УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp190207**

ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ ПО ИСКАЖЕННЫМ ДАННЫМ

М.А. Сагадеева, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

Теория оптимальных динамических измерений базируется на минимизации разности значений виртуального наблюдения, т.е. полученного с помощью расчетной модели, и экспериментальных данных, которые обычно искажены некоторыми помехами. В статье приведено описание математической модели оптимального динамического измерения при наличии помех разного вида. Кроме того, в статье предлагается алгоритм построения значений наблюдения по значениям, полученным в ходе эксперимента, которые предполагаются искаженными некоторыми случайными воздействиями. Предполагается, что на экспериментальные данные воздействует «белый шум», который понимается как производная Нельсона – Гликлиха от винеровского процесса. Для построения значений наблюдения используется априорная информация о форме функции, описывающей значения наблюдения. Сама процедура построения наблюдения состоит из двух этапов. На первом этапе формулируется критерий определения положения экстремальной точки сигнала с использованием статистики специального вида. А на втором этапе описывается процедура построения значений сигнала на основе информации о положении точки экстремума и форме выпуклости сигнала.

Ключевые слова: винеровский процесс; броуновское движение; производная Нельсона – Гликлиха; статистическая гипотеза.

К 60-летию со дня рождения выдающегося математика Яцека Банасяка.

Введение

При решении построении значений детерминированного наблюдения по экспериментальным данным используются различные математические методы, основанные на применении различных методов фильтрации, так как экспериментальные данные искажены случайными помехами. Задачи нахождения значений наблюдения по экспериментальным данным возникают при решении различных задач (см., например, [1,2]). Эта задача является предварительным этапом при решении задач динамических измерений. В теории динамических измерений актуальной проблемой является задача восстановления измерения по наблюдению. Традиционным подходом [3] к решению данной задачи служит подход, основанный на теории обратных задач [4–6]. Другим, не менее традиционным подходом [1], является подход, основанный на теории автоматического управления [7–10]. Между тем в последнее время возник [11] и активно развивается [12, 13] подход, основанный на теории оптимального управления решениями уравнений леонтьевского типа [14]. В основе этого подхода лежит поиск оптимума функционала штрафа от нормы разности реального (т. е. зафиксированного на измерительном приборе) и виртуального (т. е. найденного посредством вычислительного алгоритма) наблюдений. Найденный таким образом оптимум объявляется *оптимальным динамическим измерением.* К настоящему времени в рамках теории оптимальных динамических измерений исследованы случаи, когда измерение искажено инерционностью измерительного устройства [15], резонансами в его цепях [16] или его деградацией [17]. В настоящей статье рассматривается случай, когда измерение искажено всеми тремя помехами одновременно.

Более того, изучается случай, когда наблюдение искажено белым шумом, под которым понимается производная броуновского движения в теории Эйнштейна [18]. Признанной моделью броуновского движения считается винеровский процесс вида

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin \frac{\pi}{2}(2k+1)t, \tag{1}$$

где ξ_k – попарно некоррелированные гауссовы случайные величины, чьи математические ожидания $\mathbf{E}\xi_k = 0$ и дисперсии $\mathbf{D}\xi_k = [\frac{\pi}{2}(2k+1)]^{-2}$. Верификационная ценность модели (1) подтверждена хорошим совпадением ее свойств с предсказаниями теории броуновского движения [18] Эйнштейна. Траектории стохастического процесса $\beta = \beta(t)$ вида (1) п.н. (почти наверное) непрерывны на $\mathfrak{I} \subset \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, однако они недифференцируемы (в «обычном» смысле) ни в одной точке этого промежутка. Обобщение производной в смысле Ито – Стратоновича – Скорохода, хоть и привело к созданию теории диффузионных процессов [19], однако, получающийся в результате белый шум плохо согласуется с предсказаниями теории Эйнштейна. Другой подход [20, 21] заключается в переносе процесса (1) в пространства Шварца и понимании его производной в обобщенном смысле. К сожалению, сравнение свойств получившегося при этом подходе белого шума с предсказаниями теории Эйнштейна не проводилось. Наконец, третий подход основан на концепции производной Нельсона – Гликлиха, под которой понимается симметрическая производная в среднем [22–24]. Ранее уже было отмечено [25], что производная Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\beta} = \overset{\circ}{\beta}(t)$ винеровского процесса (1) хорошо согласуется с предсказаниями теории Эйнштейна, поэтому стохастический процесс $\overset{\circ}{\beta}$ был назван «белым шумом». Далее в этой статье будут приведены новые аргументы в пользу согласования свойств «белого шума» с предсказаниями теории Эйнштейна. Кроме того, отметим, что концепция «белого шума» весьма успешно перенесена в бесконечномерные пространства [26–31]. И это во время успешного развития традиционной концепции белого шума [32–34].

