

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ
УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ**

П.Н. Александров¹, В.Н. Кризский²

¹Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Российская Федерация

²Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
г. Стерлитамак, Российская Федерация

Статья посвящена исследованию закономерностей распространения упругого поля в неоднородных анизотропных средах. При этом анизотропия вводится как эффективные (усредненные) параметры тонкослойной среды, что определяет макроанизотропные упругие параметры горной породы. Показано, что эффективные упругие параметры, полученные из теории упругости (уравнений Ламе), не совпадают с эффективными параметрами, полученными с использованием кинематического подхода. На основе сведения уравнений теории упругости к системам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка получено решение прямой задачи сейсморазведки (как краевой задачи) для горизонтально-слоистой и анизотропной модели геологической среды. Приведенный результат расчета сейсмического поля, зарегистрированного на дневной поверхности, в случае наличия анизотропного объекта приводит к сложной картине волнового поля. Это означает, что необходимо совершенствовать методики сейсморазведки при изучении анизотропных свойств геологической среды.

Ключевые слова: сейсмическая анизотропия; эффективные параметры; системы дифференциальных уравнений; уравнение эйконала.

Введение

Сейсмическая анизотропия является актуальным объектом исследований в теории сейсморазведки. Анализ связи сейсмической анизотропии (как меры упорядоченного строения) с внутренним строением горной породы представляет собой важную задачу для практики сейсморазведки и интерпретации результатов полевых работ. Существует два подхода введения анизотропии скорости распространения упругих волн: первый основан на осреднении закона Гука (динамический), второй – на вычислении скоростей на основе решения уравнения эйконала (кинематический). В работе показано, что эти скорости не совпадают для наиболее простой модели анизотропии – квазианизотропии, появляющейся в результате естественного осреднения тонкослойной среды.

Первый подход можно подразделить на две части – первая связана с аппроксимацией микронеоднородной упругой среды, заданной моделью вида материальных уравнений (законом Гука), которая требует определения окрестности компакта, т.е. вида материальных уравнений. Этот подход развивается И.О. Баюк и изложен в ее докторской диссертации [1]. Другая часть связана с осреднением закона Гука микронеоднородной упругой среды с учетом длины сейсмической волны [2–4]. В последнем случае, для наиболее простой одномерной тонкослойной модели среды, пачки переслаивающихся пропластков, получен осредненный закон Гука, который приводит к

анизотропии упругих параметров или, как принято в литературе по сейсморазведке, к квазианизотропии. Для такой модели материальных уравнений можно найти решение прямой задачи для уравнений Ламе и провести исследования влияния анизотропии на волновое поле в наземной сейсморазведке.

В общем случае, связь напряжений и деформаций в законе Гука, которая в векторном представлении будет иметь вид $\mathbf{P} = H\mathbf{e}$, где \mathbf{P} – 9-ти компонентный вектор напряжений, \mathbf{e} – 9-ти компонентный вектор деформаций, является линейной и описывается матрицей упругих параметров H размерности 9×9 элементов, которая может зависеть от временной частоты в частотной области и, таким образом, описывать дисперсию упругих параметров.

1. Решение прямой задачи сейсморазведки для слоисто-анизотропных сред

Решение прямой задачи для анизотропных сред не является тривиальным, если использовать стандартный подход к решению уравнений Ламе – как сведение к дифференциальным уравнениям второго и более высокого порядка. С другой стороны, все математические модели физических полей являются системами дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, для которых разработаны эффективные математические методы решения.

Рассмотрим модель горизонтально-слоистой анизотропной геологической среды в декартовой системе координат с осью z , направленной вглубь Земли. Вводя вектор $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_z \\ \mathbf{S} \end{pmatrix}$, где \mathbf{P}_z – 3-х компонентный вектор напряжений, появляющийся под действием вертикальных сил, \mathbf{S} – вектор смещений, и применяя преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y и по времени t , систему уравнений Ламе для этой модели можно свести к виду

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = A\mathbf{X},$$

где A – квадратная матрица, включающая упругие параметры среды, пространственные частоты k_x, k_y и временную частоту. Решение этой системы выражается через функцию (экспоненту) от матрицы.

