

## РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ БЫСТРОГО ПСЕВДОСПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ

*Б.В. Семисалов*, Институт вычислительных технологий СО РАН,  
г. Новосибирск, Российская Федерация; Новосибирский государственный  
университет, г. Новосибирск, Российская Федерация

Разработан метод численного решения 1D, 2D и 3D краевых задач Дирихле для нелинейных уравнений эллиптического типа. Метод основан на применении чебышевских приближений искомой функции, не имеющих насыщения, и нового подхода к формированию и решению задач линейной алгебры при дискретизации исходных дифференциальных уравнений. При этом дифференциальные операторы аппроксимируются с помощью матриц, а само уравнение (в 2D и 3D случаях) – с помощью уравнения Сильвестра, либо его тензорного обобщения. В тестовых задачах с решениями различной степени гладкости показана зависимость порядка сходимости предложенного метода от гладкости искомого решения, строго соответствующая оценкам погрешности наилучших полиномиальных приближений. Указанные свойства свидетельствуют об отсутствии насыщения алгоритма и обеспечивают низкий расход памяти и машинного времени при численном анализе задач, решения которых имеют высокий порядок гладкости.

*Ключевые слова:* чебышевские приближения; краевая задача; нелокальный метод без насыщения; уравнение Сильвестра; метод установления.

### Введение

При решении краевых задач высокой вычислительной сложности на ЭВМ специалисты неизбежно сталкиваются с проблемой минимизации вычислительных затрат при сохранении необходимой точности решения. Актуальность этой проблемы особенно остро проявляется в приложениях, где требуется проведение расчетов с высокой точностью (квантовая физика, оптика, химия, проблемы создания высокоточных систем навигации, метеорология и др.); при решении нелинейных задач с малыми параметрами и большими градиентами; задач большой размерности, в которых ограничения объемов памяти становятся наиболее критичными; а также при оптимизации сложных систем, сводящейся к решению большого количества прямых задач.

Решение указанной проблемы видится во всестороннем учете свойств дифференциальной задачи при построении вычислительной модели. Автоматический учет важнейшего из таких свойств – свойства гладкости искомого решения – обеспечивается при использовании методов без насыщения (см. [1, 2]). Известно, что применение рядов Фурье и интерполяционных полиномов с узлами Чебышева для приближения функции, удовлетворяющей условию Дини – Липшица, обеспечивает асимптотику погрешности наилучших полиномиальных приближений с точностью до медленно-растущих множителей (констант Лебега). Чем выше гладкость функции, тем выше скорость сходимости приближения.

Настоящая работа посвящена конструированию, обоснованию и апробации нового алгоритма решения нелинейных краевых задач Дирихле для дифференциальных уравнений эллиптического типа на отрезке в прямоугольнике и в кубе. Гладкость решений таких уравнений зачастую достаточно высока, что определяет значительную

эффективность приближений без насыщения в этих задачах. В разделе 1 приведены теоретические результаты, характеризующие порядок аппроксимации приближений без насыщения в зависимости от свойств гладкости (регулярности) приближаемой функции.

Разделы 2, 3 посвящены формированию и решению задачи линейной алгебры, соответствующей исходной дифференциальной постановке. Здесь на основе чебышевских приближений, метода коллокаций, итерационного метода установления, набора нестационарной регуляризации и методов, описанных в [3], получены системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в форме уравнений Сильвестра и их тензорных обобщений. Далее предложен аппарат для работы с этими уравнениями, позволивший на несколько порядков снизить количество операций по сравнению с классической схемой метода коллокаций (КСМК). Под последней здесь и далее понимается алгоритм, работающий со СЛАУ вида  $Ax = b$ , имеющей единую разреженную матрицу  $A$  большого размера.

С точки зрения развития методов без насыщения основной интерес представляет вопрос о соответствии точности численных решений порядку гладкости искомых функций. В [1] для некоторых линейных задач предложен алгоритм, основанный на методе коллокаций и чебышевских приближениях, и дано строгое обоснование отсутствия его насыщения (см. гл. 9, §5, с. 563–572). Идея аппроксимации из [1] взята за основу метода, предложенного в настоящей работе. Однако здесь речь идет о решении нелинейных задач с использованием итерационного процесса. Общих подходов к обоснованию сходимости и ненасыщаемости подобных схем до сих пор предложено не было. В разделе 4 при решении тестовых задач показано повышение порядка аппроксимации разработанного алгоритма при увеличении порядка гладкости искомых функций в строгом соответствии с оценками точности наилучших приближений, что является косвенным подтверждением его ненасыщаемости. Важной особенностью работы является применение единого (нелокального) приближения неизвестной функции полиномом (1D случай) либо прямым произведением полиномов (2D и 3D случаи). В связи с указанными обстоятельствами разработанный метод будем именовать далее **нелокальным методом без насыщения** (далее – НМБН).

## 1. О приближении гладких функций

Ниже приведены теоремы, характеризующие асимптотики погрешности приближений, использованных в методе. Результаты раздела 4 демонстрируют те же асимптотики при использовании метода для решения краевых задач. Пусть  $D = [a, b] \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C(D)$ ,

$$\|f\| = \max_{x \in D} |f(x)|, \quad \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(t)| dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

при  $p = \infty$  полагаем  $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|$ ,  $\mathfrak{W}_p^r(M, D) = \{f \in C^r(D) : \|f^{(r)}\|_p \leq M\}$  – множества гладких функций,  $L_p$ -нормы  $r$ -х производных которых ограничены константой  $M$ . Далее будем работать с классами функций  $W_p^r(M, D)$ , являющимися замыканиями множеств  $\mathfrak{W}_p^r(M, D)$  в норме  $\|\cdot\|_p$ . В рамках теории приближения функций  $f \in W_p^r(M, D)$  традиционно вводятся следующие понятия (см., например, [1]).

1. **Аппроксимирующий конечномерный компакт**  $K_n$ , элементы которого используются для приближения  $f(x)$  и, как правило, представляют ряды или полиномы, содержащие  $n$  слагаемых или мономов.

2. **Оператор приближения (или просто приближение) функции**  $f(x)$  – непрерывное отображение  $P_n$ , осуществляющее проекцию функционального пространства на компакт ( $P_n : C(D) \rightarrow K_n$  или  $P_n : W_p^r(M, D) \rightarrow K_n$ ).

3. **Наилучшее приближение функции**  $f \in C(D)$  – элемент  $e_n(f, K_n) \in K_n$ , на котором достигается нижняя грань  $\varepsilon_n^*(f, K_n) = \varepsilon_n^*(f) = \inf_{g \in K_n} \|f - g\|$ .

4. **Константа Лебега**  $\Lambda_n = \sup_{f \in C[a,b], f \neq 0} \|P_n(f)\|/\|f\|$  – норма оператора  $P_n$ , характеризующая точность и устойчивость метода приближения:

$$\|f - P_n(f)\| \leq (1 + \Lambda_n)\varepsilon_n^*(f),$$

$$\|f - P_n(f + \delta)\| \leq (1 + \Lambda_n)\varepsilon_n^*(f) + \Lambda_n\delta.$$

Здесь  $(f + \delta)$  – функция, полученная возмущением  $f(x)$  в каждой точке  $x \in D$  не более чем на  $\delta\|f\|$ ,  $\delta$  – малое число.