Для одномерного наблюдения с известными промежутками монотонности и характере его выпуклости в работе [35] предлагается алгоритм построения значений сигнала, как решение задачи минимизации с использованием динамического программирования. А именно, в этой работе экспериментальные данные рассматриваются как вектор $\xi \in \mathbb{R}^N$, координаты ξ_j которого есть измерения в моменты времени t_j. Наблюдения представлены в виде $\xi = f + \nu$, $\nu \in N(0, \sigma^2 \mathbb{I}_N)$, где полезная часть сигнала $f \in \mathbb{R}^N$ – это вектор значений функции определенного класса выпуклости и монотонности, а шумовая составляющая сигнала ν – это некоррелированный нормально распределенный вектор. В работе на основе предположения о форме полезного сигнала предлагается алгоритм восстановления его значений, а также на основе методов, описанных в [2], сформулирован критерий проверки гипотезы о положении особых точек. Отметим, что методами, описанными в [35], можно восстанавливать значения сигнала, возмущенного стационарным процессом, т.е. процессом с постоянными характеристиками.

Статья кроме введения, заключения и списка литературы содержит три части. В первой части приведена постановка задачи оптимального динамического измерения при наличии инерционности, резонансов и деградации измерительного устройства. Во второй части описана производная Нельсона – Гликлиха и рассмотрены ее свойства для винеровского процесса. В третьей части описан алгоритм построения значений наблюдения по экспериментальным данным, искаженным «белым шумом».

1. Математическая модель Шестакова – Свиридюка с учетом инерционности, резонансов и деградации измерительного устройства

Как уже было отмечено, задача восстановления значений измеряемого сигнала является одной их наиболее значимых проблем в теории динамических измерений. А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком для решения этой задачи было предложено использовать методы теории оптимального управления, а полученную задачу называть *задачей оптимального динамического измерения*. Полученная *математическая модель Шестакова–Свиридюка* позволила начать численные исследования задачи оптимального динамического измерения [15], опираясь на результаты о численных решениях задачи Коши для систем леонтьевского типа [14, 36]. Таким образом, теория оптимального динамического измерения [12, 13] находится на пересечении нескольких научных теорий: теории динамических измерений [1, 7], теории оптимального управления для систем леонтьевского типа [14, 36] и теории уравнений соболевского типа [26–29].

Пусть $\aleph = \{x \in L_2((0,T);\mathbb{R}^d) : \dot{x} \in L_2((0,T);\mathbb{R}^d)\}$ – *пространство состояний*, $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0,T);\mathbb{R}^n) : u^{p+1} \in L_2((0,T);\mathbb{R}^n)\}$ – *пространство измерений* и $\mathfrak{Y} = N[\aleph]$ – *пространство наблюдений* при некотором фиксированном $T \in \mathbb{R}_+$. Выделим в $\mathfrak{U}$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ – *множество допустимых измерений*. Основой теории оптимального динамического измерения в нестационарном случае является представление модели измерительного устройства (ИУ) с помощью нестационарной системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Bu(t), \quad \ker L = 0, \tag{2}$$

$$y(t) = Nx(t), \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ – вектор-функция состояния ИУ, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_d)$ – вектор-функция скорости изменения состояния ИУ; d – размерность вектор-функции состояния ИУ. Квадратные матрицы L и M порядка d, (причем матрица L может быть вырождена), описывают взаимовлияние состояния ИУ и скоростей изменения этих состояний, при этом скалярная функция $a : (0,T) \to \mathbb{R}_+$ отвечает изменению во времени параметров системы этих взаимовлияний. Матрицы B и N – прямоугольные матрицы размеров $d \times n$ и $m \times d$ соответственно, характеризуют взаимовлияние параметров измерения и связь между состоянием системы соответственно. Отметим, что такие системы также называют дескрипторными (см., например, [37]). Систему (2), (3) для получения математической модели измерительного устройства дополняют начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$[R^L_\alpha(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0, \tag{4}$$

где $R^L_\alpha(M) = (\alpha L - M)^{-1}L$ при условии, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$, а p – это порядок полюса в ∞ для функции $(\mu L - M)^{-1}$. Требуется найти *оптимальное измерение*

$v \in \mathfrak{U}_\partial$ почти всюду на $(0,T)$, удовлетворяющее задаче (2) – (4) и минимизирующее значение *функционала штрафа* вида

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^T \left\| Sz^{(q)}(u,t) + S\overline{z}_e^{(q)}(t) - Sz_e^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \sum_{q=0}^{k} \int_0^T \langle F_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \rangle dt, \qquad (5)$$