Продолжая поле \mathbf{X} через горизонтально слоистую среду от дневной поверхности до подошвы последнего слоя, получим $\mathbf{X}^n(z_n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} e^{A^j h_j} \right) \mathbf{X}^0$, где h_j – толщина j -го слоя, n – номер последнего слоя бесконечной толщины, \mathbf{X}^0 – вектор-столбец, заданный на дневной поверхности, z_n – глубина залегания последней границы, A^j – передаточная матрица j -го слоя. Поскольку плоскость $z = z_0$ совпадает с поверхностью Земля/Воздух, то выполняется условие $\mathbf{X}^1(z_0) = \mathbf{X}^0$.

В нижнем слое бесконечной толщины, основываясь на знаке действительной части собственных значений матрицы A^n , из представления $\mathbf{X}^n(z) = e^{A^n(z-z_n)} \mathbf{X}^n(z_n)$ выделим решение \mathbf{X}^- , возрастающее при $z \rightarrow +\infty$, и решение \mathbf{X}^+ , убывающее при $z \rightarrow +\infty$: $\mathbf{X}^n(z) = \mathbf{X}^+ + \mathbf{X}^-$. Удовлетворяя условию на бесконечности, необходимо положить $\mathbf{X}^+ = C\tilde{S}C^{-1}\mathbf{X}^n(z) = 0$ везде, в том числе и при $z \rightarrow z_n$. Здесь C – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A^n , а \tilde{S} – матрица, получающаяся

из единичной матрицы заменой диагональных элементов нулем, если действительная часть соответствующего собственного значения меньше нуля, и единицей, если действительная часть соответствующего собственного значения больше нуля.

Отсюда вытекает связь между компонентами поля \mathbf{X}^0 : $C\tilde{S}C^{-1}\mathbf{X}^n(z) = C\tilde{S}C^{-1}\left(\prod_{j=0}^{n-1} e^{A^j h_j}\right)\mathbf{X}^0 = D\mathbf{X}^0 = 0$, $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$, $Z = -d_{11}^{-1}d_{12} = -d_{21}^{-1}d_{22}$.

На дневной поверхности зададим сторонние напряжения $\mathbf{P}_z = \mathbf{P}_z^{st}$ (например, в виде плиты вибратора конечных (реальных) размеров), тогда решение поставленной задачи будет иметь вид $\mathbf{S} = Z^{-1}\mathbf{P}_z^{st}$. При этом никаких ограничений на структуру матрицы упругих параметров не накладывается, и, кроме этого, она может быть частотно зависящая.

Используя обратное преобразование Фурье по пространственным и временной частотам, можно перейти в пространственно-временную область.

Вычислительные эксперименты проведены для модели трехслойной среды (рис. 1), у которой второй слой является макроанизотропным и эффективные параметры которого являются результатом осреднения тонкослоистой среды с параметрами прослоек указанных в таблице. В таблице использованы следующие обозначения: h – толщина прослойки, V_p – скорость продольных волн в слое, V_s – скорость поперечных волн в слое, ρ – плотность горной породы в слое.

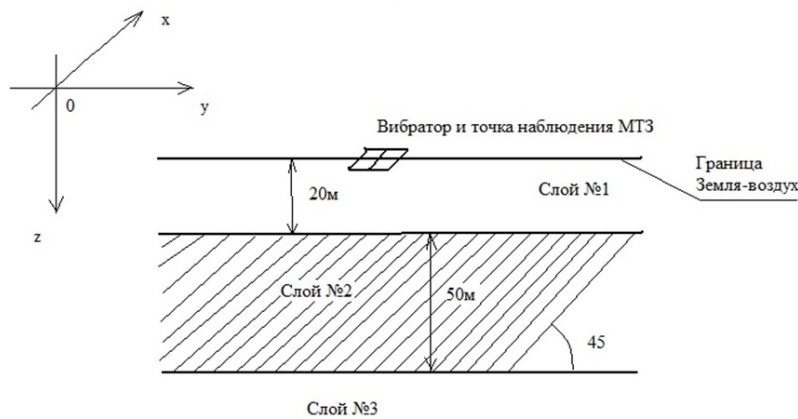


Рис. 1. Модель трехслойной среды с квазианизотропным вторым слоем. Параметры квазианизотропии вычислены в результате осреднения тонкослоистой среды, с наклоном слоистости под углом 45° к оси y