5. **Метод без насыщения** (нестрого) – это метод приближения, обладающий порядком сходимости наилучшего полиномиального приближения для любой гладкости (регулярности) аппроксимируемой функции. Строгое определение, основанное на анализе асимптотики поперечников Александрова, дано в [2]. Методы без насыщения нашли развитие и применение в работах С.Д. Алгазина, А.Л. Афендикова, В.Н. Белых, А.М. Блохина.

Результаты теории приближений позволяют выделить три класса гладких функций, имеющих принципиально разные асимптотики погрешностей наилучших приближений в пространстве алгебраических полиномов.

I. Для функций с ограниченной гладкостью  $f \in W_p^r(M, D)$  в соответствии с теоремой Джексона имеет место **степенная сходимость** наилучшего приближения.

**Теорема 1.** Для любой  $2\pi$ -периодической  $r$ -гладкой функции  $f(t)$  и числа  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq r$  существует тригонометрический полином  $\mathfrak{T}_n(t)$  такой, что

$$|f(t) - \mathfrak{T}_n(t)| \leq 12^{r+1} \frac{1}{n^r} \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right), \quad (1)$$

где  $\omega(f; q) = \sup_{x \in [0, 2\pi-h], h \in [0, q]} |f(x+h) - f(x)|$  – модуль непрерывности  $f$  первого порядка.

Конкретный вид  $\mathfrak{T}_n(t)$  и доказательство теоремы см. в [5, с. 204–208]. Теорема 1 была обобщена на случай приближения функций  $f \in W_p^r(M, D)$  [1, с. 158–159].

**Теорема 2.** Для наилучших приближений имеет место оценка

$$\sup_{f \in W_p^r(M, D)} \varepsilon_n^*(f, K_n) \leq MC_r n^{-r}, \quad (2)$$

где  $C_r$  зависит только от  $r$  и может быть ограничена сверху.

Важно отметить, что в если  $\omega(f^{(r)}; q) < Mq^\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , то для данной  $f$  существует более точная оценка [5, с. 244]:

$$\varepsilon_n^*(f, K_n) \leq MC_r^1 n^{-r-\alpha}, \quad (3)$$

где  $C_r^1$  зависит только от  $r$ .

**II.** Для бесконечно дифференцируемых функций, имеющих особенность (полюс, устранимую особую, либо существенно-особую точку) в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , Бернштейном доказана возможность построения приближений, имеющих **экспоненциальную скорость сходимости**.

**Теорема 3.** [4, 5, с. 465–467] Пусть  $\mathfrak{M}$  – ограниченное множество с односвязным дополнением в  $\mathbb{C}$ . Тогда если  $f(z)$  ( $z \in \mathfrak{M}$ ) – аналитическая в области  $\mathfrak{M}_1 \in \mathfrak{M}$  функция, имеющая особенность на границе  $\Gamma = \partial\mathfrak{M}$ , то существуют число  $q$  ( $0 < q < 1$ ) и последовательность полиномов  $P_n(z)$ , такие что

$$|f(z) - P_n(z)| \leq A_f C q^n, \quad \forall z \in \mathfrak{M}_1, \quad C = \text{const}, \quad (4)$$

где  $A_f = \max_{z \in \partial\mathfrak{M}_1} |f(z)|$ . Выбирая  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}_1$  такими, что  $D \subset \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ , получаем экспоненциальную сходимость в  $D$  со знаменателем  $q$ , величина которого зависит от выбора  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}_1$ .

**III.** Для целых функций (аналитических на всей комплексной плоскости) скорость сходимости наилучшего приближения **выше экспоненциальной**.

**Теорема 4.** Пусть  $f(x)$  – целая функция на отрезке  $[a, b]$ ,  $M(n)$  – последовательность чисел, ограничивающих значения производных  $f: \|f^{(n)}\| \leq M(n)$ . Тогда имеет место оценка

$$\varepsilon_n^*(f, K_n) \leq \frac{M(n)(b-a)^n 2^{1-2n}}{n!} = \frac{M(n)q^n}{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(n)}{n!} = 0. \quad (5)$$

Последнее предельное равенство для целых функций выполнено в силу формулы Коши – Адамара. Отметим, что (5) соответствует приближению интерполяционным полиномом с узлами Чебышева. В случае  $M(n) \leq a^n$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , имеет место факториальная сходимость.

Для реализации свойств наилучших приближений в данной работе будем пользоваться разложением функций в ряд Фурье и в ряд с базисом, состоящим из полиномов Чебышева  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ . В [1] обосновано отсутствие насыщения таких приближений. Кроме этого, их константы Лебега растут медленно с ростом  $n$  [5, с. 112–115].

**Теорема 5.** Константа Лебега приближений частичными суммами ряда Фурье  $\Phi_n$  логарифмически зависит от  $n$ ,  $\Lambda_n = \frac{4}{\pi} \ln n + R_n$ , где  $R_n < 3$ .

**Теорема 6.** Константа Лебега интерполяционного полинома с узлами в нулях многочлена Чебышева  $\mathcal{T}_n$  логарифмически зависит от  $n$ ,  $\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \ln n + 1 - \theta_n$ ,  $0 < \theta_n < \frac{1}{4}$ .

## 2. Аппроксимация функций и их производных

В данном разделе описан нелокальный метод решения краевых задач Дирихле размерностей  $d = 1, 2, 3$  для уравнений эллиптического типа второго порядка вида

$$\begin{aligned} d = 1 : u_{xx} &= f(u, x), & d = 2 : u_{xx} + u_{yy} &= f(u, x, y), \\ d = 3 : u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= f(u, x, y, z), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $u \in C(D)$  – неизвестная функция,  $f$  – известная правая часть (возможно, разрывная). Разрабатываемый метод несложно модифицировать для решения уравнений с переменными коэффициентами и квазилинейных уравнений (см. ниже).

Предлагаемый подход восходит к работам [3, 6] и представляет псевдоспектральный метод. В нем для приближения решения использованы интерполяционные полиномы на отрезке  $[-1, 1]$  с узлами в нулях многочлена Чебышева  $x_j = \cos((2j-1)\pi/2N)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , представленные в форме Лагранжа:

$$P_{1D}(u, x) = \sum_{j=1}^N \frac{\zeta(x, x_j) T_N(x)}{(x - x_j) T'_N(x_j)} u(x_j), \quad \zeta(x, x_j) = \frac{1 - x^2}{1 - x_j^2}. \quad (7)$$

Функция  $\zeta(x, x_j)$  обеспечивает выполнение поставленных краевых условий. Неизвестную функцию будем приближать суммой  $u(x) \approx P_{1D}(u, x) + v(x)$ , где  $P_{1D}(u, \pm 1) = 0$ ,  $v(x)$  – линейная функция, удовлетворяющая неоднородным условиям. Рассмотрим далее метод аппроксимации первых и вторых производных  $u(x)$  в предположении, что имеют место условия Дирихле:  $u(-1) = \varphi$ ,  $u(1) = \psi$ . Определим  $v(x) = ((\psi - \varphi)x + (\varphi + \psi))/2$ . Тогда

$$u'(x) \approx P'_{1D}(u, x) + (\psi - \varphi)/2; \quad u''(x) \approx P''_{1D}(u, x).$$

