

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

*И.В. Семушин<sup>1</sup>, А.В. Цыганов<sup>2</sup>, Ю.В. Цыганова<sup>1</sup>, А.В. Голубков<sup>2</sup>,  
С.Д. Винокуров<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск

<sup>2</sup>Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова,  
г. Ульяновск

Построена линейная дискретная модель кругового движения влево/вправо с заданным радиусом. Сформулирован и реализован новый алгоритм математического моделирования траектории движущегося объекта, состоящей из отрезков прямолинейного и кругового движения в условиях неполных зашумленных измерений. Показано, как применять алгоритмы оптимальной дискретной фильтрации для оценивания такой траектории. Разработан программный комплекс «Моделирование и оценивание траектории подвижного объекта v1.0» для моделирования и линейного оценивания траектории движущегося объекта на основе дискретных моделей равномерного прямолинейного и кругового движения. Результаты работы могут найти применение при решении практических задач судовождения, робототехники, обработки сигналов со сканирующих дальномеров и др.

*Ключевые слова: маневрирование движущегося объекта; дискретная стохастическая модель; линейное оценивание; MATLAB.*

## Введение

В работе рассмотрены вопросы построения и оценивания линейных (относительно вектора состояния) дискретных моделей стохастических систем, описывающих траектории, состоящие из отрезков прямолинейного и кругового движения с постоянной скоростью.

Линейность этих моделей позволяет применять методы оптимальной дискретной фильтрации без упрощающей линеаризации для решения важных практических задач: оценивание траектории и обнаружение момента непредвиденного изменения режима движения (маневрирования). Такая постановка задачи математического моделирования и оценивания траектории может рассматриваться при решении задач судовождения, так как прямолинейное и/или круговое движение является типовым для морского подвижного объекта, а задача оценивания его траектории и обнаружения момента маневрирования является крайне важной в силу опасности непредвиденного изменения режима движения.

В настоящее время робототехника является другой актуальной областью исследований, в которой применимы результаты данной работы, так как траектория движения мобильного робота также имеет характер прямолинейного и/или кругового движения. Методы построения и оценивания траектории движения робота с помощью дискретных линейных моделей могут быть использованы для решения задач слежения за движущимися объектами.

Главное преимущество предлагаемого в работе подхода заключается в том, что нелинейная в целом математическая модель траектории движущегося объекта заменяется набором линейных динамических моделей, для которых на каждом участке

движения можно применять вместо нелинейных фильтров (имеющих неизбежные погрешности вычислений вследствие линеаризации) оптимальные линейные дискретные алгоритмы калмановской фильтрации [1]. Таким образом, нет необходимости применять нелинейные фильтры, такие как расширенный фильтр Калмана, линеаризованный фильтр Калмана [2] и др.

Однако, предлагаемый в работе подход неизбежно влечет необходимость решения другой задачи – скорейшего обнаружения момента изменения режима движения (маневрирования) движущегося объекта. Решение этой задачи будет предметом дальнейших исследований авторов.

В первом разделе рассмотрены линейные модели движения. Построена дискретная линейная модель кругового движения при повороте влево/вправо. Во втором разделе сформулирован новый алгоритм математического моделирования траектории движущегося объекта, состоящей из отрезков прямолинейного и кругового движения влево либо вправо с заданным радиусом. В третьем разделе приведены методы оптимальной дискретной фильтрации: стандартный алгоритм Калмана и две его численно устойчивые модификации (квадратно-корневой фильтр и UD-фильтр). В четвертом разделе дано краткое описание разработанного авторами программного комплекса «Моделирование и оценивание траектории подвижного объекта v1.0». Наконец, в пятом разделе приведены результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие работоспособность предложенного подхода к моделированию и оцениванию сложной, изменяющейся во времени траектории движущегося объекта.