Таблица

Параметры тонкослоистой пачки

h , м	V_p , м/с	V_s , м/с	ρ , кг/м ³
0,01	565,6854	332,7561	2000
0,02	126,4911	74,4065	2000
0,03	565,6854	332,7561	2000
0,01	126,4911	74,4065	2000
0,02	565,6854	332,7561	2000

Для каждой прослойки второго слоя вычислялись параметры Ламе по формулам: $\lambda = \rho(V_p^2 - 2V_s^2)$, $\mu = \rho V_s^2$. После чего проводилось осреднение и осуществлялся поворот с направляющими косинусами $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7071 & -0,7071 \\ 0 & 0,7071 & 0,7071 \end{pmatrix}$.

В случае воздействия на среду импульсом сторонних вертикальных напряжений, заданных по площадке 1x1 м в начале координат с формой, представленной на рис. 2, вычислительным экспериментом получено сейсмическое поле, фрагмент вертикальной компоненты которого изображен на рис. 3. Здесь: момент времени $t = 0,31$ с, площадка измерений – квадрат на плоскости $z = 0$ размерами 120x120 м с центром в начале координат.

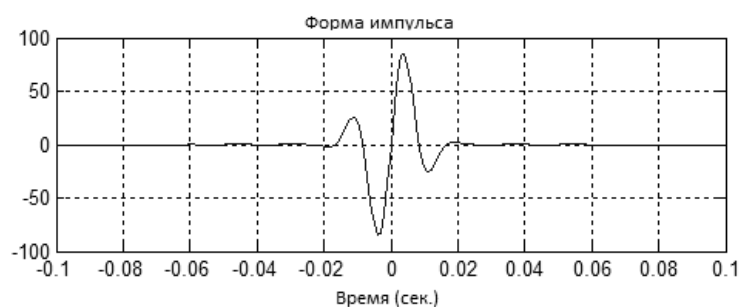


Рис. 2. Форма импульса для сторонних вертикальных напряжений, заданных по площадке 1x1 м в начале координат

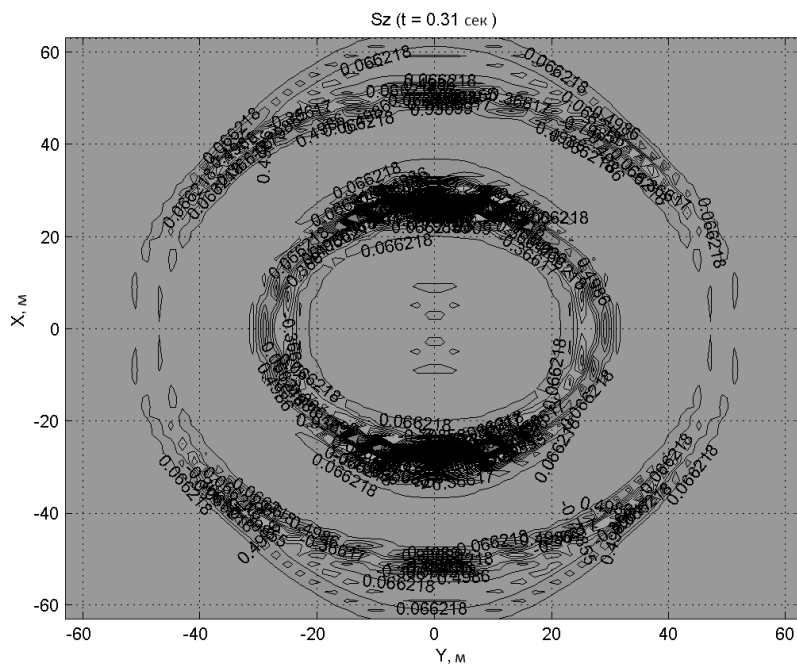


Рис. 3. Фрагмент вертикальной компоненты сейсмического поля, рассчитанного в момент времени $t = 0,31$ с по площади 120x120 м

Вычислительный эксперимент показывает, что анизотропия проявляется на преломленных волнах в виде эллипса равных величин смещений, вблизи же источника – в виде круга с разной амплитудой по азимуту.