Положим  $s = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $s_j = \sqrt{1 - x_j^2}$ ,  $u_j = u(x_j)$ . Дифференцируя  $P_{1D}$  по  $x$ , получаем

$$P'_{1D}(u, x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \left\{ \frac{2xx_j - x^2 - 1}{(x - x_j)^2 s_j} T_N(x) + \frac{s^2}{s_j(x - x_j)} T'_N(x) \right\} u_j, \quad (8)$$

$$P''_{1D}(u, x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \left\{ \frac{2s_j^2 - N^2(x - x_j)^2}{(x - x_j)^3 s_j} T_N(x) - \frac{(x^2 - 3xx_j + 2)}{s_j(x - x_j)^2} T'_N(x) \right\} u_j. \quad (9)$$

Переходя в (8), (9) к пределу при  $x \rightarrow x_i$  и используя правило Лопиталья, находим

$$P'_{1D}(u, x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N (-1)^{i+j} \frac{s_i}{s_j(x_i - x_j)} u_j - \frac{3x_i}{2s_i^2} u_i, \quad (10)$$

$$P''_{1D}(u, x_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N (-1)^{i+j-1} \frac{2s_i^2 + 3x_i(x_i - x_j)}{s_j s_i (x_i - x_j)^2} u_j - \frac{(N^2 + 5)s_i^2 + 3x_i^2}{3s_i^4} u_i. \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$\alpha_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} s_i}{s_j(x_i - x_j)}, \quad a_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{2s_i^2 + 3x_i(x_i - x_j)}{s_j s_i (x_i - x_j)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j, \quad (12)$$

$$\mathbf{n}_i = -3x_i/(2s_i^2), \quad \nu_i = -((N^2 + 5)s_i^2 + 3x_i^2)/(3s_i^4), \quad i = 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad U_x = \begin{pmatrix} (u_x)_1 \\ (u_x)_2 \\ \vdots \\ (u_x)_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_1) \\ u_x(x_2) \\ \vdots \\ u_x(x_N) \end{pmatrix},$$

$$U_{xx} = \begin{pmatrix} (u_{xx})_1 \\ (u_{xx})_2 \\ \vdots \\ (u_{xx})_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xx}(x_1) \\ u_{xx}(x_2) \\ \vdots \\ u_{xx}(x_N) \end{pmatrix}$$

и сформируем  $N \times N$  матрицы

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1N} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{n}_2 & \dots & \mathbf{a}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{a}_{N1} & \mathbf{a}_{N2} & \dots & \mathbf{n}_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \nu_1 & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \nu_2 & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & \nu_N \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимации производных в уравнениях (6), получим формулы

$$U_x \approx \mathfrak{A}U + V_x, \quad U_{xx} \approx AU, \quad (14)$$

где  $V_x$  – вектор с компонентами  $(v_x)_i = -(\varphi + \psi)/2, \forall i = 1, \dots, N$ . Далее для построения алгоритмов воспользуемся спектральным разложением матрицы  $A$ , аппроксимирующей вторые производные:

$$A = R_A D_A R_A^{-1}, \quad (15)$$

где  $R_A$  – матрица собственных векторов  $A$ ;  $D_A$  – диагональная матрица собственных значений  $A - d_A^j, j = 1, \dots, N$ .

**Замечание 1.** При вычислении спектра матрицы  $A$  для  $N = 2, \dots, 200$  с помощью  $QR$ -алгоритма, реализованного в MATLAB, было установлено, что собственные числа  $A$  являются действительными и хорошо отделимыми (минимальное расстояние между числами есть 6,88). Поэтому разложение (15) корректно. Удачным обстоятельством является медленный рост обусловленностей матриц  $R_A$  с ростом  $N$ , обеспечивающий устойчивость разрабатываемого алгоритма к погрешностям округления.

**Замечание 2.** При численной реализации алгоритма матрицы  $\mathfrak{A}, A, R_A, D_A, R_A^{-1}$  для разных  $N$  целесообразно занести в базу данных, чтобы не тратить время на их расчет.

В двумерном случае ( $d = 2, D = [-1, 1]^2, u(x, y) \in C(D)$  – искомая функция) введем в области  $D$  сетку с узлами  $(x_j, y_k)$ , где  $x_j = \cos \frac{2j-1}{2N}\pi, y_k = \cos \frac{2k-1}{2K}\pi, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K$ . Положим  $u_{jk} = u(x_j, y_k), (u_\mu)_{jk} = u_\mu(x_j, y_k)$ , где  $\mu$  обозначает одну из производных  $\mu \in \{x, y, xx, yy, xy\}$ . Пусть  $U = (u_{jk}), U_\mu = ((u_\mu)_{jk}) - N \times K$  матрицы. Для приближения функции  $u(x, y)$  используем прямое произведение полиномов вида (7):

$$P_{2D}(u, x, y) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \frac{\zeta(x, x_j)T_N(x)}{(x - x_j)T'_N(x_j)} \frac{\zeta(y, y_k)T_K(y)}{(y - y_k)T'_K(y_k)} u(x_j, y_k). \quad (16)$$

Тогда  $u(x, y) \approx P_{2D}(u, x, y) + v(x, y)$ ,  $P_{2D}$  удовлетворяет однородным, а  $v(x, y)$  – неоднородным граничным условиям:  $v = v^x + v^y$ , где  $v^x(x, y) = \alpha_x(y)x + \beta_x(y)$ ,  $v^y(x, y) = \alpha_y(x)y + \beta_y(x)$ ,

$$v^x|_{y=\pm 1} = v^y|_{x=\pm 1} = 0. \tag{17}$$

Значения  $(\alpha_x, \beta_x)$ ,  $(\alpha_y, \beta_y)$  подбираются таким образом, чтобы удовлетворить условиям на границах  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$  соответственно. При этом в силу (17) после суммирования  $v = v^x + v^y$  функция  $v$  удовлетворяет необходимым краевым условиям на границе  $D$ .

Проводя выкладки, аналогичные (8)–(14) (см. также [3]), получаем матрицы, аппроксимирующие производные  $u(x, y)$  –  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $A$ ,  $B$ :

$$U_x \approx \mathfrak{A}U + V_x, \quad U_y \approx U\mathfrak{B}^T + V_y, \quad U_{xx} \approx AU, \quad U_{yy} \approx UB^T, \quad U_{xy} \approx \mathfrak{A}U\mathfrak{B}^T + V_{xy}. \tag{18}$$

Здесь матрицы значений  $v_\mu(x, y)$  на введенной сетке  $V_\mu$  задаются формулами

$$V_x = V_x^x + \mathfrak{A}V^y, \quad V_y = V^x\mathfrak{B}^T + V_y^y, \quad V_{xy} = V_x^x\mathfrak{B}^T + \mathfrak{A}V_y^y, \tag{19}$$

где  $V_\mu^{x,y}$  – массивы, содержащие  $v_\mu^{x,y}(x_j, y_k)$ .