## 1. Математическая модель траектории движущегося объекта

Следуя [3], введем четырехмерный вектор состояния

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

где  $x_1$  – координата  $x$  вдоль оси  $Ox$ , м,  $x_2$  – скорость  $v_x$  вдоль оси  $Ox$ , м/с,  $x_3$  – координата  $y$  вдоль оси  $Oy$ , м,  $x_4$  – скорость  $v_y$  вдоль оси  $Oy$ , м/с для непрерывной модели кругового равномерного движения влево (МКРД-Л)

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_n^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n(\omega_n x_s - v_{sy}) \\ 0 \\ \omega_n(\omega_n y_s + v_{sx}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

с известными начальными условиями

$$x_s = \begin{bmatrix} x_{1s} = x_s \\ x_{2s} = v_{sx} \\ x_{3s} = y_s \\ x_{4s} = v_{sy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

и также для непрерывной модели кругового равномерного движения вправо (МКРД-П)

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_n^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n(\omega_n x_s + v_{sy}) \\ 0 \\ \omega_n(\omega_n y_s - v_{sx}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

с известными начальными условиями (2) в момент переключения  $t = s$ . Полагая, что измеряются только координаты  $x_1, x_3$  (скорости  $x_2, x_4$  не измеряются), запишем вектор наблюдения

$$z_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + v_t, \quad (4)$$

включающий вектор погрешностей измерения координат,  $v_t = [v_{1t}|v_{2t}]^T$ , который считаем гауссовым белым шумом с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации  $R > 0$ .

**Теорема 1.** [3] Пусть  $|v_s| = \sqrt{v_{sx}^2 + v_{sy}^2} > 0$ , где  $v_s = \begin{bmatrix} v_{sx} \\ v_{sy} \end{bmatrix}$  – вектор скорости в точке с координатами  $x_s, y_s$  в момент  $t = s$  переключения с модели прямолинейного равномерного движения (МПРД) на модель кругового равномерного движения (МКРД). Тогда единственное решение для модели МКРД-Л с некоторым параметром  $\omega_n > 0$  дается выражениями

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= x_s + r \sin[\omega_n(t-s) + \alpha] - r \sin \alpha, \\ x_{2t} &= r\omega_n \cos[\omega_n(t-s) + \alpha], \\ x_{3t} &= y_s - r \cos[\omega_n(t-s) + \alpha] + r \cos \alpha, \\ x_{4t} &= r\omega_n \sin[\omega_n(t-s) + \alpha] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и описывает движение объекта влево от направления вектора  $v_s$  по дуге окружности с координатами центра

$$\begin{aligned} x_c &= x_s - r \sin \alpha, \\ y_c &= y_s + r \cos \alpha, \end{aligned}$$

а единственное решение для модели МКРД-П с некоторым параметром  $\omega_n > 0$  дается выражениями

$$\left. \begin{aligned} x_{1t} &= x_s + r \sin[\omega_n(t-s) - \alpha] + r \sin \alpha, \\ x_{2t} &= r\omega_n \cos[\omega_n(t-s) - \alpha], \\ x_{3t} &= y_s + r \cos[\omega_n(t-s) - \alpha] - r \cos \alpha, \\ x_{4t} &= -r\omega_n \sin[\omega_n(t-s) - \alpha] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и описывает движение объекта вправо от направления вектора  $v_s$  по дуге окружности с координатами центра

$$\begin{aligned} x_c &= x_s + r \sin \alpha, \\ y_c &= y_s - r \cos \alpha, \end{aligned}$$

где  $\sin \alpha = \frac{v_{sy}}{|v_s|}$ ,  $\cos \alpha = \frac{v_{sx}}{|v_s|}$ ,  $r = \frac{|v_s|}{\omega_n}$ .

Подробное доказательство см. в работе [3].

Для непрерывной модели прямолинейного равномерного движения (МПРД) имеем очевидные уравнения

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_t \quad (7)$$

с известными начальными условиями (2) в момент переключения  $t = s$  с одной модели движения на другую.

Будем считать, что наблюдения за объектом производятся дискретно во времени с постоянным интервалом  $t_{i+1} - t_i \triangleq \tau$ . Модели МКРД-Л и МКРД-П имеют стандартный вид непрерывных инвариантных во времени линейных динамических систем

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Bu(t), \quad (8)$$

где матрицы  $F$ ,  $B$  для модели МПРД определены в (7), а для моделей МКРД-Л и МКРД-П – в (1) и (3) соответственно;  $u(t) = 1$ . Выполнив переход от непрерывной модели (8) к модели в дискретном времени [2, с. 40–42], получим следующий результат:

Дискретная модель Д-МКРД кругового движения по окружности при повороте влево/вправо