где $0 \le k \le p+1$, $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ соответственно; составной вектор $z = \mathrm{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_d, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – моделируемые состояние системы и наблюдение, получаемые в ходе вычислительного эксперимента, а составной вектор $z_e(t) = \mathrm{col}\,(x_{e1}(t), x_{e2}(t), \ldots, x_{ed}(t), y_{e1}(t), \ \ y_{e2}(t), \ldots, y_{em}(t))$ – наблюдаемые состояние системы и наблюдение, получаемые в ходе натурного эксперимента, $Sz_e(t)$ – те наблюдаемые величины, по которым проводится восстановления динамически искаженного сигнала; $\overline{z}_e(t)$ – наблюдаемые состояние системы и наблюдение, получаемые в ходе натурного эксперимента при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов, $S\overline{z}_e(t)$ – те наблюдаемые величины (при нулевых значениях полезных измеряемых сигналов), по которым проводится восстановления динамически искаженного сигнала; $Sz(t)$ – те моделируемые величины, по которым проводится восстановления динамически искаженного сигнала; $n = d+m$ – число параметров состояний системы; $u : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, F_q – положительно определенные матрицы порядка n, отвечающие фильтрации сигнала.

В функционале штрафа (5) первое слагаемое отвечает за инерционность ИУ, с помощью второго слагаемого фильтруются резонансы в цепях ИУ, а деградация ИУ описывается с помощью функции $a(t)$ в уравнении (2). В данной статье рассматривается случай, когда в модели присутствуют все три вида помех. Такое описание модели, например, соответствует измерениям, которые проводятся прибором на околоземной орбите. А именно, при измерении тяги позиционирующих устройств аппарата ИУ находится в невесомости под воздействием экстремальных температур и жесткого радиационного излучения, которые могут стать источником помех указанного вида.

Пусть L и M — квадратные матрицы порядка d, $\det L = 0$. Следуя [26–29], будем называть множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) \ne 0\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* матрицы M. Нетрудно показать, что либо $\rho^L(M) = \emptyset$, либо L-спектр матрицы M состоит из конечного множества точек [26–29]. Кроме того, множества $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ не изменяются при переходе к другим базисам.

Матрица M называется *L-регулярной*, если $\rho^L(M) \ne \emptyset$ и *(L,p)-регулярной*, при p равном порядку полюса в ∞ для функции $(\mu L - M)^{-1}$, если бесконечность является устранимой особой точкой L-резольвенты матрицы M, то $p = 0$. Для квадратных матриц параметр p не может превосходить размерности пространства d.

Теорема 1. [17] *Пусть матрица M (L,p)-регулярна ($p = \overline{0,d}$) и $\det M \ne 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathfrak{U}$ и $a \in C^{p+1}([0,T];\mathbb{R}_+)$, существует единственное решение $x \in \aleph$ задачи Шоуолтера – Сидорова (4) для (2), которое к тому же имеет вид*

$$x(u,t) = \lim_{k\to\infty} \left[\left(\left(L - \frac{1}{k} M \int_0^t a(\zeta) d\zeta \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right.$$

$$+\int\limits_0^t\left(\left(\left(L-\frac{1}{k}M\int\limits_s^t a(\zeta)d\zeta\right)^{-1}L\right)^k\left(L-\frac{1}{k}M\right)^{-1}\left(kL_k^L(M)\right)^p Bu(s)ds+\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}\left(\mathbb{I}_d-\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1}\right)L\right)^q M^{-1}\left(\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1}-\mathbb{I}_d\right)\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^q\frac{Bu(t)}{a(t)}\right].$$

Здесь $L_k^L(M)=L(kL-M)^{-1}$, а выражение $\left(\dfrac{1}{a(t)}\dfrac{d}{dt}\right)^q$ в последнем слагаемом означает последовательное применение q раз данного оператора.

Замечание 1. Условие $\det M\neq 0$ в теореме 1 не снижает общности рассматриваемой задачи. Действительно, при условии (L,p)–регулярности матрицы M в результате замены $x=e^{\lambda t}r$ перейдем к уравнению $L\dot{r}=(M-\lambda L)r+Bu$ того же вида, что и первое уравнение системы (2), но с $\det(M-\lambda L)\neq 0$.

Определение 1. Функцию $v\in\mathfrak{U}_\partial$, которая является решением задачи

$$J(v)=\min_{u\in\mathfrak{U}_\partial}J(u) \tag{6}$$

с функционалом $J(u)$ имеющим вид (5) при условии, что пары $(u,x(u,t))\in\mathfrak{U}_\partial\times\aleph$ и $(v,x(v,t))\in\mathfrak{U}_\partial\times\aleph$ удовлетворяют системе (2), (3) с начальным условием (4), будем называть *решением задачи оптимального динамического измерения* (2) – (6).