В трехмерном случае ( $d = 3$ ,  $D = [-1, 1]^3$ ,  $u(x, y, z) \in C(D)$  – искомая функция) введем в области  $D$  сетку с узлами  $(x_j, y_k, z_m)$ , где  $x_j = \cos \frac{2j-1}{2N}\pi$ ,  $y_k = \cos \frac{2k-1}{2K}\pi$ ,  $z_m = \cos \frac{2m-1}{2M}\pi$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Положим  $u_{jk}^m = u(x_j, y_k, z_m)$ ,  $(u_\mu)_{jk}^m = u_\mu(x_j, y_k, z_m)$ ,  $\mu \in \{x, y, z, xx, yy, zz, xy, xz, yz\}$ . Пусть  $U = (u_{jk}^m)$ ,  $U_\mu = ((u_\mu)_{jk}^m)$  – трехмерные массивы размера  $N \times K \times M$ . Для приближения  $u(x, y, z)$  используем прямое произведение:

$$P_{3D}(u, x, y, z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \frac{\zeta(x, x_j)T_N(x)}{(x - x_j)T'_N(x_j)} \frac{\zeta(y, y_k)T_K(y)}{(y - y_k)T'_K(y_k)} \frac{\zeta(z, z_m)T_M(z)}{(z - z_m)T'_M(z_m)} u(x_j, y_k, z_m). \tag{20}$$

Тогда  $u(x, y, z) \approx P_{3D}(u, x, y, z) + v(x, y, z)$ ,  $P_{3D}$  удовлетворяет однородным, а  $v(x, y, z)$  – неоднородным граничным условиям и строится аналогично 2D случаю.

Определим слоистые трехмерные массивы  $\overline{\mathfrak{A}}$ ,  $\overline{\mathfrak{B}}$ ,  $\overline{\mathfrak{C}}$ ,  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$ ,  $\overline{C}$ , аппроксимирующие первые и вторые производные функции  $u(x, y, z)$  по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Пусть  $\overline{\mathfrak{a}}_{jk}^m$  и  $\overline{a}_{jk}^m$  – элементы массивов  $\overline{\mathfrak{A}}$  и  $\overline{A}$ ;  $\mathfrak{a}_{jk}$  и  $a_{jk}$  – элементы матриц  $\mathfrak{A}$ ,  $A$ . Слоистые массивы  $\overline{\mathfrak{A}}$  и  $\overline{A}$  содержат в слоях матрицы  $\mathfrak{A}$  и  $A$ , расположенные вдоль оси  $z$ , т. е.  $\forall m \overline{\mathfrak{a}}_{jk}^m = \mathfrak{a}_{jk}$ ,  $\overline{a}_{jk}^m = a_{jk}$ . Аналогично массивы  $\overline{\mathfrak{B}}$ ,  $\overline{B}$  и  $\overline{\mathfrak{C}}$ ,  $\overline{C}$  содержат в слоях матрицы  $\mathfrak{B}$ ,  $B$  и  $\mathfrak{C}$ ,  $C$ , расположенные вдоль осей  $x$  и  $y$ .

**Определение 1.** Боковым произведением слоистого массива  $\overline{A}$  со слоями  $A = (a_{js})_{N \times N}$ , лежащими вдоль  $z$ , и массива  $U$  назовем массив  $\alpha = \overline{A} \overset{s}{\times} U$  с элементами  $\alpha_{jk}^m = \sum_{s=1}^N a_{js} u_{sk}^m$ .

**Определение 2.** Фронтальным произведением массива  $\overline{B}$  со слоями  $B = (b_{ks})_{K \times K}$ , лежащими вдоль  $x$ , и массива  $U$  назовем массив  $\beta = \overline{B} \overset{f}{\times} U$  с элементами  $\beta_{jk}^m = \sum_{s=1}^K b_{ks} u_{js}^m$ .

**Определение 3.** Верхним произведением слоистого массива  $\bar{C}$  со слоями  $C = (c_{ms})_{M \times M}$ , лежащими вдоль  $y$ , и массива  $U$  назовем массив  $\gamma = \bar{B} \overset{u}{\times} U$  с элементами  $\gamma_{jk}^m = \sum_{s=1}^M c_{ms} u_{jk}^s$ .

Такие произведения, основанные на размещении слоистого аппроксимирующего массива сбоку, спереди или сверху от  $U$ , и умножении матриц, находящихся в смежных слоях, позволяют записать операции дифференцирования в виде

$$\begin{aligned} U_x &\approx \bar{\mathfrak{A}} \overset{s}{\times} U, U_y \approx \bar{\mathfrak{B}} \overset{f}{\times} U, U_z \approx \bar{\mathfrak{C}} \overset{u}{\times} U, U_{xx} \approx \bar{A} \overset{s}{\times} U, U_{yy} \approx \bar{B} \overset{f}{\times} U, U_{zz} \approx \bar{C} \overset{u}{\times} U, \\ U_{xy} &\approx \bar{\mathfrak{A}} \overset{s}{\times} \bar{\mathfrak{B}} \overset{f}{\times} U, U_{xz} \approx \bar{\mathfrak{A}} \overset{s}{\times} \bar{\mathfrak{C}} \overset{u}{\times} U, U_{yz} \approx \bar{\mathfrak{B}} \overset{f}{\times} \bar{\mathfrak{C}} \overset{u}{\times} U. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь для краткости 3D массивы  $V_\mu$  с производными  $v_\mu(x_j, y_k, z_m)$  опущены. Основываясь на введенных операциях, можно записать спектральные разложения слоистых массивов, например,  $\bar{A} = \bar{R}_A \overset{s}{\times} \bar{D}_A \overset{s}{\times} \bar{R}_A^{-1}$ , где  $\bar{R}_A, \bar{D}_A, \bar{R}_A^{-1}$  – слоистые массивы со слоями, расположенными вдоль оси  $z$  и содержащими матрицы  $R_A, D_A, R_A^{-1}$ . Подробное описание и обоснование корректности введенных операций дано в [3].

Описанные приближения неизвестной функции и ее производных можно обобщить на случай произвольного порядка и размерности дифференциального уравнения.

### 3. Реализация алгоритма

После аппроксимации неизвестной функции и ее производных в уравнениях (6) приходим к нелинейным соотношениям, записанным для векторов ( $d = 1$ ), матриц ( $d = 2$ ) или 3-мерных массивов ( $d = 3$ ). Для решения таких соотношений будем строить итерационные процессы на основе **метода установления**.

