1. Korpusov M.O. Critical Exponents of Instantaneous Blow-up or Local Solvability of Non-Linear Equations of Sobolev Type. *Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 955–1012. DOI: 10.1070/IM2015v079n05ABEH002768
2. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-up for One Sobolev Problem: Theoretical Approach and Numerical Analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, vol. 442, no. 2, pp. 451–468. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.04.069
3. Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V. Blow-up Phenomena in the Model of a Space Charge Stratification in Semiconductors: Analytical and Numerical Analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, vol. 40, no. 7, pp. 2336–2346. DOI: 10.1002/ma.4142
4. Korpusov M.O. The Finite-Time Blowup of the Solution of an Initial Boundary-Value Problem for the Nonlinear Equation of Ion Sound Waves. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2016, vol. 187, no. 3, pp. 835–841. DOI: 10.1134/S0040577916060040
5. Panin A.A. On Local Solvability and Blow-up of the Solution of an Abstract Nonlinear Volterra Integral Equation. *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 892–908. DOI: 10.1134/S0001434615050247
6. Hairer E. *Solving of Ordinary Differential Equations*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2002.
7. Kalitkin N.N. [Numerical Methods for Solving Stiff Systems]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1995, vol. 7, no. 5, pp. 8–11. (in Russian)
8. Rosenbrock H.H. Some General Implicit Processes for the Numerical Solution of Differential Equations. *The Computer Journal*, 1963, vol. 5, issue 4, pp. 329–330. DOI: 10.1093/comjnl/5.4.329



9. Al'shin A.B., Al'shina E.A., Kalitkin N.N., Koryagina A.B. Rosenbrock Schemes with Complex Coefficients for Stiff and Differential-Algebraic Systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 8, pp. 1320–1340. DOI: 10.1134/S0965542506080057
10. Al'shina E.A., Kalitkin N.N., Koryakin P.V. Diagnosis of Singularities of an Exact Solution in Computations with Accuracy Control. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no. 10, pp. 1769–1779.
11. Al'shin A.B., Al'shina E.A. Numerical Diagnosis of Blow-up of Solutions of Pseudoparabolic Equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 148, no. 1, pp. 143–162. DOI: 10.1007/s10958-007-0542-2
12. Kalitkin N.N., Al'shin A.B., Al'shina E.A., Rogov B.V. *Vychisleniya na kvaziravnomernykh setkakh* [Calculations on Quasi-Uniform Grids]. Moscow, Fizmatlit, 2005.

*Received March 7, 2017*