Теорема 2. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна* ($p=\overline{0,d}$) *и* $\det M\neq 0$. *Тогда при любых $x_0\in\mathbb{R}^d$, $z_e,\overline{z}_e\in(\aleph,\mathfrak{Y})$ и $a\in C^{p+1}([0,T];\mathbb{R}_+)$, существует единственное решение $v\in\mathfrak{U}_\partial$ задачи оптимального динамического измерения* (2) – (6).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы из [17] и поэтому не приводится.

2. Производная Нельсона – Гликлиха

Пусть $\Omega\equiv(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ называется *случайной величиной.* Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образует гильбертово пространство со скалярным произведением $(\xi_1,\xi_2)=\mathbf{E}\xi_1\xi_2$. Это гильбертово пространство мы обозначим символом $\mathbf{L}_2$. В дальнейшем будут очень важны те случайные величины $\xi\in\mathbf{L}_2$, которые имеют нормальное (гауссово) распределение; их мы назовем *гауссовыми величинами* и этот факт будем обозначать $\xi\sim N(0,\sigma^2)$, где $\mathbf{E}\xi=0$ и $\mathbf{D}\xi=\sigma^2$.

Пусть далее $\mathfrak{I}\subset\mathbb{R}$ – некоторый промежуток. Отображение $\eta:\mathfrak{I}\times\Omega\to\mathbb{R}$ будем называть (*одномерным*) *стохастическим процессом.* Значение стохастического процесса $\eta=\eta(t,\cdot)$ при каждом фиксированном $t\in\mathfrak{I}$ является случайной величиной, т. е. $\eta(t,\cdot)\in\mathbf{L}_2$, которую мы будем называть *сечением стохастического процесса*, а значение стохастического процесса $\eta=\eta(\cdot,\omega)$ при каждом фиксированном $\omega\in\Omega$ называется (*выборочной*) *траекторией.* Стохастический процесс η назовем *непрерывным,* если п. н. все его траектории непрерывны (т. е. при почти всех (п.в.) $\omega\in\Omega$ траектории $\eta(\cdot,\omega)$ непрерывны). Непрерывный стохастический процесс, чьи (независимые) сечения гауссовы, называется *гауссовым.*

Важнейшим примером непрерывного гауссова стохастического процесса служит (одномерный) винеровский процесс $\beta=\beta(t)$, представленный формулой (1). Этот стохастический процесс обладает следующими свойствами:

(W1) п.н. $\beta(0) = 0$, п.н. все его траектории $\beta(t)$ непрерывны, и при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ случайная величина $\beta(t)$ гауссова;

(W2) автокорреляционная функция $\mathbf{E}\left((\beta(t) - \beta(s))^2\right) = |t - s|$ и математическое ожидание $\mathbf{E}(\beta(t)) = 0$ при всех $s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(W3) траектории $\beta(t)$ недифференцируемы в любой точке $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом сколь угодно малом промежутке имеют неограниченную вариацию.

Теорема 3. [23] *С вероятностью* 1 *существует единственный стохастический процесс* β, *удовлетворяющий свойствам* (W1), (W2), *причем его можно представить в виде* (1).

Свойство 1. *Распределение сечений стохастического процесса* β. Сечения винеровского процесса $\beta(t)$ являются нормально распределенными случайными величинами с $\mathbf{E}\beta(t)$=0 и $\mathbf{D}\beta(t) = \sigma^2 t$ при некотором $\sigma > 0$, т.е. $\beta(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$. Среднеквадратическое отклонение этого процесса соответственно равно $\sigma\sqrt{t}$. Подобное поведение броуновского движения отмечается еще в работах А. Эйнштейна (см. например, [18]). А именно, там показано, что среднее значение смещения центра тяжести частицы пропорционально $\sqrt{t}$.

Теперь фиксируем произвольный стохастический процесс $\eta = \eta(t)$ и значение параметра $t \in \mathfrak{I}(= (\varepsilon, \tau) \subset \mathbb{R})$, а через $\mathcal{N}_t^\eta$ обозначим σ-алгебру, порожденную случайной величиной $\eta(t)$. Обозначим через $\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot|\mathcal{N}_t^\eta)$ условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{N}_t^\eta$.