Пусть имеется краевая задача для уравнения эллиптического типа

$$L(\mathbf{x}, u)u = f(\mathbf{x}, u), \quad u|_{\partial D} = g(\mathbf{x}), \quad (22)$$

где  $L = L(\mathbf{x}, u)$  – оператор главных коэффициентов,  $D = [-1, 1]^d$ ,  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^d$ . Метод установления состоит во введении новой временной переменной  $t$  и нестационарного оператора – **регуляризации**  $B_t$  с последующей заменой исходной краевой задачи (22) на начально-краевую задачу с неизвестной функцией  $u(t, \mathbf{x})$ :

$$B_t u = L(\mathbf{x}, u)u - f(\mathbf{x}, u), \quad u(t, \mathbf{x})|_{x \in \partial D} = g(\mathbf{x}), \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}). \quad (23)$$

Решение задачи (22) ищется как предел решений (23) при  $t \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим простую регуляризацию  $B_t = \frac{\partial}{\partial t}$ , введем сетку по временной переменной  $t$  с постоянным шагом  $\tau$  и узлами  $t_s = \tau s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . Пусть  $\hat{u}, u$  – решения на  $s$ -м и  $(s - 1)$ -м шагах по времени,  $I$  – единичный оператор. После дискретизации  $B_t u \approx \frac{\hat{u} - u}{\tau}$  и «выделения» в уравнении (23) оператора Лапласа  $\Delta$  ( $L(\mathbf{x}, u) = L(\mathbf{x}, u) - \Delta + \Delta$ ) запишем схему

$$\hat{u} = u + \tau(\Delta \hat{u} - (f + \Delta u - Lu)), \quad \text{или} \quad \hat{u} = (I - \tau \Delta)^{-1}[u - \tau(f + (\Delta - L)u)]. \quad (24)$$



Сходимость итерационного процесса для конкретного вида  $L$  может быть исследована на основе принципа сжимающих отображений. Критерий останова процесса

$$\|B_t u\|/\|u\| = \|L(\mathbf{x}, u)u - f(\mathbf{x}, u)\|/\|u\| \leq \varepsilon_S \quad (25)$$

дает приближенное решение задачи (22) с невязкой установления  $\varepsilon_S$ .

Записывая простую регуляризацию уравнений (6), где  $L = \Delta$ , в соответствии с (24), получим неявные схемы метода установления:

$$\begin{aligned} d = 1: & \left( I - \tau \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \hat{u} = u - \tau f(u, \mathbf{x}), \\ d = 2: & \left( I - \tau \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \right) \hat{u} = u - \tau f(u, \mathbf{x}), \\ d = 3: & \left( I - \tau \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \right) \hat{u} = u - \tau f(u, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (26)$$

Аппроксимируя в (26) вторые производные по формулам вида (14), (18), (21) и перенося производные от добавочных функций  $v$  в правую часть (с целью сокращения выкладок они далее опущены) получаем

$$(E - \tau A)\hat{U} = U - \tau F(U) = H(U), \quad (27)$$

$$(\hat{U} - \tau(A\hat{U} + \hat{U}B^T)) = U - \tau F(U) = H(U), \quad (28)$$

$$(\hat{U} - \tau(\bar{A} \overset{s}{\times} \hat{U} + \bar{B} \overset{f}{\times} \hat{U} + \bar{C} \overset{u}{\times} \hat{U})) = U - \tau F(U) = H(U), \quad (29)$$

где  $E$  – единичная матрица,  $\hat{U}$ ,  $U$  – вектора, матрицы или трехмерные массивы, содержащие значения неизвестных функций в узлах интерполяции на текущем и предыдущем временных слоях,  $F$  содержит значения правой части в узлах сетки (см. рис. 1 для случая  $d = 3$ ).

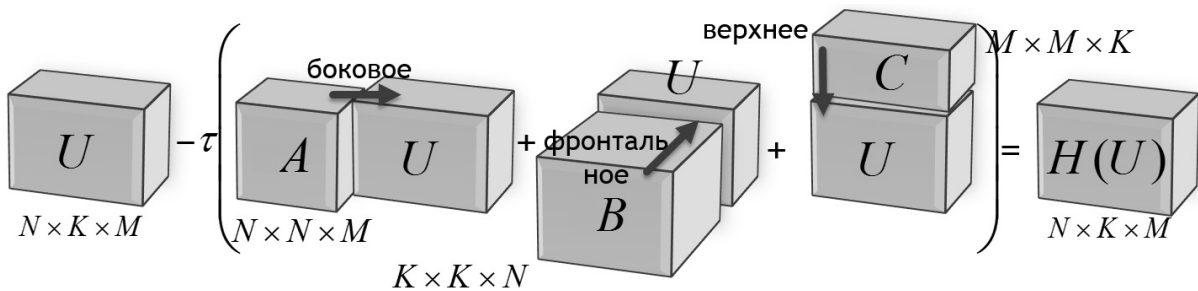


Рис. 1. Представление уравнения (29) в виде операций с трехмерными массивами

Умножая (27) на матрицу  $R_A^{-1}$  слева; (28) на матрицу  $R_A^{-1}$  слева и  $R_B^{-1}$  справа; или записывая боковое произведение (29) на слоистый массив  $\bar{R}_A^{-1}$ , фронтальное произведение на  $\bar{R}_B^{-1}$  и верхнее произведение на  $\bar{R}_C^{-1}$  с учетом ассоциативности операций произведения, получаем системы с диагональными матрицами:

$$\begin{aligned} (E - \tau D_A)\hat{V} = G(U), \quad \hat{V} - \tau(D_A \hat{V} + \hat{V} D_B) = G(U), \\ \hat{V} - \tau(\bar{D}_A \overset{s}{\times} \hat{V} + \bar{D}_B \overset{f}{\times} \hat{V} + \bar{D}_C \overset{u}{\times} \hat{V}) = G(U), \end{aligned} \quad (30)$$

где в случае  $d = 1$ :  $\widehat{V} = R_A^{-1}\widehat{U}$ ,  $G(U) = R_A^{-1}H(U)$ ,  
 в случае  $d = 2$ :  $\widehat{V} = R_A^{-1}\widehat{U}R_B^{-1}$ ,  $G(U) = R_A^{-1}H(U)R_B^{-1}$ , (31)

в случае  $d = 3$ :  $\widehat{V} = \overline{R_A^{-1}} \times^s \overline{R_B^{-1}} \times^f \overline{R_C^{-1}} \times^u \widehat{U}$ ,  $G(U) = \overline{R_A^{-1}} \times^s \overline{R_B^{-1}} \times^f \overline{R_C^{-1}} \times^u H(U)$ .

Решение (30) дается элементарными формулами:

для случая  $d = 1$  компоненты вектора  $\widehat{V}$  определяются равенствами  $\hat{v}_j = \frac{g_j}{1 - \tau d_A^j}$ ;

при  $d = 2$  элементы матрицы  $\widehat{V}$  определяются равенствами  $\hat{v}_{jk} = \frac{g_{jk}}{1 - \tau(d_A^j + d_B^k)}$ ;

при  $d = 3$  элементы трехмерного массива  $\widehat{V} - \hat{v}_{jk}^m = \frac{g_{jk}^m}{1 - \tau(d_A^j + d_B^k + d_C^m)}$ .

