

О ФОКУСИРОВКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ

В.Ф. Куропатенко^{1,2}, **Ф.Г. Магазов**², **Е.С. Шестаковская**²

¹Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени Е.И. Забабахина, г. Снежинск, Российская Федерация

²Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

В лагранжевых координатах построено аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне в цилиндрическом сосуде с непроницаемой стенкой для произвольных показателей автомодельности. На границе цилиндра задана отрицательная скорость. В начальный момент времени из этой точки начнет распространяться ударная волна к центру симметрии. Граница цилиндра будет двигаться по определенному закону, согласованному с движением ударной волны. В эйлеровых переменных она движется, но в лагранжевых переменных ее траектория является вертикальной линией. Вообще говоря, все траектории частиц являются вертикальными линиями, вдоль которых сохраняется то значение энтропии, которое возникло на ударной волне. Получены уравнения, определяющие структуру течения газа между фронтом ударной волны и границей, как функции времени и лагранжевой координаты, а так же зависимость энтропии от скорости ударной волны. Задача решена в лагранжевых координатах и принципиально отличается от ранее известных постановок задачи о сжатии автомодельной ударной волны к центру симметрии и ее отражении от центра, которые построены для бесконечной области в эйлеровых координатах для единственного значения коэффициента автомодельности соответствующего единственному значению показателя адиабаты.

Ключевые слова: ударная волна; цилиндрическая симметрия; идеальный газ; аналитическое решение.

Введение

Математическое моделирование динамических процессов в механике сплошных сред в настоящее время является одним из важнейших инструментов исследований. Для решения конкретных задач используются уже существующие или создаются новые модели и численные методы. Для оценки свойств разностных схем, аппроксимирующих законы сохранения, широко применяются априорные методы, такие, как исследование устойчивости, аппроксимации, консервативности, дистракции и др. Следует, однако, отметить, что большая часть этих методов разработана для акустических приближений к исходным уравнениям и для простейших уравнений состояния. В механике сплошных сред свойства математической модели из-за нелинейностей, определяемых реальными уравнениями состояния, наличием ударных волн, пластичностью и другими свойствами вещества, могут заметно отличаться от предсказаний линейной теории.

При переходе к нелинейным уравнениям линейная теория теряет свою строгость. Важность теоремы сходимости [1] сильно преувеличивается, поскольку она все-таки

доказана для линейных, а не для нелинейных уравнений, а реальные расчеты проводятся при конечных Δx и Δt , а не при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Очень ярко взгляды на относительность «строгих» критериев устойчивости и сходимости изложены в [2]. Поэтому важнейшим способом проверки достоинств и недостатков математической модели в настоящее время является расчет эталонных задач, имеющих аналитическое решение, и сравнение результатов расчетов с этими решениями. Начиная с 40-х годов прошлого столетия появился ряд работ [3–11], содержащих автомодельное решение задачи о фокусировке ударной волны в бесконечном идеальном газе. Однако реальные тела имеют конечные размеры. В данной работе рассмотрена задача о сходящейся ударной волне в цилиндрическом сосуде с непроницаемой стенкой, имеющая аналитическое решение.

1. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрический сосуд с непроницаемой стенкой, в котором находится газ массой M_0 и начальными при $t = t_0$ параметрами газа $\rho_0 = const$, $U_0 = 0$, $P_0 = 0$, $E_0 = 0$, где ρ – плотность, U – скорость, P – давление, E – удельная внутренняя энергия. Задача имеет цилиндрическую симметрию. Лагранжевой координатой является цилиндрическая масса M . Второй независимой переменной является время t . В точке t_0 , M_0 задана скорость $U_1 < 0$. Таким образом, в этой точке задан сильный разрыв, который при $t > t_0$ распространяется к центру симметрии и в момент t_f фокусируется в точку $M = 0$. Граница цилиндра при $t > t_0$ движется в переменных r, t , но в переменных M, t ее траектория является вертикальной линией. Вообще говоря, все траектории частиц являются вертикальными линиями, вдоль которых сохраняется то значение энтропии, которое возникло на ударной волне. Параметры газа между ударной волной и границей определяются системой законов сохранения Эйлера-Гельмгольца. Уравнение состояния используется в двух формах

$$P = (\gamma - 1) \rho E, \quad P = F(s) \rho^\gamma, \quad (1)$$

где $F(s)$ – функция от энтропии.