Определение 2. Пусть η - непрерывный стохастический процесс, тогда *производной Нельсона – Гликлиха* $\overset{\circ}{\eta}$ *стохастического процесса* η *в точке* $t \in (\varepsilon, \tau)$ называется случайная величина

$$\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\triangle t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta \left(\frac{\eta(t+\triangle t,\cdot) - \eta(t,\cdot)}{\triangle t}\right) + \lim_{\triangle t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta \left(\frac{\eta(t,\cdot) - \eta(t-\triangle t,\cdot)}{\triangle t}\right)\right),$$

если эти пределы существуют. Стохастический процесс η называется *дифференцируемым в смысле Нельсона – Гликлиха на* (ε, τ), если в каждой точке $t \in (\varepsilon, \tau)$ существует производная Нельсона – Гликлиха.

Заметим, что если траектории случайного процесса η п.н. непрерывно дифференцируемы в «обычном» смысле на (ε, τ), то их производная Нельсона – Гликлиха совпадает с «обычной» производной. Так например, обстоит дело со стохастическим процессом $\eta = \alpha \sin(\nu t)$, где α – гауссова случайная величина, $\nu \in \mathbb{R}_+$ – некоторая фиксированная константа, а $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. [23] *Пусть* β *– винеровский процесс* (1), *тогда* $\overset{\circ}{\beta}(t) = \dfrac{\beta(t)}{2t}$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Производные Нельсона – Гликлиха более высокого порядка для стохастических процессов можно найти в работах [26–31, 38].

Свойство 2. *Распределение сечений стохастического процесса* $\overset{\circ}{\beta}$. В силу свойства 1 сечения винеровского процесса являются случайными величинами $\beta(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$, тогда по теореме 4 производная Нельсона – Гликлиха этого процесса $\overset{\circ}{\beta}(t) = \dfrac{\beta(t)}{2t}$. Это стохастический процесс, сечения которого являются нормально распределенными случайными величинами, причем

$$\mathbf{E}\left(\overset{\circ}{\beta}(t)\right) = \frac{1}{2t}\mathbf{E}\beta(t) = 0, \quad \mathbf{D}\left(\overset{\circ}{\beta}(t)\right) = \mathbf{D}\left(\frac{\beta(t)}{2t}\right) = \frac{1}{4t^2}\mathbf{D}\beta(t) = \frac{\sigma^2}{4t},$$

т.е. $\overset{\circ}{\beta}(t) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{4t})$. Среднеквадратическое отклонение этого процесса равно $\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}$ и процесс неопределен в начальный момент времени. В работе А. Эйнштейна [18] также отмечается, что скорость среднего смещения центра тяжести частицы пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{t}}$ и, соответственно, не может быть определена в начальный момент времени. Именно этот факт позволяет нам утверждать, что производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса более адекватна теории Эйнштейна.

Итак, свойство 1 позволяет стохастический процесс β вида (1) называть *броуновским движением*, а свойство 2 позволяет производную Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\beta}$ броуновского движения β из (1) называть *«белым шумом»*.

3. Алгоритм построения значений наблюдения по данным, искаженным «белым шумом»

Опишем модификацию алгоритма для построения значений одномерного сигнала, искаженного «белым шумом» при условии, что форма сигнала выпукла вверх и имеет единственную точку максимума. Пусть измерения некоторой величины проводились через равные промежутки в моменты времени $\{t_j\}_{j=0}^N$, в результате чего получены значения $\eta(t_j)$. Пусть о полезной части сигнала известна априорная информация о наличии экстремума и характере выпуклости, однако, из-за наличия помех зарегистрированные значения $\{\eta(t_j)\}_{j=0}^N$ не принадлежат функции с такими свойствами. Будем считать, что сигнал представим в виде

$$\eta(t) = y_e(t) + \overset{\circ}{w}(t),$$

где $y_e(t)$ – полезная часть сигнала, а $\overset{\circ}{w}(t)$ – часть вносящая помехи в измерения – «белый шум», сечения которого в силу свойства 2 имеют распределение $\overset{\circ}{w}(t) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{4t})$. Дополнительно предположим, что полезная часть сигнала описывается гладкой выпуклой вверх функцией с единственным максимумом. Сначала опишем статистический критерий определения положения точки экстремума, а затем алгоритм построения полезной части сигнала при известной информации о его виде.

3.1. Статистический критерий определения положения точки экстремума. На равномерной сетке $\{t_j\}_{j=0}^N$ класс функций выпуклых вверх функций с единственным максимумом в точке t_i обозначим через

$$V_i = \left\{ f \in C[t_0, t_N] : \begin{array}{ll} 2f(t_j) \geq f(t_{j-1}) + f(t_{j+1}), & j = \overline{1, N-1}, \\ f(t_j) \leq f(t_{j+1}), & j = \overline{0, i-1}, \\ f(t_j) \geq f(t_{j+1}), & j = \overline{i, N-1}. \end{array} \right\}. \qquad (7)$$

Пусть в точке i_0 равномерной сетки полезная составляющая часть сигнала $y_e(t)$ имеет максимум, т. е. $y_e \in V_{i_0}$. Нашей целью является оценка параметра i_0 по зарегистрированным значениям $\{\eta(t_i)\}_{i=0}^N$.