Здесь  $g_j, g_{jk}, g_{jk}^m$  суть компоненты вектора, элементы матрицы или массива  $G$  (в зависимости от размерности),  $d_A^j, d_B^k, d_C^m$  – собственные числа матриц  $A, B, C$ ,  $j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M$ . После вычисления  $\widehat{V}$  решения регуляризованных уравнений на текущей итерации находятся по формулам

$$d = 1: \widehat{U} = R_A \widehat{V}, \quad d = 2: \widehat{U} = R_A \widehat{V} R_B, \quad d = 3: \widehat{U} = \overline{R_A} \times^s \overline{R_B} \times^f \overline{R_C} \times^u \widehat{V}. \quad (32)$$

При решении необходимо следить, чтобы выполнялись условия

$$\tau \neq 1/d_A^j, \quad \tau \neq 1/(d_A^j + d_B^k), \quad \tau \neq 1/(d_A^j + d_B^k + d_C^m) \quad \forall j, k, m. \quad (33)$$

### Алгоритм решения задачи Дирихле для уравнений (6)

1. Задаем начальные значения массива решения  $U$  и его производных, присутствующих в задаче. В случае нелинейных задач, имеющих множество решений, начальные значения нужно выбирать обоснованно.

2. Задаем количество узлов  $N, K, M$  и загружаем из базы данных (см. Замечание 2) аппроксимирующие матрицы и матрицы их спектральных разложений. В соответствии с (33) и теоремами о сходимости итераций (если такие имеются) задаем шаг  $\tau$  и невязку  $\varepsilon_S$ .

3. В соответствии с (27) – (29), (31) рассчитываем элементы массивов  $H(U)$  и  $G(U)$ .

4. По приведенным формулам вычисляем значения элементов массивов  $\widehat{V}$  и  $\widehat{U}$  (см. (32)) и считаем приближенные значения производных решения по формулам вида (14), (18), (21).

5. Если  $\|\widehat{U} - U\|/\|\widehat{U}\tau\| < \varepsilon_S$ , то  $\widehat{U}$  – решение, иначе задаем  $U = \widehat{U}$  и вернемся к шагу 3. Здесь  $\|\widehat{U}\|$  – максимальное значение элементов  $\widehat{U}$ .

Отметим, что доказательство сходимости такого процесса – отдельная задача для каждого нелинейного уравнения. Как правило, обоснованный выбор шага  $\tau$  позволяет не только добиться сходимости при решении нелинейных задач с малыми параметрами, но и уменьшить число итераций в десятки и даже сотни раз. Спектральный портрет аппроксимирующих матриц при этом играет ключевую роль [7]. Интересные соображения по этому поводу читатель может найти также в [8].

**Теорема 7.** *Положим для наглядности  $N = K = M$ . Описанный метод требует порядка  $p((2d + \sigma(d + 1))N^{d+1} + O(N^d))$  операций и  $s(3N^2 + N + \{\sigma(d + 1) + 5\}N^d + O(N^{d-1}))$  байт оперативной памяти, где  $d$  – размерность задачи,  $\sigma$  – коли-*

чество различных производных от неизвестной функции, присутствующих в уравнении (кратные производные считаются за одну),  $p$  – количество итераций метода установления,  $s$  – объем памяти в байтах, занимаемый одним действительным числом.

*Доказательство.* Поскольку арифметические операции, стоящие в правой части  $f(u, \mathbf{x})$ , в рамках данного метода «превращаются» в соответствующие операции с  $N^d$  элементами массива решения и его производных, то таких операций насчитывается  $O(N^d)$ . Основные затраты времени при вычислении  $H(U)$  состоят в операциях по расчету производных, каждая из которых эквивалентна умножению матрицы на вектор ( $d = 1$ ,  $N^2$  операций), матрицы на матрицу ( $d = 2$ ,  $N^3$  операций) и слоистого массива на 3D массив ( $d = 3$ ,  $N^4$  операций). Общее количество таких операций –  $\sigma N^{d+1}$ . Прочие затраты включают вычисление элементов  $G(U)$  по формулам (31) ( $dN^{d+1}$  операций), вычисление элементов  $\widehat{V}$  ( $O(N^d)$  операций), элементов  $\widehat{U}$  по формулам (32) ( $dN^{d+1}$  операций), добавочных массивов и их произведений на аппроксимирующие матрицы по формулам вида (21) ( $dN^{d+1} + O(N^d)$  операций для каждой производной в уравнении). Суммируя все затраты, получаем  $(2d + \sigma(d + 1))N^{d+1} + O(N^d)$  операций на каждой итерации.

В ходе расчетов в оперативной памяти должны храниться

1) аппроксимирующая матрица  $A$ , матрицы ее спектрального разложения  $R_{A(B,C)}$  и обратные к ним (в сумме 3 матрицы размера  $N \times N$  с учетом того обстоятельства, что при  $N = M = K$  имеем  $A = B = C$ );

2) диагональные матрицы  $D_{A(B,C)}$  (суммарным объемом  $N$  чисел);

3) массивы значений производных в выражениях правой части (всего таких производных  $\sigma - d$ ), массивы решения на текущем и предыдущем временных слоях, массив правой части и массивы  $\widehat{V}$ ,  $G$ , см. (31) (суммарный объем  $s(\sigma - d + 5)N^d$ );

4) добавочные массивы для неизвестной функции и ее производных, реализующие граничные условия (в сумме  $d(\sigma + 1)$  массивов);

5) прочие данные малого объема (параметры метода, коэффициенты уравнения).

Суммируя все затраты памяти, получаем выражение из условия теоремы.  $\square$

Отметим существенные преимущества разработанного метода перед КСМК, которую традиционно используют при реализации спектральных методов [9]. Такая схема приводит к системе линейных уравнений  $\widetilde{A}\vec{x} = \vec{b}$  с разреженной матрицей, где  $\vec{x}$ ,  $\vec{b}$  – векторы значений решения  $\widehat{u}(\mathbf{x})$  и значений  $u(\mathbf{x}) - \tau f(u, \mathbf{x})$  в узлах интерполяции размера  $NKM$  при  $d = 3$ . Ее решение требует  $O(N^{3d})$  операций при  $N = K = M$ . В соответствии с теоремой 7 предложенная схема построения и решения СЛАУ типа уравнений Сильвестра и их тензорных обобщений (см. рис. 1) позволяет снизить количество операций на 1, 3 и 5 порядков для  $d = 1, 2, 3$  соответственно.

#### 4. Тестовые численные эксперименты

Разработанный метод был реализован на языке Java с использованием современных концепций объектно-ориентированного анализа проектирования и программирования. Все расчеты проводились на ЭВМ Intel Core i5-3330 CPU 3.00 GHz, DIMM DDR3 1600 MHz 8 Gb. Рассмотрим тестовую задачу

$$d^2u/dx^2 = u^2e^{-x}, \quad u(-1) = e^{-1}, \quad u(1) = e. \quad (34)$$

Ее точное решение – целая функция  $u_{ex}(x) = e^x$ . С помощью описанного метода найдены приближенные значения решения  $u_j$  в узлах интерполяции  $x_j, j = 1, \dots, N$ . Пусть

$$u_{ex,j} = u_{ex}(x_j), \quad \varepsilon_{spec} = \mathcal{M}^{-1} \max_{j=1, \dots, N} |u_{ex,j} - u_j|, \quad \mathcal{M} = \max_{j=1, \dots, N} u_{ex,j}. \quad (35)$$

На рис. 2 а изображена зависимость  $\log_{10} \varepsilon_{spec}$  от количества узлов коллокации  $N$ . Из графика видно, что порядок аппроксимации решения является переменным, он стремительно растет с ростом  $N$ . Пунктирной линией показана зависимость логарифма правой части оценки (5) от  $N$ . Отметим, что сплошная и пунктирная линии имеют одинаковый угол наклона и выпуклость, что свидетельствует о том, что асимптотика погрешности построенного метода с высокой точностью совпадает с асимптотикой полиномиального приближения функции  $u_{ex}$ , т.е. свойство ненасыщаемости использованного приближения переносится на разработанный метод. Более подробно эта тема обсуждается ниже.