2. Соотношения на ударной волне

Законы сохранения на ударной волне при $U_0 = 0$, $P_0 = 0$, $E_0 = 0$, $F_0 = 0$ имеют вид [12]

$$\rho_w (D - U_w) - \rho_0 D = 0, \quad (2)$$

$$\rho_0 D U_w - P_w = 0, \quad (3)$$

$$\rho_0 D \left(E_w + \frac{1}{2} U_w^2 \right) - P_w U_w = 0. \quad (4)$$

Индексом « w » обозначены величины на ударной волне, D – скорость ударной волны. Преобразуем эти уравнения к виду, содержащему зависимости U_w , ρ_w , F_w , P_w от скорости ударной волны в лагранжевых координатах. Лагранжева координата M_w ударной волны в случае сферически симметричного течения связана с ее эйлеровой координатой r_w уравнением

$$M_w = \pi \rho_0 r_w^2. \quad (5)$$

Скорость ударной волны в лагранжевых координатах есть изменение M_w со временем

$$W = \frac{dM_w}{dt} = 2\pi\rho_0 r_w D. \quad (6)$$

Заменим эйлерову координату ударной волны ее лагранжевой координатой. Для этого выразим r_w из (5) и подставим в (6)

$$W = (2M_w)^{1/2} (2\pi\rho_0)^{1/2} D. \quad (7)$$

Выразив в (7) D через W и M_w и подставив в (2)–(4), получим с помощью (1) зависимости

$$\rho_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad (8)$$

$$U_w = \frac{2}{\gamma + 1} (2\pi\rho_0)^{-1/2} (3M_w)^{-1/2} W, \quad (9)$$

$$P_w = \frac{2}{\gamma + 1} (2\pi)^{-1} (2M_w)^{-1} W^2. \quad (10)$$

Из (1), (8) и (10) следует выражение для F_w

$$F_w = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \rho_0^{-\gamma} (2\pi)^{-1} \right] (2M_w)^{-1} W^2. \quad (11)$$

В точке $t = t_0$, $M_w = M_0$, $U_w = U_{w0}$, $P_w = P_{w0}$, $F_w = F_{w0}$.

$$U_w = U_0 \left(\frac{W}{W_0} \right) \left(\frac{M_0}{M_w} \right)^{1/2}, \quad P_w = P_0 \left(\frac{W}{W_0} \right)^2 \left(\frac{M_0}{M_w} \right), \quad F_w = F_0 \left(\frac{W}{W_0} \right)^2 \left(\frac{M_0}{M_w} \right). \quad (12)$$

По аналогии с [13–14] зададим траекторию ударной волны в виде

$$M_w = M_0 \varphi(t)^n, \quad (13)$$

где $\varphi = (t_f - t) / (t_f - t_0)$. Продифференцировав M_w по t , получим выражение для скорости ударной волны в лагранжевых координатах

$$W = W_0 \varphi^{n-1}, \quad (14)$$

где

$$W_0 = -\frac{M_0 n}{t_f - t_0}. \quad (15)$$

Исключив в (13) и (14) функцию от времени, получим зависимость W от M_w

$$\frac{W}{W_0} = \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-1)/n}. \quad (16)$$

С помощью соотношения (16) исключим W в (12)

$$U_w = U_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-2)/2n}, \quad P_w = P_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-2)/n}, \quad F_w = F_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-2)/2n}. \quad (17)$$

Величина F_w вдоль траектории частицы с координатой M_w постоянна. Следовательно, зависимость энтропии от массы между ударной волной и границей газа имеет вид

$$F = F_{w0} \left(\frac{M}{M_0} \right)^{(n-2)/n}. \quad (18)$$

Из (5) следует зависимость r_w от M_w

$$r_w = r_0 \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

3. Параметры течения за фронтом ударной волны

Параметры адиабатического течения за ударной волной определяются уравнениями, траектории, сохранения массы и движения

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_M - U = 0, \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_M + 2\pi\rho^2 \frac{\partial (r^2 U)}{\partial M} = 0, \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_M + 2\pi r \frac{\partial (F\rho^\gamma)}{\partial M} = 0. \quad (22)$$

Эти уравнения содержат три искомым функции r , ρ и U . Величина F определяется на ударной волне и зависит только от M (17).