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= \Phi x_i + B_d^{L/R}, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} \Phi_c & 0 \\ 0 & \Phi_c \end{bmatrix}, \quad \Phi_c = \begin{bmatrix} \cos \omega_n \tau & \omega_n^{-1} \sin \omega_n \tau \\ -\omega_n \sin \omega_n \tau & \cos \omega_n \tau \end{bmatrix}, \\ B_d^L &= \begin{bmatrix} (x_s - \omega_n^{-1} v_{sy})(1 - \cos \omega_n \tau) \\ (\omega_n x_s - v_{sy}) \sin \omega_n \tau \\ (y_s + \omega_n^{-1} v_{sx})(1 - \cos \omega_n \tau) \\ (\omega_n y_s + v_{sx}) \sin \omega_n \tau \end{bmatrix}, \quad B_d^R = \begin{bmatrix} (x_s + \omega_n^{-1} v_{sy})(1 - \cos \omega_n \tau) \\ (\omega_n x_s + v_{sy}) \sin \omega_n \tau \\ (y_s - \omega_n^{-1} v_{sx})(1 - \cos \omega_n \tau) \\ (\omega_n y_s - v_{sx}) \sin \omega_n \tau \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Дискретная модель (9) описывает движение по дуге окружности влево (против часовой стрелки) либо вправо (по часовой стрелке). Рассмотрим возможность добавления в уравнение состояния дискретной модели (9) аддитивной стохастической составляющей движения. Тогда общее уравнение дискретной модели примет вид

$$x_{i+1} = \Phi x_i + B_d + G w_{di}. \quad (10)$$

В уравнении (10)  $G$  – матрица передачи дискретного белого шума  $w_{di}$ . В случае, если шум не является дискретным белым, модель шума должна быть включена в уравнение состояния, тем самым повышая его размерность. Считаем, что шумовая составляющая может присутствовать во второй и четвертой компонентах вектора состояния  $x$ :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

т.е. проекции скоростей движения объекта на координатные оси  $Ox$  и  $Oy$  могут быть непостоянными.

Дискретная версия Д-МПРД получается из непрерывной версии (7), после добавления стохастической составляющей в том же виде (10), но с матрицами

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_p & 0 \\ 0 & \Phi_p \end{bmatrix}, \quad \Phi_p = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

## 2. Алгоритм моделирования движения объекта

Разработаем новый алгоритм математического моделирования траектории движущегося объекта, состоящей из отрезков прямолинейного и кругового движения влево/вправо с заданным радиусом.

Примем следующее правило «переключения» с одного режима на другой: при переключении режимов (маневрировании объекта) последнее вычисленное значение вектора состояния объекта считаем начальным значением для нового режима движения. В начале моделирования начальное значение вектора состояния известно. Сформулируем полученный результат:

АЛГОРИТМ 1. [Математическое моделирование траектории движущегося объекта]

### I. Начальные данные:

- ▷ положить  $k = 0$  (дискретное время);
- ▷ задать значения  $x_k$ ,  $\tau$ ,  $Q$ ,  $R$ ;
- ▷ установить план траектории из  $p$  отрезков прямолинейного и/или кругового движения;
- ▷ для  $m$ -го отрезка кругового движения задать радиус поворота  $r_m$ .

### II. Моделирование траектории:

```

for  $m = 1$  to  $p$  do
  1 ▷ определить тип  $m$ -го отрезка траектории  $type$  и его длину  $length$ ;
  2 ▷ if  $type = \text{ПРД}$  then
  3 ▷   for  $i = k + 1$  to  $k + length$  do
  4 ▷     вычислить  $x_i$  согласно (10);
  5 ▷   end
  6 ▷   else
  7 ▷     определить значение радиуса поворота  $r_m$ ;
  8 ▷     вычислить значение  $\omega_n = \sqrt{x_k(2)^2 + x_k(4)^2}/r_m$  и матрицу  $\Phi_c(\omega_n, x_k)$ ;
  9 ▷     if  $type = \text{КРД-Л}$  then
 10 ▷      вычислить матрицу  $B_d^L(\omega_n, x_k)$ ;
 11 ▷     else

```

```

9 ▷      вычислить матрицу  $B_d^R(\omega_n, x_k)$ ;
        end
10 ▷     for  $i = k + 1$  to  $k + length$  do
11 ▷      вычислить  $x_i$  согласно (9);
        end
12 ▷     присвоить  $k = i$ ;
end