2. Соответствие эффективных сейсмических скоростей их средневзвешенным величинам

Сейсмическая анизотропия понимается как анизотропия сейсмических скоростей. С использованием преобразования Фурье по пространственным координатам, оставляя производную по времени для однородной анизотропной среды, можно, анализируя три компоненты вектора смещения, рассмотреть скорости распространения упругого поля по всем трем направлениям, которые подчиняются волновому уравнению.

В однородном анизотропном пространстве уравнения теории упругости можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{S} = \frac{1}{\rho} M \mathbf{S},$$

где $M = D * H * E$, $D = \begin{pmatrix} ik_x & ik_y & ik_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ik_x & ik_y & ik_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ik_x & ik_y & ik_z \end{pmatrix}$, $H = c_{ij}$, $i, j = \overline{1, 9}$, $E = \begin{pmatrix} ik_x[1] \\ ik_y[1] \\ ik_z[1] \end{pmatrix}$.

Для случая плоской волны, распространяющейся в направлении оси z , имеем $ik_x = ik_y = 0$, отсюда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{S} = -k_z^2 \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{\mu} \rangle^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \langle \frac{1}{\mu} \rangle^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \rangle^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{S},$$

$$V_z = \begin{pmatrix} 122,878 & 0 & 0 \\ 0 & 122,878 & 0 \\ 0 & 0 & 208,8932 \end{pmatrix}.$$

Для случая плоской волны, распространяющейся в направлении оси y , имеем $ik_x = ik_z = 0$, отсюда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{S} = -k_y^2 \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \langle \mu \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \rangle + \langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \rangle^2 \langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \rangle^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \langle \frac{1}{\mu} \rangle^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{S},$$

$$V_y = \begin{pmatrix} 275,0695 & 0 & 0 \\ 0 & 449,5187 & 0 \\ 0 & 0 & 122,878 \end{pmatrix}.$$

Для случая плоской волны, распространяющейся в направлении оси x , имеем $ik_y = ik_z = 0$, отсюда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{S} = -k_x^2 \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \langle \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \rangle + \langle \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \rangle^2 \langle \frac{1}{\lambda+2\mu} \rangle^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \langle \mu \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \frac{1}{\mu} \rangle^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{S},$$

$$V_x = \begin{pmatrix} 449,5187 & 0 & 0 \\ 0 & 275,0695 & 0 \\ 0 & 0 & 122,878 \end{pmatrix}.$$

Анализируя коэффициент волнового уравнения, который характеризует материальные свойства вещества (горной породы), получены скорости, количество которых равно 9, из которых 5 равны друг другу. В результате, в анизотропной среде распространяются волны с разными скоростями в разных направлениях. Для рассматриваемой модели независимых скоростей четыре: $V_p^1 = 449,5187$ м/с, $V_s^1 = 275,0695$ м/с, $V_p^2 = 208,8932$ м/с, $V_s^2 = 122,878$ м/с.

С другой стороны, можно вычислить скорости, основываясь не на динамическом подходе (через уравнения Ламе), а на кинематическом подходе (через средние скорости и средние интервальные скорости). Для средних скоростей, вычисленных на основе уравнения эйконала, получим:

$$\langle V_p \rangle_\tau = \frac{\sum_{i=1}^5 h_i V_p^i}{\sum_{i=1}^5 h_i} = 419,2873 \text{ м/с}, \quad \langle V_p \rangle_m = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^5 h_i V_p^i}{\sum_{i=1}^5 h_i}} = \frac{\sum_{i=1}^5 h_i}{\sum_{i=1}^5 \frac{h_i}{V_p^i}} = 262,2096 \text{ м/с},$$

$$\langle V_s \rangle_\tau = \frac{\sum_{i=1}^5 h_i V_s^i}{\sum_{i=1}^5 h_i} = 246,6396 \text{ м/с}, \quad \langle V_s \rangle_m = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^5 h_i V_s^i}{\sum_{i=1}^5 h_i}} = \frac{\sum_{i=1}^5 h_i}{\sum_{i=1}^5 \frac{h_i}{V_s^i}} = 154,2409 \text{ м/с}.$$

Эти величины скоростей не совпадают со скоростями, полученными по осреднению закона Гука.