Для сравнения решение задачи (34) найдено с помощью метода конечных разностей (МКР) с использованием трехточечной аппроксимации второй производной и метода прогонки. Пусть по условию задачи **требуется найти решение с точностью до шести значащих цифр (не менее)**. Для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-6}$  (см. рис. 2 б) МКР требуется построить сетку из  $N = 197$  узлов, в то время как разработанному методу достаточно  $N = 6$  узлов. Данное обстоятельство, наблюдаемое также в 2D и 3D задачах, определяет существенные преимущества разработанного алгоритма над МКР в случае задач с решениями высокой гладкости.

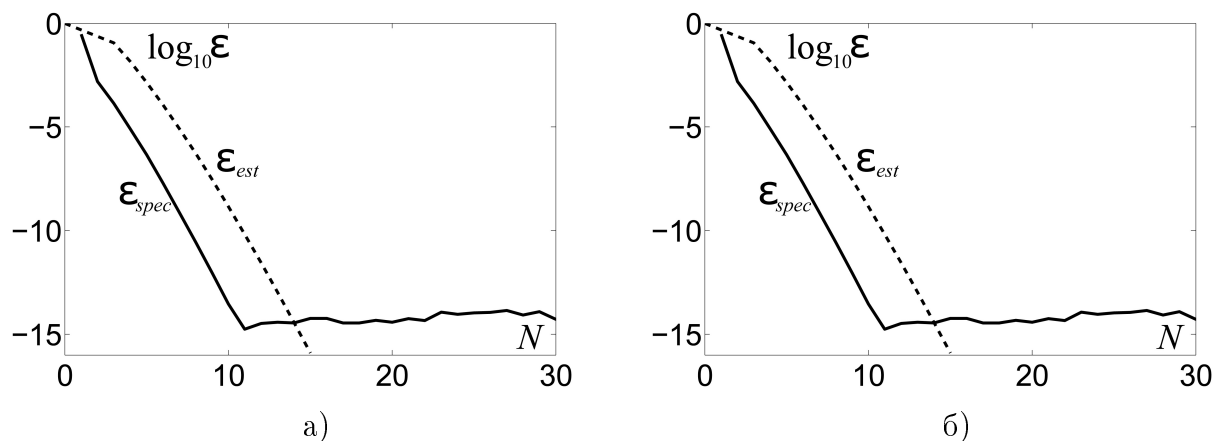


Рис. 2. Зависимость погрешности численных решений (34) от  $N$  в логарифмической шкале: а) погрешность  $\varepsilon_{spec}$ ; б) сравнение погрешностей МКР  $\varepsilon_{diff}$  и НМБН  $\varepsilon_{spec}$

В заключении раздела исследуем численно вопрос о насыщаемости разработанного метода. С этой целью рассмотрим ряд тестовых задач, имеющих различные порядки гладкости решений: одномерные нелинейные задачи

$$\begin{cases} u'' = \frac{2u^3}{x^6}, & \begin{cases} v'' = 6\sqrt[3]{|u|}, \\ v(\pm 1) = 1, \end{cases} & \begin{cases} w'' = 12x\sqrt[4]{|u|}, \\ w(\pm 1) = \pm 1 \end{cases} \end{cases} \quad (36)$$

с соответствующими решениями

$$u(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-1, 0], \\ x^2, & x \in (0, 1], \end{cases} \quad v(x) = \begin{cases} -x^3, & x \in [-1, 0], \\ x^3, & x \in (0, 1], \end{cases} \quad w(x) = \begin{cases} -x^4, & x \in [-1, 0], \\ x^4, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Отметим, что  $u, v, w$  являются 1, 2 и 3 раза непрерывно дифференцируемыми функциями соответственно. Кроме того,  $u' = v'' = w''' = |x|$ , модуль непрерывности  $\omega(|x|; q) = q$ . Поэтому в оценке (1)  $\omega(u'; \frac{1}{n}) = \omega(v''; \frac{1}{n}) = \omega(w'''; \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$  и в (3) для этих функций  $\alpha = 1$ . Значит, порядки аппроксимации их наилучших полиномиальных приближений есть 2, 3 и 4 соответственно.

В дополнение к одномерным задачам (36) рассмотрим еще двумерную и трехмерную нелинейные задачи

$$\begin{cases} U_{xx} + U_{yy} = 12xy(x^2 + y^2)\sqrt[4]{|U|}, \\ U(\pm 1, y) = \pm \operatorname{sgn}(y)y^4, \\ U(x, \pm 1) = \pm \operatorname{sgn}(x)x^4, \end{cases} \quad \begin{cases} V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 12z \operatorname{sgn}(xy)(x^2 + y^2)\sqrt[2]{|V|} + \frac{2V}{z^2}, \\ V(\pm 1, y, z) = \pm \operatorname{sgn}(yz)y^4z^2, \\ V(x, \pm 1, z) = \pm \operatorname{sgn}(xz)x^4z^2, \\ V(x, y, \pm 1) = \pm \operatorname{sgn}(xy)x^4y^4 \end{cases} \quad (37)$$

с решениями

$$U(x, y) = \begin{cases} -x^4, & x \in [-1, 0] \\ x^4, & x \in (0, 1] \end{cases} \times \begin{cases} -y^4, & y \in [-1, 0] \\ y^4, & y \in (0, 1] \end{cases}$$

$$V(x, y, z) = U(x, y) \times \begin{cases} -z^2, & z \in [-1, 0] \\ z^2, & z \in (0, 1]. \end{cases}$$

Функции  $U, V$  являются 3 и 1 раз непрерывно дифференцируемыми. Обобщения оценок (1) – (3) [1, с. 159–166] для наилучшего приближения  $U, V$  прямыми произведениями полиномов гарантируют порядки не ниже третьего и первого соответственно.

Задачи (36), (37) решены численно с помощью разработанного метода, найдены относительные погрешности решений по формулам вида (35) и порядки аппроксимации. Для этого сделаны расчеты на последовательности сеток с двукратным увеличением числа узлов  $N = (K = M) = 4, 8, 16, \dots, 128$ . Пусть  $\varepsilon_{spec}^N(u)$  – относительная погрешность численного решения  $u$  на  $N$  узлах. Порядок аппроксимации алгоритма на  $N$  узлах найдем по формуле

$$R_N(u) = \log_2(\varepsilon_{spec}^{N/2} / \varepsilon_{spec}^N), \quad N = 8, 16, \dots, 128.$$

В табл. 1 приведены значения погрешностей  $\varepsilon_{spec}^N$ , в табл. 2 – значения порядков  $R_N$  для пяти рассмотренных задач. Из приведенных данных видно строгое соответствие полученных порядков оценкам точности наилучших полиномиальных приближений. Этот факт свидетельствует об отсутствии насыщения предложенного алгоритма на основе метода коллокаций в рассмотренных нелинейных задачах.