Пусть форма полезного сигнала зависит от параметра $i \in I$, и требуется по измеренному сигналу

$$\eta(t) = y_e(t) + \overset{\circ}{w}(t), \quad y_e \in V_{i_0}, \quad \overset{\circ}{w}(t) \sim N(0, \tfrac{\sigma^2}{4t}) \tag{8}$$

с заданной вероятностью γ оценить параметр i_0, а также погрешность данной оценки $\triangle i_0$. Для оценки параметра i_0 будем применять результаты [35], для этого преобразуем (8) к виду

$$\zeta(t) = g(t) + \nu(t), \quad g \in V_{\widetilde{i}}, \quad \nu(t) \sim N(0, \tfrac{\sigma^2}{4}), \tag{9}$$

где $\zeta(t) = \eta(t)\sqrt{t}$, $g(t) = y_e(t)\sqrt{t}$, $\nu(t) = \overset{\circ}{w}(t)\sqrt{t}$. Применим статистику

$$\tau_i(\zeta) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{N}(\zeta(t_j) - P_i\zeta(t_j))^2}{\sum\limits_{j=0}^{N}(\overline{\zeta} - P_i\zeta(t_j))^2}, \tag{10}$$

где $\overline{\zeta} = \frac{1}{N+1}\sum\limits_{j=0}^{N}\zeta(t_j)$, а $P_i\zeta$ – проекция ζ на множество V_i, существование которой показано в [35], а ее построение описано ниже. Тогда значение статистики (10) может быть использовано для принятия решения о значении параметра $\widetilde{i}$, при котором сигнал ζ наиболее близок по форме с $g(t)$. Как показано в [35], проверка сходства сигнала ζ с функцией g сводится к проверке статистической гипотезы о параметрах нормального распределения сечений процесса $\zeta(t)$. Если гипотеза вида

$$H(i): \quad \zeta(t) \sim N(g(t), \tfrac{\sigma^2}{4}), \quad g \in V_i \ \text{ и } \ g \neq \text{const},$$

справедлива, то математическое ожидание ζ по форме сравнимо с $g_i = P_i g$, но отлично от константы, а при альтернативе $K(i): \quad \zeta(t) \sim N(g(t), \frac{\sigma^2}{4}), \quad g = \text{const}$, математическое ожидание сигнала ζ равно константе (т. е. все что отличает сигнал ζ от константы считается шумом).

Степень согласия гипотезы $H(i)$ с результатами наблюдения ζ охарактеризуем надежностью гипотезы, равной минимальному уровню критерия, при котором по наблюдению ζ гипотеза $H(i)$ отвергается в пользу альтернативы $K(i)$. Надежность гипотезы $H(i)$ может быть найдена методом Монте – Карло, разыгрывая реализации $N+1$ нормально распределенных случайных величин $x_j \sim N(0,1)$ и подсчета частоты реализаций, для которых $\tau_i(x) \geq \tau_i(\zeta)$. Тогда оценка параметра i случайным множеством с заданной вероятностью γ будет иметь вид $\Psi^i_\gamma(\zeta) = \{i \in I : \ \alpha(\zeta, i) \geq 1 - \gamma\}$. Для этого множества минимаксная оценка параметра i примет вид

$$\hat{i}_0 = \arg\inf_{\hat{i} \in I} \sup_{\check{i} \in \Psi^i_\gamma(\zeta)} \|\hat{i} - \check{i}\|.$$

3.2. Алгоритм построения значений полезной части сигнала. Задачу построения значений сигнала на равномерной сетке $\{t_j\}_{j=0}^N$ будем рассматривать как задачу наилучшего приближения ζ элементами множества V_i из (7), то есть поиска функции $P_{\widetilde{i}}\zeta \in V_{\widetilde{i}}$, такой что $\|P_{\widetilde{i}}\zeta - \zeta\|^2 = \inf\limits_{f \in V_{\widetilde{i}}} \|f - \zeta\|^2$.

На основе результатов [35] для поиска решения этой задачи будем использовать алгоритм, основанный на принципе динамического программирования. Будем искать элемент $f \in V_{\widetilde{i}}$ с помощью последовательного вычисления значений искомой функции $f^{(m+1)}(t_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, m+1)$ по известным значениям $f^{(m)}(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Первый шаг. В качестве начальных значений возьмем $f^{(1)}(t_j)=\zeta(t_j)$, $j=0,1$, если $\zeta(t_0)\le\zeta(t_1)$, в противном случае $f^{(1)}(t_j)=\frac{\zeta(t_0)+\zeta(t_1)}{2}$, $j=0,1$.