Перейдем в (20) – (22) к новым искомым функциям

$$R = r^2, \quad C = rU. \quad (23)$$

После перехода к функциям R и C уравнения (20) – (22) примут вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_M - 2C = 0, \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_M + 2\pi\rho^2 \frac{\partial C}{\partial M} = 0, \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)_M + 2\pi R \frac{\partial (F\rho^\gamma)}{\partial M} - 2C^2 R^{-1} = 0. \quad (26)$$

Из (17), (19) и (23) следуют зависимости R_w и C_w от M_w

$$R_w = R_0 \frac{M_w}{M_0}, \quad C_w = C_0 \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-1)/n}. \quad (27)$$

Уравнения (24) – (26) являются основными для отыскания R , C и ρ в области интегрирования $M_w \leq M \leq M_0$, $t_0 \leq t \leq t_f$.

Перейдем от переменных t, M к переменным $t, \xi(t, M)$. Уравнения (24) – (26) примут вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial R}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M - 2C = 0, \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M + 2\pi\rho^2 \left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M - \frac{C^2}{R} + \\ & + 2\pi R \left[\rho^\gamma \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t + \gamma F \rho^{\gamma-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t \right] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Зависимость $\xi(t, M)$ зададим так, чтобы на ударной волне было $\xi = 1$. Из (13) следует, что проще всего взять такую зависимость в виде

$$\xi = \frac{M}{M_0} \varphi^{-n}. \quad (31)$$

4. Разделение переменных

Представим R, ρ и C в виде произведений двух функций, одна из которых является функцией только t , а другая только от ξ

$$R = \alpha_R(t) T(\xi) \quad \rho = \alpha_\rho(t) \delta(\xi) \quad C = \alpha_C(t) Z(\xi). \quad (32)$$

Поскольку на ударной волне $\xi = 1$, то значения $T_1 = T(1)$, $\delta_1 = \delta(1)$, $Z_1 = Z(1)$ должны быть постоянными. Из (27) и (31) следует зависимость $R_w(t)$

$$R_w = R_0 \varphi^n. \quad (33)$$

Сравнив эту зависимость с (32) на ударной волне, получим выражение для α_R

$$\alpha_R(t) = R_0 \varphi^n T_1^{-1}. \quad (34)$$

Аналогично для α_ρ и α_C получаем соотношения

$$\alpha_\rho = \rho_0 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \delta_1^{-1}, \quad \alpha_C(t) = C_0 \varphi^{n-1} Z_1^{-1}. \quad (35)$$

Подставив (32) – (35) в (28) – (30) и воспользовавшись (15), получим три уравнения для T, δ и Z

$$\xi T' = A_1, \quad (36)$$

$$\delta_1 B_1 Z' - \xi Z_1 \delta' = 0, \quad (37)$$

$$-\frac{\xi}{Z_1} Z' + \frac{C_1 \gamma \xi}{\delta_1} \delta' = C_2, \quad (38)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . Коэффициенты уравнений (36) – (38) A_1, B_1, C_1, C_2 с помощью (5), (6), (12) и (21) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} A_1 &= T - \frac{2Z T_1}{(\gamma+1) Z_1}, \quad B_1 = \frac{2\delta^2}{(\gamma-1) \delta_1^2}, \quad C_1 = \frac{\delta^{\gamma-1} T \xi^{-2/n}}{\delta_1^{\gamma-1} T_1}, \\ C_2 &= \frac{Z^2 T_1}{(\gamma+1) Z_1^2 T} - \frac{(n-1) Z}{n Z_1} - C_1 \frac{(n-2) \delta}{n \delta_1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Уравнения (36) – (38) образуют относительно T' , δ' , Z' систему линейных неоднородных уравнений. Определитель системы равен

$$\Delta = B_1 C_1 \gamma \xi - \xi^2.$$

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы (36) – (38) существует и имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\xi}, \quad \delta' = \frac{B_1 C_2 \delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\xi C_2 Z_1}{\Delta}. \quad (40)$$

На ударной волне при $\xi = 1$ величины T , δ , Z , Δ и коэффициенты (39) принимают значения

$$T = T_1, \quad \delta = \delta_1, \quad Z = Z_1, \quad A_1 = \frac{(\gamma - 1) T_1}{\gamma + 1}, \quad B_1 = \frac{2}{(\gamma - 1)}$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{3(\gamma + 1) - n(2\gamma + 1)}{n(\gamma + 1)}, \quad \Delta(1) = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}.$$

5. Решение

Интегрирование системы уравнений (40) начинается в точке $\xi = 1$ (на ударной волне). Расчеты показывают, что существует промежуток значений n таких, что определитель в ноль не обращается. При некотором значении n_* определитель обращается в ноль при $\xi = \xi_*$. В этой точке решение существует, если C_2 тоже обращается в ноль. Каждому значению γ соответствует одно значение n_* (см. табл.). В этой же таблице приведены значение ξ_* , при которых одновременно $\Delta(\xi_*) = 0$, $C_2(\xi_*) = 0$. Профили давлений, плотностей и скоростей при $n = n_*$ для трех моментов времени приведены на рис. 1.