Кинематический подход по вычислению анизотропии скоростей не применим в случае, если длина волны будет превышать толщину пропластка. Эмпирические оценки толщины пропластка дают толщины, составляющие значения, меньшие 0,1 длины волны. В противном случае анизотропия скоростей не будет соответствовать физике процесса.

Можно предложить следующий алгоритм вычисления анизотропии в кинематическом подходе. По скоростям и плотности заданной тонкослоистой модели перейти к параметрам Ламе, провести осреднение закона Гука, найти скорости и использовать их для анализа кинематики (годографов) распространения сейсмического импульса (фронта волны) на основе уравнения эйконала.

3. Уравнения эйконала в произвольно-анизотропной неоднородной среде

В произвольно-анизотропной и неоднородной среде уравнения эйконала являются собственными значениями матрицы размерности 3×3 [5]:

$$A = \left[\begin{pmatrix} \text{grad}t & [0] & [0] \\ [0] & \text{grad}t & [0] \\ [0] & [0] & \text{grad}t \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} \text{grad}t & [0] & [0] \\ [0] & \text{grad}t & [0] \\ [0] & [0] & \text{grad}t \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Следовательно, в произвольно-анизотропной и неоднородной среде имеется три уравнения эйконала вида

$$(\text{grad}t)^T V \text{grad}t = 1.$$

Матрицу упругих параметров можно представить в виде составной матрицы

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix},$$

где подматрицы h_{ij} являются матрицами размерности 3×3 . При этом, исходя из структуры матрицы A , в построении уравнений эйконала будут участвовать только диагональные подматрицы h_{11} , h_{22} , h_{33} . Остальные подматрицы матрицы упругих параметров не участвуют в формировании скорости распространения упругого поля.

Рассмотрим решение уравнения эйконала. Пусть матрица связана с одной из подматриц h_{11} , h_{22} или h_{33} . Решение уравнения эйконала вида $(\text{grad}t)^T V \text{grad}t = 1$, где матрица V размерности 3×3 представима в виде $V = v[\lambda]v^{-1}$. Здесь матрица v есть матрица, составленная из собственных векторов матрицы V , диагональная матрица

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

– есть матрица собственных значений матрицы V .

Пусть в однородной среде имеет место соотношение $\text{grad}t = v \text{grad}\tilde{t}$, тогда функция \tilde{t} будет удовлетворять уравнению эйконала вида

$$\text{grad}\tilde{t}^T V \text{grad}\tilde{t} = \text{grad}\tilde{t}^T v^{-1} V v \text{grad}\tilde{t} = \text{grad}\tilde{t}^T [\lambda] \text{grad}\tilde{t} = 1.$$

Или

$$\lambda_{11} \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial x}\right)^2 + \lambda_{22} \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial y}\right)^2 + \lambda_{33} \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Откуда

$$\tilde{t} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{22}}}y^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{33}}}z^2}.$$

Следовательно, поверхностью изохрон является трехосный эллипсоид. В общем случае их три. При этом, вдоль каждой оси эллипсоида поле будет распространяться со своими, в общем случае не равными друг другу, скоростями, всего которых девять.

Заключение

Рассмотренные два подхода к введению анизотропии скоростей наталкиваются на проблему правильного определения этих скоростей. Для эффективного использования кинематического подхода к описанию распространения сейсмического поля в произвольно анизотропной неоднородной среде необходимо использовать три уравнения эйконала. Представленный выше результат вывода этих уравнений позволяет конструктивно определять анизотропию скоростей при кинематическом подходе. В общем случае, для произвольно анизотропной среды количество скоростей, определяемых по уравнениям эйконала, равно девяти. Это обобщает доминирующее в настоящее время представление о том, что в анизотропной среде распространяются всего три волны – две поперечные с разными скоростями и одна продольная.

Приведенный результат расчета сейсмического поля, зарегистрированного на дневной поверхности, в случае наличия анизотропного объекта приводит к сложной картине волнового поля. Это означает, что необходимо совершенствовать методики сейсморазведки при изучении анизотропных свойств геологической среды.