```

III. Конец.

### 3. Алгоритмы линейного оценивания

Поскольку в дискретной модели измерений (4) присутствуют случайные погрешности, значения вектора состояния  $x_k$  в дискретные моменты времени  $t_k$  недоступны для прямого наблюдения. Для того, чтобы иметь возможность оценивать  $x_k$ , применим алгоритмы оптимальной дискретной фильтрации. Для дискретных линейных систем с гауссовыми шумами оптимальным алгоритмом линейного оценивания является фильтр Калмана [1]. Следует отметить, что при решении практических задач целесообразно применять современные численно эффективные реализации дискретного фильтра Калмана (ФК) – квадратно-корневые и UD реализации. Особенность таких алгоритмов (в отличие от стандартной схемы Калмана) заключается в том, что они обладают свойством численной устойчивости по отношению к ошибкам машинного округления, препятствуя таким образом расходимости оценок, вычисляемых в алгоритме фильтрации. Недавний подробный обзор современных численно устойчивых реализаций дискретного ФК содержится в [4].

Рассмотрим три варианта алгоритма оптимальной дискретной фильтрации: стандартный фильтр Калмана (СКФ), квадратно-корневой ковариационный фильтр (SRKF) и ковариационный UD-фильтр (UD-CF). Все алгоритмы представлены в одностадийной форме.

#### АЛГОРИТМ 2. [СКФ – Conventional KF]

0. НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ:  $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$  и  $P_0 = \Pi_0$ ,  $\Pi_0 > 0$ .

1. РЕКУРРЕНТНО ОБНОВЛЯТЬ ВЕЛИЧИНЫ ( $k \geq 0$ )

$$\begin{aligned}
 \text{коэффициент обр. связи:} & \quad K_{p,k} = \Phi P_k H^\top R_{e,k}^{-1}, \quad R_{e,k} = R + H P_k H^\top; \\
 \text{ковариация ошибки:} & \quad P_{k+1} = \Phi P_k \Phi^\top + G Q G^\top - K_{p,k} R_{e,k} K_{p,k}^\top; \\
 \text{оценка:} & \quad \hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + B_d + K_{p,k} (z_k - H \hat{x}_k).
 \end{aligned}$$

2. КОНЕЦ.

В следующем алгоритме используют разложение Холецкого [5]  $A = S_A S_A^\top$  положительно определенной симметрической матрицы  $A$ , где фактор Холецкого  $S_A$  – нижняя треугольная матрица.

АЛГОРИТМ 3. [SRCF – Square-Root Covariance Filter]

0. НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ:  $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$ ,  $P_0 = \Pi_0 > 0$ ,  $R > 0$ ,  $Q \geq 0$ .  
 Вычислить нижние треугольные факторы Холецкого:  $S_{\Pi_0}$ ,  $S_R$ ,  $S_Q$ .

1. РЕКУРРЕНТНО ОБНОВЛЯТЬ  $S_{P_{k+1}}$  и  $\hat{x}_{k+1}$  ( $0 \leq k \leq N - 1$ ):

① По найденным  $S_{P_k}$ ,  $S_R$ ,  $S_Q$  сформировать блочную матрицу

$$\mathcal{A}_k = \begin{bmatrix} S_R^\top & 0 \\ S_{P_k}^\top H_k^\top & S_{P_k}^\top \Phi^\top \\ 0 & S_Q^\top G^\top \end{bmatrix}.$$

② Для блочной матрицы  $\mathcal{A}_k$  выполнить QR-преобразование и получить в результате блочную матрицу

$$\mathcal{R}_k = \begin{bmatrix} S_{R_e,k}^\top & \bar{K}_{p,k}^\top \\ 0 & S_{P_{k+1}}^\top \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\mathcal{A}_k \in \mathbb{R}^{(m+n+q) \times (m+n)}$ ,  $\mathcal{Q}_k \in \mathbb{R}^{(n+m+q) \times (n+m+q)}$  – матрица QR-преобразования  $\mathcal{Q}_k \mathcal{A}_k = \mathcal{R}_k$ , приводящего к верхней треугольной блочной матрице  $\mathcal{R}_k \in \mathbb{R}^{(m+n+q) \times (m+n)}$ .

③ Вычислить оценку вектора состояния:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + B_d + \bar{K}_{p,k} S_{R_e,k}^{-1} (z_k - H \hat{x}_k).$$

2. КОНЕЦ.