Таблица 1

Погрешности численных решений

$N$	$\varepsilon_{spec}(u)$	$\varepsilon_{spec}(v)$	$\varepsilon_{spec}(w)$	$\varepsilon_{spec}(U)$	$\varepsilon_{spec}(V)$
4	6,686E-03	1,731E-02	4,745E-03	2,945E-03	6,100E-04
8	2,473E-03	1,901E-03	3,33E-04	1,63E-04	2,895E-04
16	5,372E-04	2,323E-04	1,893E-05	9,403E-06	1,294E-04
32	1,282E-04	2,89E-05	1,179E-06	7,803E-07	6,297E-05
64	3,165E-05	3,608E-06	7,365E-08	5,754E-08	2,559E-05
128	7,888E-06	4,509E-07	4,602E-09	3,993E-09	—

Таблица 2

Порядки аппроксимации метода

$N$	$R_N(u)$	$R_N(v)$	$R_N(w)$	$R_N(U)$	$R_N(V)$
8	1,4349	3,1867	3,8329	4,1753	1,0753
16	2,2026	3,0323	4,1369	4,1158	1,1617
32	2,0674	3,0071	4,0044	3,591	1,0391
64	2,0178	3,0017	4,0012	3,7614	1,299
128	2,0045	3,0004	4,0003	3,8491	—
Среднее	1,9454	3,0456	3,9951	3,8985	1,1438

## Заключение

В заключение отметим, что каждая нелинейная проблема уникальна и требует отдельного анализа количества ее решений, их свойств и сходимости метода установления к тому или иному решению. Помимо решений с различным порядком гладкости, могут встречаться решения с существенными особенностями в комплексной плоскости (см. теорему 3). Этот случай здесь подробно не обсуждался в силу ограничений по объему статьи. Исследование устойчивости стационарного решения регуляризованного уравнения, сходимости метода установления и, конечно же, насыщенности метода должно проводиться отдельно для каждой задачи. Тем не менее косвенное обоснование ненасыщенности, приведенное выше, говорит о принципиальной возможности реализовать свойства наилучших полиномиальных приближений при решении сложных прикладных задач предложенным методом. Реализация таких свойств в рамках разработанного алгоритма, в свою очередь, обеспечивает минимизацию вычислительных затрат при сохранении необходимой точности решения и существенные преимущества над традиционными схемами МКР и КСМК.

*Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-10135).*

## Литература

1. Бабенко, К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
2. Бабенко, К.И. О явлении насыщения в численном анализе / К.И. Бабенко // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 241, № 3. – С. 505–508.

3. Семисалов, Б.В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения / Б.В. Семисалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1110–1135.
4. Trefethen, L.N. Approximation Theory and Approximation Practice / L.N. Trefethen. – Philadelphia: SIAM, 2013.
5. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977.
6. Blokhin, A.M. Numerical Method for 2D Simulation of a Silicon MESFET with a Hydrodynamical Model Based on the Maximum Entropy Principle / A.M. Blokhin, A.S. Ibragimova // SIAM Journal Scientific Computing. – 2009. – V. 31, № 3. – P. 2015–2046.
7. Белов, А.А. Эволюционная факторизация и сверхбыстрый счет на установление / А.А. Белов, Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 9. – С. 47–64.
8. Белых, В.Н. Особенности реализации ненасыщаемого численного метода для внешней осесимметричной задачи Неймана / В.Н. Белых // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 1237–1249.
9. Boyd, J. Chebyshev and Fourier Spectral Methods / J. Boyd. – Mineola; N.Y.: University of Michigan, 2000.

Борис Владимирович Семисалов, кандидат физико-математических наук, Институт вычислительных технологий СО РАН; Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск, Российская Федерация), ViBiS@ngs.ru.

*Поступила в редакцию 15 ноября 2017 г.*

MSC 65N35, 35J60

DOI: 10.14529/mmp180210

## DEVELOPMENT AND ANALYSIS OF THE FAST PSEUDO SPECTRAL METHOD FOR SOLVING NONLINEAR DIRICHLET PROBLEMS

*B. V. Semisalov*, Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk; Russian Federation, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, ViBiS@ngs.ru

Numerical method for solving one-, two- and three-dimensional Dirichlet problems for the nonlinear elliptic equations has been designed. The method is based on the application of Chebyshev approximations without saturation and on a new way of forming and solving the systems of linear equations after discretization of the original differential problem. Wherein the differential operators are approximated by means of matrices and the equation itself is approximated by the Sylvester equation (2D case) or by its tensor generalization (3D case). While solving test problems with the solutions of different regularity we have shown a rigid correspondence between the rate of convergence of the proposed method and the order of smoothness (or regularity) of the sought-for function. The observed rates of convergence strictly correspond to the error estimates of the best polynomial approximations and show the absence of saturation of the designed algorithm. This results in the essential reduction of memory costs and number of operations for cases of the problems with solutions of a high order of smoothness.

*Keywords: Chebyshev approximation; boundary-value problem; nonlocal method without saturation; stabilization method.*

**Acknowledgements.** *This research was done under the financial support of Russian Science Foundation (project No. 17-71-10135).*

## References

1. Babenko K.I. *Osnovy chislennogo analiza* [Fundamentals of Numerical Analysis]. Moscow, Nauka, 1986. 714 p.
2. Babenko K.I. [On the Saturation Phenomenon in Numerical Analysis]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Doklady Mathematics], 1978, vol. 241, no. 3, pp. 505–508. (in Russian)
3. Semisalov B.V. Non-Local Algorithm of Finding Solution to the Poisson Equation and Its Applications. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 7, pp. 1110–1135. (in Russian)
4. Trefethen L.N. *Approximation Theory and Approximation Practice*. Philadelphia, SIAM, 2013.
5. Dzyadyk V.K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizhenija funkcij polinomami* [Introduction to the Theory of Uniform Approximation by Polynomials]. Moscow, Nauka, 1977.
6. Blokhin A.M., Ibragimova A.S. Numerical Method for 2D Simulation of a Silicon MESFET with a Hydrodynamical Model Based on the Maximum Entropy Principle. *SIAM Journal Scientific Computing*, 2009, vol. 31, no. 3, pp. 2015–2046. DOI: 10.1137/070706537
7. Belov A.A., Kalitkin N.N. Evolutionary Factorization and Superfast Relaxation Count. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 9, pp. 47–64. (in Russian)
8. Belykh V.N. Particular Features of Implementation of an Unsaturated Numerical Method for the Exterior Axisymmetric Neumann Problem. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 984–993. DOI: 10.1134/S0037446613060037
9. Boyd J. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Mineola, N.Y., University of Michigan, 2000.

*Received November 15, 2017*