Литература

1. Баяк, И.О. Междисциплинарный подход к прогнозированию макроскопических и фильтрационно-емкостных свойств коллекторов углеводородов: дис. ... доктора физ.-мат. наук / И.О. Баяк. – М., 2013. – 228 с.
2. Уайт, Дж.Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн / Дж.Э. Уайт. – М.: Недра, 1986.
3. Backus, G.E. Long-Wave Anisotropy Produced by Horizontal Layering / G.E. Backus // Journal of Geophysical Research. – 1962. – V. 67, № 11. – P. 4427–4440.
4. Рытов, С.М. Акустические свойства мелкослоистой среды / С.М. Рытов // Акустический журнал. – 1956. – Т. 2, № 1. – С. 71–83.
5. Александров, П.Н. Вывод уравнения эйконала для анизотропных неоднородных сред / П.Н. Александров // Юбилейная X ежегодная международная конференция «Гальперинские чтения – 2010». Инновационные технологии и фундаментальные исследования в наземно-скважинной сейсморазведке 2D, 3D, ВСП и сейсмологии, посвященная 90-летию Е.И. Гальперина. – М., 2010. – С. 53–59.

Павел Николаевич Александров, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, ЦГЭМИ, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (г. Москва, Российская Федерация), Alexandr@igemi.troitsk.ru.

Владимир Николаевич Кризский, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математическое моделирование», Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (г. Стерлитамак, Российская Федерация), Krizsky@rambler.ru.

Поступила в редакцию 24 апреля 2018 г.

MSC 65Z05

DOI: 10.14529/mmp180201

MATHEMATICAL MODELLING OF EFFECTIVE ELASTIC PARAMETERS

P.N. Aleksandrov¹, V.N. Krizsky²

¹Schmidt Institute of Physics of the Earth of the RAS, Moscow, Russian Federation,

²Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation

E-mail: Alexandr@igemi.troitsk.ru, Krizsky@rambler.ru

The article is devoted to the study of the laws of elastic field propagation in inhomogeneous anisotropic media. At the same time, anisotropy is introduced as effective (averaged) parameters of a thin-layered medium, which determines the macroanisotropic elastic parameters of the rock. It is shown that the effective elastic parameters obtained from the theory of elasticity (Lame equations) do not coincide with the effective parameters

obtained using the kinematic approach. On the basis of reduction of equations of the theory of elasticity to the systems of the ordinary differential equations of the first order the solution of a direct problem of seismic exploration (as a boundary value problem) for horizontally layered and anisotropic model of the geological environment is received. The given result of calculation of the seismic field registered on the daily surface in the case of an anisotropic object leads to the complex picture of the wave field. This means that it is necessary to improve the methods of seismic exploration in the course of the studying of anisotropic properties of the geological environment.

Keywords: seismic anisotropy; effective parameters; systems of differential equations; eikonal equation.

References

1. Bayuk I.O. *Mezhdisciplinarny podkhod k prognozirovaniyu makroskopicheskikh i filtracionno emkostnykh svoystv kollektorov uglevodorodov* [Interdisciplinary Approach to Prediction of Macroscopic and Filtration-Capacitive Properties of Hydrocarbon Reservoirs. Thesis of Doctor of Physical and Mathematical Sciences], Moscow, 2013. 228 p. (in Russian)
2. Wait J.E. *Underground Sound – Application of Seismic Waves*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1983.
3. Backus G.E. Long-Wave Anisotropy Produced by Horizontal Layering. *Journal of Geophysical Research*, 1962, vol. 67, no. 11, pp. 4427–4440. DOI: 10.1029/JZ067i011p04427
4. Rytov S.M. [Acoustic Properties of Fine-Layered Medium]. *Akusticheskiy zhurnal*, 1956, vol. 2, no. 1, pp. 71–83. (in Russian)
5. Aleksandrov P.N. [Derivation of the Eikonal Equation for Anisotropic Inhomogeneous Media]. *X Annual International Conference "Halperin Readings – 2010". Innovative Technologies and Fundamental Researches in 2Q, 3D VSP Well-Surface Exploration and Seismology Commemorating 90 Year Anniversary of Y.I. Galperin*, Moscow, 2010, pp. 53–59. (in Russian)

Received April 24, 2018