В третьем алгоритме используют модифицированное разложение Холецкого [5,6]  $A = U_A D_A U_A^\top$  положительно определенной симметрической матрицы  $A$ , где модифицированные факторы Холецкого  $\{U_A, D_A\}$  – пара матриц, в которой  $U_A$  – верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали,  $D_A > 0$  – диагональная матрица.

АЛГОРИТМ 4. [UD-CF – UD Covariance Filter]

0. НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ:  $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$  и  $P_0 = \Pi_0 > 0$ .

Вычислить UD-факторы Холецкого:  $\{U_{\Pi_0}, D_{\Pi_0}\}$ ,  $\{U_R, D_R\}$ ,  $\{U_Q, D_Q\}$ .

1. РЕКУРРЕНТНО ОБНОВЛЯТЬ  $\{U_{P_{k+1}}, D_{P_{k+1}}\}$  и  $\hat{x}_{k+1}$  ( $0 \leq k \leq N - 1$ ):

① Для пар  $\{U_{P_k}, D_{P_k}\}$ ,  $\{U_R, D_R\}$ ,  $\{U_Q, D_Q\}$  сформировать блочные матрицы

$$\mathcal{D}_k = \text{Diag}\{D_Q, D_{P_k}, D_R\}, \quad \mathcal{A}_k^\top = \begin{bmatrix} G U_Q & \Phi U_{P_k} & 0 \\ 0 & H U_{P_k} & U_R \end{bmatrix}.$$

② Для пары блочных матриц  $\{\mathcal{A}_k, \mathcal{D}_k\}$  выполнить модифицированную взвешенную Грама – Шмидта ортогонализацию (MWGS) столбцов матрицы  $\mathcal{A}_k$

относительно весовой матрицы  $\mathcal{D}_k$  и получить в результате пару блочных матриц  $\{\mathcal{A}_k^\dagger, \mathcal{D}_k^\dagger\}$ :

$$\mathcal{D}_k^\dagger = \text{Diag}\{D_{P_{k+1}}, D_{R_{e,k}}\}, \quad \mathcal{A}_k^\dagger = \begin{bmatrix} U_{P_{k+1}} & K_{p,k}U_{R_{e,k}} \\ 0 & U_{R_{e,k}} \end{bmatrix}$$

таких, что  $\mathcal{A}_k^\top = \mathcal{A}_k^\dagger \mathcal{B}_k^\top$  и  $\mathcal{A}_k^\top \mathcal{D}_k \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k^\dagger \mathcal{D}_k^\dagger (\mathcal{A}_k^\dagger)^\top$ , где  $\mathcal{D}_k \in \mathbb{R}^{(q+n+m) \times (q+n+m)}$ ,  $\mathcal{A}_k \in \mathbb{R}^{(q+n+m) \times (n+m)}$ ,  $\mathcal{B}_k \in \mathbb{R}^{(q+n+m) \times (n+m)}$  – матрица MWGS-преобразования к верхней треугольной блочной матрице  $\mathcal{A}_k^\dagger \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  и диагональной матрице  $\mathcal{D}_k^\dagger \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ .

③ Вычислить оценку вектора состояния

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + B_d + K_{p,k} U_{R_{e,k}}^{-1} (z_k - H \hat{x}_k).$$

2. КОНЕЦ.