Таблица

Значения n_* и ξ_* , соответствующие различным значениям показателя адиабаты γ

γ	1,1	1,2	4/3	1,4	5/3
n_*	1,770501	1,722331	1,684516	1,670651	1,631252
ξ_*	6,768540	4,873946	3,896265	3,616019	2,990161

При $0 < n < n_*$ определитель системы уравнений (40) положителен во всем промежутке изменения ξ $1 \leq \xi < \infty$. В этом случае происходит коллапс газового цилиндра – его объем стремится к нулю. Структура течения газа между фронтом ударной волны и границей цилиндра показана на рис. 2.

В области $n > n_*$ определитель обращается в ноль при некотором значении ξ_n , которое зависит от n . Но в этой точке $C_2(\xi_n)$ в ноль не обращается. Таким образом решение существует в области $1 \leq \xi < \xi_n$. На границе газового цилиндра при $M = M_0$ значение ξ_n достигается в момент

$$t_n = t_f - (t_f - t_0) \xi_n^{-1/n}.$$

Из точки M_0 , t_n выходит линия, на которой $\xi = \xi_n$

$$M_n = M_0 \xi_n \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n. \quad (41)$$

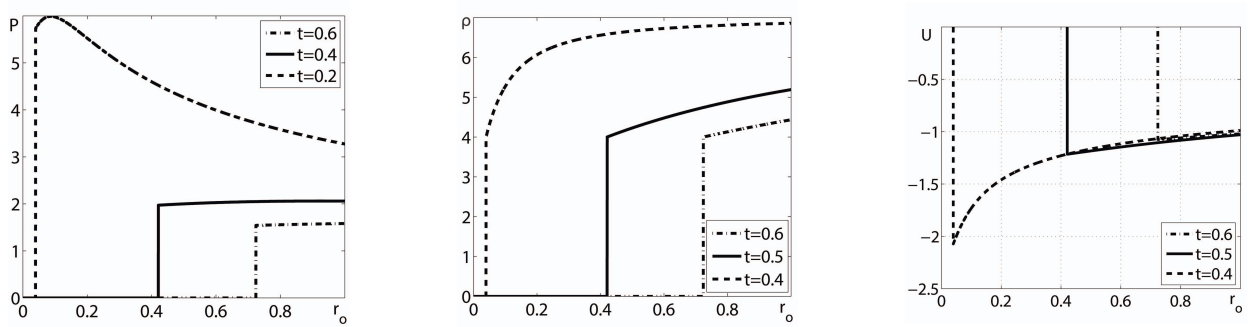


Рис. 1. Зависимости скорости, давления и плотности от эйлеровой координаты r для $\gamma=5/3$, $n = n_* = 1,631252$ и трех моментов времени

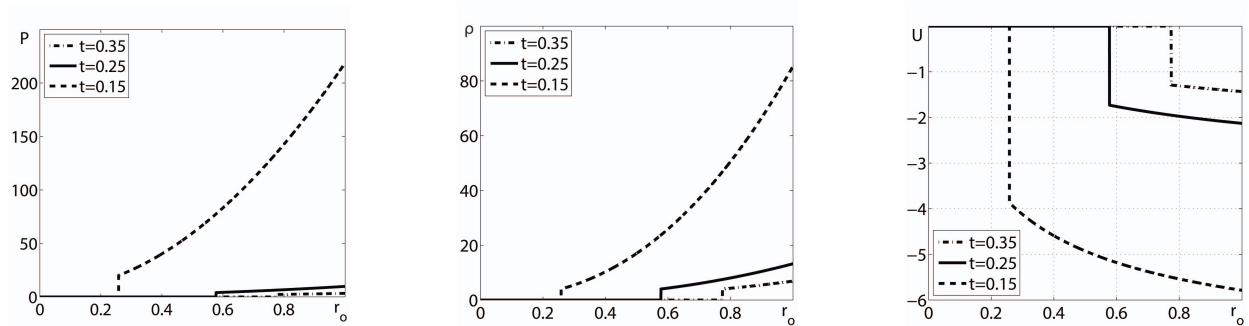


Рис. 2. Зависимости скорости, давления и плотности от лагранжевой координаты для $\gamma=5/3$, $n = 1$ меньше $n_*=1,631252$ и трех моментов времени