Второй шаг. Пусть найдены значения $f^{(m)}(t_j)$, $m\ge 1$, $j=0,1,\dots,m$, найдем значения $f^{(m+1)}(t_j)$, $j\le m+1$.

Если справедливы неравенства

$$\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{l} f^{(m)}(t_m)\le\zeta(t_{m+1}),\quad \text{при}\quad m<\widetilde{i},\\ f^{(m)}(t_m)\ge\zeta(t_{m+1}),\quad \text{при}\quad m>\widetilde{i},\end{array}\right.\\ \zeta(t_{m+1})\le 2f^{(m)}(t_m)-f^{(m)}(t_{m-1})\end{array}\right\},\tag{11}$$

то значение $f^{(m+1)}(t_{m+1})=\zeta(t_{m+1})$, а $f^{(m+1)}(t_j)=f^{(m)}(t_j)$, $j=0,1,\dots,m$.

Если при $m<\widetilde{i}$ не выполнено первое неравенство из (11), т. е. $f^{(m)}(t_m)>\zeta(t_{m+1})$, то будем увеличивать j, пока не будет выполнено неравенство

$$f^{(m)}(t_{m-j+1})\ge\frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j}\zeta(t_{m-k+1})\quad\text{или}\quad m-j<0.$$

После этого возьмем $\quad f^{(m+1)}(t_{m-j+1})=\dfrac{1}{j+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{j}\zeta(t_{m-k+1}).$

Если не выполнено второе неравенство из (11), то поступим аналогично с учетом смены знаков неравенств.

Третий шаг. Если не выполнено третье неравенство из (11), т. е.

$$\zeta(t_{m+1})>2f^{(m)}(t_m)-f^{(m)}(t_{m-1}),$$

что равносильно $f^{(m)}(t_m)-\zeta(t_{m+1})<f^{(m)}(t_{m-1})-f^{(m)}(t_m)$. Для построения значений $f^{(m+1)}(t_j)$, воспользуемся методом наименьших квадратов для аппроксимации набора значений $(f^{(m)}(t_{m-1}),f^{(m)}(t_m),\zeta(t_{m+1}))$ на равномерной сетке значениями прямой вида $\widetilde{f}_j=\widetilde{a}t_j+\widetilde{b}$, $j=m-1,m,m+1$. После чего возьмем $f^{(m+1)}(t_j)=f^{(m)}(t_j)$, $j=0,1,\dots,m-2$ и $f^{(m+1)}(t_j)=\widetilde{f}_j$, $j=m-1,m,m+1$.

Четвертый шаг. Если не найдется такого $k=2,3,\dots,m-1$, что

$$f^{(m+1)}(t_k)-f^{(m+1)}(t_{k+1})<f^{(m+1)}(t_{k-1})-f^{(m+1)}(t_k),$$

то искомые значения $\{f^{(m+1)}(t_j)\}_{j=0}^{m+1}$ найдены, после чего вернемся к шагу 2 с увеличением значения m. В противном случае, т. е. если такое k найдется, то применим метод наименьших квадратов для аппроксимации набора значений $(f^{(m)}(t_{k-1}),\dots,f^{(m)}(t_m),\zeta(t_{m+1}))$ прямой вида $\hat{f}_j=\hat{a}t_j+\hat{b}$, $(j=k-1,\dots,m,m+1)$. Возьмем $f^{(m+1)}(t_j)=f^{(m)}(t_j)$, $j=0,1,\dots,k-2$ и $f^{(m+1)}(t_j)=\hat{f}_j$, $j=k-1,\dots,m,m+1$. И вернемся к шагу 4.

Обоснование алгоритма можно найти в [35].

3.3. Построение значений наблюдения, искаженного «белым шумом». Алгоритм предыдущего пункта используется при расчете статистики (10), при этом применение этого алгоритма к сигналу $\zeta(t)$ будет давать значения $g(t_j)=f^{(N)}(t_j)$ из (9) и точка максимума $g(t)$ с вероятностью γ находится в точке $\hat{i}_0$. После этого вернемся к исходному сигналу $\eta(t)$ вида (8). Построение значений полезной части сигнала будет иметь вид $y_e(t_j)=\frac{g(t_j)}{\sqrt{t_j}}$, и при этом точка максимума найденного наблюдения по исходным данным сдвинется влево, она может быть найдена простой процедурой поиска максимума в массиве $\{y_e(t_j)\}_{j=0}^{N}$. Если равномерная сетка $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ содержит точку $t=0$, то это значение вместе с точками некоторой окрестности этой точки убираем из массива значений. Количество таких точек зависит от количества точек N и длины временного промежутка T, на котором решается задача.