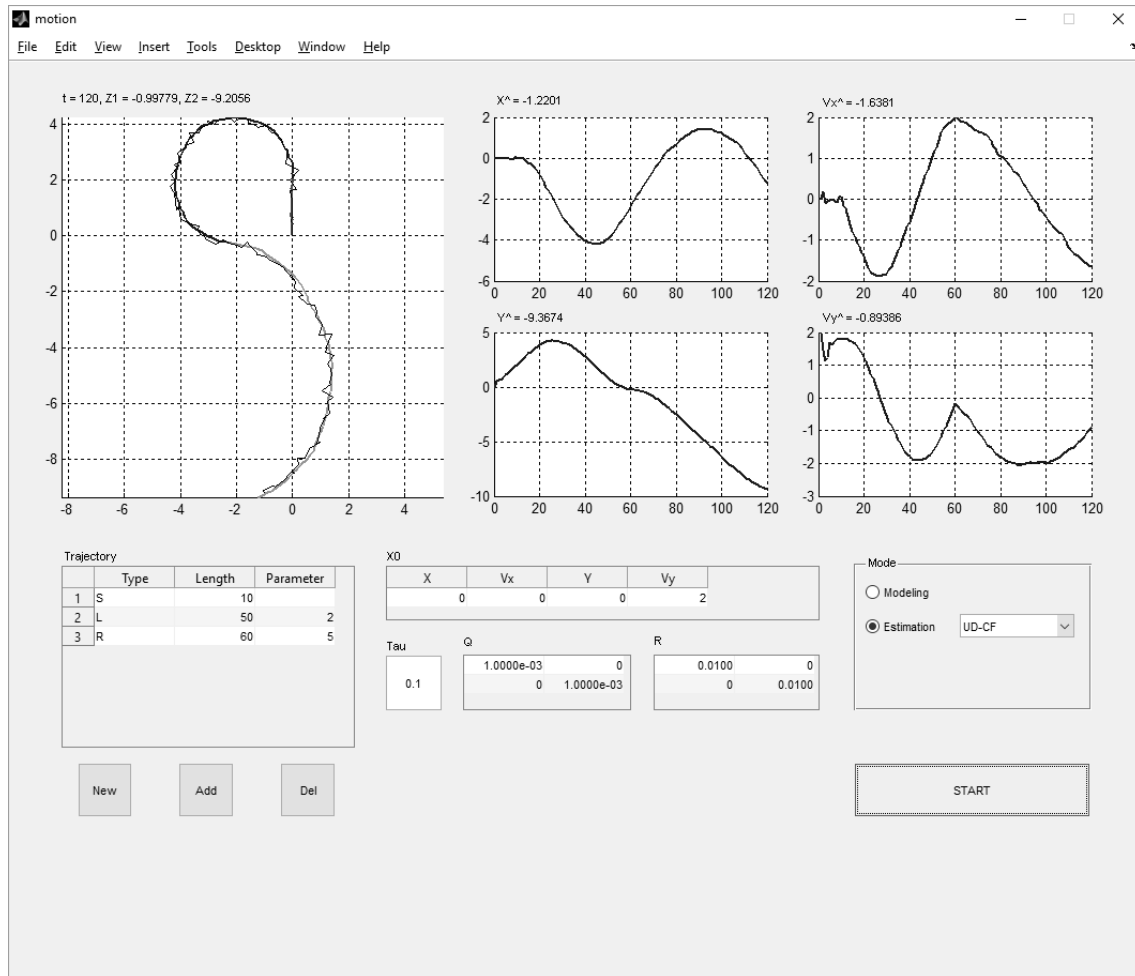
**Условия применения алгоритмов.** Считаем, что дискретные моменты времени  $j_s, j_s = 1, \dots, p$ , переключения с одного режима движения на другой (маневрирования) известны. Тогда в момент переключения  $j_s$  на новый режим движения начальные значения для работы алгоритма фильтрации принимаем следующие:  $\hat{x}_0 = \hat{x}_{j_s-1}$ ,  $\Pi_0 = P_{j_s-1}$ , т.е. за начальные условия берем значения оценки вектора состояния и ковариационной матрицы ошибки оценивания, полученные на предыдущем шаге обработки измерений. Затем при заданном типе кругового движения (влево или вправо) и радиусе  $r_{j_s}$  кругового движения вычисляем сначала  $\hat{\omega}_n = \sqrt{\hat{x}_0(2)^2 + \hat{x}_0(4)^2}/r_{j_s}$ , а затем пересчитываем матрицы-параметры алгоритма фильтрации:  $\Phi_c \triangleq \Phi_c(\hat{\omega}_n, \hat{x}_0)$ ,  $B_d^{L/R} \triangleq B_d^{L/R}(\hat{\omega}_n, \hat{x}_0)$ . Далее вычисляем оценки вектора состояния  $\hat{x}_k$  и ковариационные матрицы ошибки оценивания  $P_k$  согласно выбранному алгоритму фильтрации до тех пор, пока не произойдет переключение на очередной режим движения.

#### 4. Программный комплекс «Моделирование и оценивание траектории подвижного объекта v1.0»

Программный комплекс «Моделирование и оценивание траектории подвижного объекта v1.0» предназначен для моделирования и линейного оценивания траектории движущегося объекта на основе дискретных моделей равномерного прямолинейного и кругового движения.