Она фокусируется одновременно с ударной волной, т.к. при $t = t_f$, $M_n = 0$. В области между линией (41) и ударной волной (13) для каждого $n > n_*$ существует единственное решение. Структура течения газа показана на рис. 3.

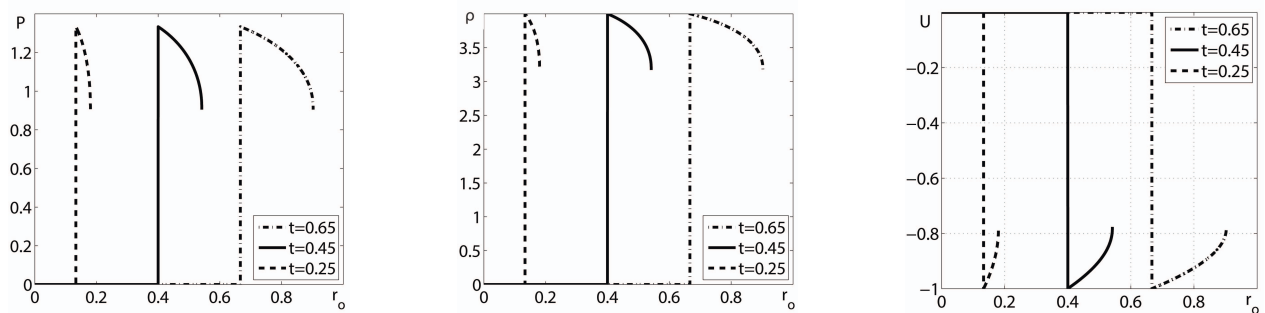


Рис. 3. Зависимости скорости, давления и плотности от эйлеровой координаты r между ударной волной и характеристикой для $\gamma=5/3$, $n = 2$ больше $n_*=1,631252$ и трех моментов времени

В лагранжевых координатах построено аналитическое решение задачи о цилиндрически симметричной сходящейся ударной волне для произвольных показателей n , которые определяют схождение ударной волны.

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Литература

1. Lax, P.D. Survey of Stability of Linear Finite Difference Equations / P.D. Lax, R.D. Richtmyer // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1956. – V. 9. – P. 267–293.
2. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980.
3. Guderley, G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse / G. Guderley // Luftfahrtforschung. – 1942. – Т. 19, № 9. – С. 302–312.
4. Седов, Л.И. О неустановившихся движениях сжимаемой жидкости / Л.И. Седов // Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Т. 47, № 2. – С. 94–96.
5. Станюкович, К.П. Автомодельные решения уравнений гидромеханики, обладающих центральной симметрией / К.П. Станюкович // Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Т. 48, № 5. – С. 331–333.
6. Брушлинский, К.В. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики / К.В. Брушлинский, Я.М. Каждан // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, № 2. – С. 3–23.
7. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1954.
8. Сидоров, А.Ф. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа / А.Ф. Сидоров, О.Б. Хайруллина // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 81–92.
9. Сидоров, А.Ф. Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев / А.Ф. Сидоров // Доклады Академии наук СССР. – 1990. – Т. 313, № 2. – С. 283–287.
10. Крайко, А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность / А.Н. Крайко. – М.: Торус пресс, 2010.
11. Крайко, А.Н. Быстрое цилиндрически и сферически симметричное сильное сжатие идеального газа / А.Н. Крайко // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 744–760.
12. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: ЧелГУ, 2007.
13. Куропатенко, В.Ф. Динамическое сжатие холодного газового шара / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская, М.Н. Якимова // Доклады академии наук. – 2015. – Т. 461, № 5. – С. 530–532.
14. Kuropatenko, V.F. Analytical Solution of the Problem of a Shock Wave in the Collapsing Gas in Lagrangian Coordinates / V.F. Kuropatenko, E.S. Shestakovskaya // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1770. – P. 030069.

Валентин Федорович Куропатенко, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени Е.И. Забабахина, (г. Снежинск, Российская Федерация); профессор, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), v.f.kuropatenko@yandex.ru.

Фарит Гареевич Магазов, аспирант, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), magazov_farit@mail.ru.

Елена Сергеевна Шестаковская, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), leshest@list.ru.

Поступила в редакцию 13 августа 2017 г.

MSC 76N15

DOI: 10.14529/mmp170405

FOCUSING OF CYLINDRICALLY SYMMETRIC SHOCK IN A GAS

V.F. Kuropatenko^{1,2}, **F.G. Magazov**², **E.S. Shestakovskaya**²

¹Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All Russia Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation

²South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: v.f.kuropatenko@yandex.ru, leshest@list.ru, magazov_farit@mail.ru

The analytical solution of the problem of converging the shock in the cylindrical vessel with an impermeable wall is constructed for arbitrary self-similar coefficients in Lagrangian coordinates. The negative velocity is set at the cylinder boundary. At the initial time the shock spreads from this point into the center of symmetry. The cylinder boundary moves under the particular law which conforms to the movement of the shock. It moves in Euler coordinates, but the boundary trajectory is a vertical line in Lagrangian coordinates. Generally speaking, all the trajectories of the particles are vertical lines. The value of entropy which appeared on the shock etains along each of these lines. Equations that determine the structure of the gas flow between the shock front and the boundary as a function of time and the Lagrangian coordinate are obtained, as well as the dependence of the entropy on the shock velocity. Thus, the problem is solved for Lagrangian coordinates. It is fundamentally different from previously known formulations of the problem of the self-convergence of the self-similar shock to the center of symmetry and its reflection from the center which were constructed for the infinite area in Euler coordinates for a unique self-similar coefficient corresponding to the unique value of the adiabatic index.

Keywords: shock; cylindrical symmetry; ideal gas; analytical solution.

References

1. Lax P.D., Richtmyer R.D. Survey of Stability of Linear Finite Difference Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1956, vol. 9, pp. 267–293.
2. Roach P.J. *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, Hermosa Publishers, 1998.
3. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische verdichtungsstobe in der nahe des kugelmittelpunktes bzw. der zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, 1942, vol. 19, no. 9, pp. 302–312. (in German)
4. Sedov L.I. [On the Transient Motion of a Compressible Fluid]. *Soviet Mathematics*, 1945, vol. 47, no. 2, pp. 94–96. (in Russian)
5. Stanjukovich K.P. [Similar Solutions of the Equations of Fluid Mechanics, Possessing Central Symmetry]. *Soviet Mathematics*, 1945, vol. 48, no. 5, pp. 331–333. (in Russian)
6. Brushlinskii K.V., Kazhdan Ja.M. On Auto-Models in the Solution of Certain Problems of Gas Dynamics. *Russian Mathematical Surveys*, 1963, vol. 18, no. 2, pp. 1–22.

7. Sedov L.I. *Metody podobija i razmernosti v mehanike* [Methods of Similarity and Dimensionality in Mechanics]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoy literatury, 1954.
8. Sidorov A.F. [Processes Conical Shock-Free Compression and Expansion of Gas]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 81–92. (in Russian)
9. Sidorov A.F. [On Optimal Unstressed Compression of the Gas Layers]. *Soviet Mathematics*, 1990, vol. 313, no. 2, pp. 283–287. (in Russian)
10. Kraiko A.N. *Teoreticheskaya gazovaya dinamika: klassika i sovremennost'* [Theoretical Gas Dynamics: Classic and Modern]. Moscow, Torus Press, 2010.
11. Kraiko A.N. Rapid Cylindrically and Spherically Symmetric Strong Compression of a Perfect Gas. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 676–689.
12. Kuropatenko V.F. *Modeli mehaniki sploshnyh sred* [Models of Continuum Mechanics]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University, 2007.
13. Kuropatenko V.F., Shestakovskaya E.S., Yakimova M.N. Dynamic Compression of a Cold Gas Sphere. *Doklady Physics*, 2015, vol. 60, no. 4, pp. 180–182.
14. Kuropatenko V.F., Shestakovskaya E.S. Analytical Solution of the Problem of a Shock Wave in the Collapsing Gas in Lagrangian Coordinates. *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1770, p. 030069. DOI: 10.1063/1.4964011

Received August 13, 2017