Программный комплекс написан на языке MATLAB с реализацией графического интерфейса пользователя в среде визуального программирования GUIDE. В нем реализованы режимы построения детерминированной или стохастической траектории, а также моделирование измерений в присутствии аддитивной гауссовой помехи с возможностью оценивания вектора состояния модели движения объекта с помощью алгоритмов оптимальной дискретной фильтрации: СКФ, SRCF и UD-CF. Результаты моделирования доступны пользователю в виде временных графиков элементов вектора состояния, оценок элементов вектора состояния и графика траектории движения объекта и ее оценки на фазовой плоскости. В программе предусмотрена возможность сохранения числовых результатов в текстовом файле.





Главное окно программы

На рисунке представлен интерфейс программы. Сверху расположены пять окон, в которых динамически строятся графики траектории движения объекта на плоскости  $Oxy$  либо оценки траектории в зависимости от выбранного режима, а также графики элементов вектора состояния либо их оценок. Программа предоставляет возможность проводить численное моделирование в двух режимах: 1) в режиме построения траектории движущегося объекта согласно моделям Д-МПРД (прямолинейное движение) и Д-МКРД (круговое движение с заданным радиусом); 2) при наличии помех измерений в режиме линейного оценивания.

Программа позволяет моделировать траекторию (возможно, зашумленную), состоящую из конечного числа отрезков прямолинейного и кругового движения. План и параметры траектории можно задать в окне с названием «Trajectory». Кроме того, можно выбрать тип вычислительного эксперимента: моделирование («Modeling») либо оценивание («Estimation»), а также выбрать алгоритм линейного оценивания (СКФ, SRCF или UD-CF), задать начальные значения (координаты объекта и проекции скорости), период дискретизации  $\tau$  и матрицы ковариаций шумов в уравнении состояния  $Q$  и в уравнении измерения  $R$ . После нажатия кнопки «START» выполняется динамическое моделирование. Полученные результаты можно сохранить в виде текстового файла с целью их дальнейшего анализа.

## 5. Результаты численного моделирования

На рисунке показаны результаты численного моделирования в режиме оценивания зашумленной траектории движущегося объекта. Для вычисления оценок вектора состояния выбран алгоритм UD-CF. Перед началом моделирования был установлен следующий план траектории: движение начинается из точки с координатами  $(0, 0)$ ; 10 тактов дискретного времени объект двигался в режиме равномерного прямолинейного движения, затем в течение 50 тактов дискретного времени объект совершал круговое движение влево с радиусом  $r = 2$ , и в течение 60 тактов дискретного времени объект совершал круговое движение вправо с радиусом  $r = 5$ .

В левом верхнем большом окне изображен график траектории движения на плоскости  $Oxy$ . Тонкой черной линией обозначены данные измерений  $z_k$  (зашумленная траектория), а толстой линией обозначены вычисленные оценки координат объекта.

В четырех меньших окнах справа изображены временные графики оценок координат объекта и графики оценок проекций скоростей на координатные оси.

Таким образом, на данном практическом примере подтверждена работоспособность алгоритмов моделирования и оценивания траектории движущегося объекта.

## Заключение

Перечислим полученные в работе новые результаты:

1. Построена новая дискретная модель Д-МКРД кругового движения влево (против часовой стрелки)/вправо (по часовой стрелке) с заданным радиусом.

2. Сформулирован и подтвержден на практике новый алгоритм математического моделирования траектории движущегося объекта, состоящей из отрезков прямолинейного и кругового движения влево либо вправо с заданным радиусом. Такое представление сложной траектории позволяет применять методы оптимальной дискретной фильтрации для ее оценивания в условиях зашумленных неполных измерений.

3. Разработан программный комплекс «Моделирование и оценивание траектории подвижного объекта v1.0» для моделирования и линейного оценивания траектории движущегося объекта на основе дискретных моделей равномерного прямолинейного и кругового движения.

Результаты работы могут найти применение при решении практических задач судовождения, робототехники, обработки сигналов со сканирующих дальномеров и др. Они также послужат отправной точкой для решения более сложной задачи обнаружения момента переключения и диагностики режимов движения в реальном времени. Решение указанной задачи позволит построить новые алгоритмы слежения за объектом, движущимся по сложной траектории.

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 16-41-730784)*

## Литература

1. Grewal, M.S. Kalman Filtering: Theory and Practice / M.S. Grewal, A.P. Andrews. – New Jersey: Prentice Hall, 2001.
2. Maybeck, P.S. Stochastic Models, Estimation and Control. V. 1 / P.S. Maybeck. – N.Y.; San Francisco; London: Academic Press, 1979.

3. Семушин, И.В. Ориентированная на фильтрацию Калмана математическая модель установившейся циркуляции для анализа траектории цели / И.В. Семушин, Ю.М. Кроливецкая, Е.С. Петрова // Автоматизация процессов управления. – 2013. – № 4 (34). – С. 14–20.
4. Семушин, И.В. Устойчивые алгоритмы фильтрации – обзор и новые результаты для систем судовождения / И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова, К.В. Захаров // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2013. – № 4. – С. 90–112.
5. Семушин, И.В. Вычислительные методы алгебры и оценивания / И.В. Семушин. – Ульяновск: УлГТУ, 2011.
6. Bierman, G.J. Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation / G.J. Bierman. – N.Y.: Academic Press, 1977.

Иннокентий Васильевич Семушин, доктор технических наук, профессор, кафедра информационных технологий, Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Российская Федерация), kentvsem@gmail.com.

Андрей Владимирович Цыганов, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (г. Ульяновск, Российская Федерация), andrew.tsyganov@gmail.com.

Юлия Владимировна Цыганова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информационных технологий, Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Российская Федерация), tsyganovajv@gmail.com.

Алексей Владимирович Голубков, магистрант, кафедра высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (г. Ульяновск, Российская Федерация), kr8589@gmail.com.

Станислав Дмитриевич Винокуров, аспирант, кафедра высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова (г. Ульяновск, Российская Федерация), phoenixdragonvista@ya.ru.

*Поступила в редакцию 3 октября 2016 г.*

---

MSC 93A30, 93E10

DOI: 10.14529/mmp170309

## MODELLING AND ESTIMATION OF A MOVING OBJECT TRAJECTORY

*I. V. Semushin<sup>1</sup>, A. V. Tsyganov<sup>2</sup>, Yu. V. Tsyganova<sup>1</sup>, A. V. Golubkov<sup>2</sup>, S. D. Vinokurov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russian Federation

<sup>2</sup>Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russian Federation

E-mail: kentvsem@gmail.com, andrew.tsyganov@gmail.com, tsyganovajv@gmail.com, kr8589@gmail.com, phoenixdragonvista@ya.ru

A new linear discrete model of the left/right circular motion with the specified radius is constructed. A new algorithm for mathematical modelling of a moving object trajectory

consisting of straight line segments and circular motion under the conditions of incomplete noisy measurements is formulated and implemented. It is shown how to apply algorithms for discrete optimal filtering to the evaluation of such a trajectory. A software package "Modelling and estimation of a moving object trajectory v1.0" is developed for modelling and estimation of a linear trajectory of a moving object on the basis of discrete models of uniform piecewise linear and circular motion. The results can be applied to solve practical problems of navigation, robotics, signal processing of scanning range finders and others.

*Keywords: maneuvering moving objects; discrete stochastic model; linear estimation; MATLAB.*

## References

1. Grewal M.S., Andrews A.P. *Kalman Filtering: Theory and Practice*. New Jersey, Prentice Hall, 2001.
2. Maybeck P.S. *Stochastic Models, Estimation and Control*. N.Y., San Francisco, London, Academic Press, 1979.
3. Semushin I.V., Krolivetskaya Yu.M., Petrova E.S. Kalman Filter Oriented Mathematical Model of the Steady-Circle Path. *Automation of Control Processes*, 2013, no. 4 (34), pp. 14–20. (in Russian)
4. Semushin I.V., Tsyganova Yu.V., Zakharov K.V. Robust Filter Algorithms – Survey and New Results for Ship Navigation. *Information Technology and Computing Systems*, 2013, no. 4, pp. 90–112. (in Russian)
5. Semushin I.V. *Computational Methods of Algebra and Estimation*. Ulyanovsk, UISTU Publishers, 2011.
6. Bierman G.J. *Factorization Methods For Discrete Sequential Estimation*. N.Y., Academic Press, 1977.

*Received October 3, 2016*