Заключение

В дальнейшем планируется проведение вычислительных экспериментов восстановления оптимального динамического измерения по экспериментальным данным, искаженным «белым шумом». Кроме того, планируется использовать алгоритм построения детерминированного наблюдения при исследовании других моделей (см. например, [39, 40]).

Литература

1. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск, Изд-во ЮУрГУ, 2013.
2. Пытьев, Ю.П. Методы морфологического анализа изображений / Ю.П. Пытьев, А.И. Чуличков. – М.: Физматлит, 2010.
3. Грановский, В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979.
5. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978.
6. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980.
7. Шестаков, А.Л. Модальный синтез измерительного преобразователя / А.Л. Шестаков // Проблемы управления и информатики. – 1995. – № 4. – С. 67–75.
8. Деруссо, П. Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М.: Наука, 1970.
9. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977.
10. Кузовков, Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Н.Т. Кузовков. – М.: Машиностроение, 1976.
11. Shestakov, A.L. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 70–75.
12. Shestakov, A.L. The Theory of Optimal Measurements / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – V. 1, № 1. – P. 3–15.
13. Shestakov, A.L. Optimal Measurements / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller // XXI IMEKO World Congress «Measurement» in Research and Industry. – 2015. – P. 2072–2076.
14. Keller, A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type / A.V. Keller // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 2. – P. 39–59.
15. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

16. Keller, A.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.V. Keller, A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Y.V. Khudyakov // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – V. 113. – P. 183–195.
17. Sagadeeva, M. On Nonstationary Optimal Measurement Problem for the Measuring Transducer Model / M. Sagadeeva // 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM–2016). – 2016. – Article ID: 7911710. – 3 p.
18. Einstein, A. Zur theorie der brownschen bewegung / A. Einstein // Annalen der Physik. – 1905. – V. 19. – P. 371–381.
19. Крылов, Н.В. Введение в теорию случайных процессов / Н.В. Крылов. – М.: МГУ, 1986.
20. Melnikova, I.V. Abstract Cauchy Problem in Spaces of Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – V. 149, № 5. – P. 1567–1579.
21. Melnikova, I.V. White Noise Calculus in Applications to Stochastic Equations in Hilbert Spaces / I.V. Melnikova, M.A. Alshanskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – V. 218, № 4. – P. 395–429.
22. Nelson, E. Dynamical Theories of Brownian Motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967.
23. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg; N.Y.: Springer, 2011.
24. Gliklikh, Yu.E. On Existence of Optimal Solutions for Stochastic Differential Inclusions with Mean Derivatives / Yu.E. Gliklikh, O.O. Zheltikova // Applicable Analysis. – 2014. – V. 93, № 1. – P. 35–45.
25. Shestakov, A.L. On the Measurement of the ≪White Noise≫/ A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 99–108.
26. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера – Сидорова и аддитивными шумами / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.
27. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of ≪Noises≫ / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015. – Article ID: 697410. – 8 p.
28. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of ≪Noises≫ / A. Favini, G.A. Sviridyuk, M.A. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – V. 13, № 6. – P. 4607–4621.
29. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive ≪White Noise≫ / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – V. 15, № 1. – P. 185–196.
30. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Article ID: 128. – 10 p. – URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2018/128/favini.pdf
31. Zagrebina, S.A. The Multipoint Initial-Final Value Problems for Linear Sobolev-Type Equations with Relatively p-Sectorial Operator and Additive ≪Noise≫ / S.A. Zagrebina, T.G. Sukacheva, G.A. Sviridyuk // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – V. 5, № 2. – P. 129–143.

32. Kovacs, M. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations / M. Kovacs, S. Larsson // Proceedings of «New Directions in the Mathematical and Computer Sciences», National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12. – 2008. – P. 159–232.
33. Zagrebina, S.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline / S.A. Zagrebina, E.A. Soldatova, G.A. Sviridyuk // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – V. 113. – 2015. – P. 317–326.
34. Zamyshlyaeva, A.A. The Linearized Benney–Luke Mathematical Model with Additive White Noise / A.A. Zamyshlyaeva, G.A. Sviridyuk // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – V. 113.– P. 327–336.
35. Демин, Д.С. Фильтрация монотонных выпуклых сигналов, искаженных шумом, и оценка положения особых точек / Д.С. Демин, А.И. Чуличков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 6. – С. 15–31.
36. Свиридюк, Г.А. О сходимости численного решения задач оптимального управления для систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (23). – С. 24–33.
37. Белов, А.А. Дескрипторные системы и задачи управления / А.А. Белов, А.П. Курдюков. – М.: Физматлит, 2015.
38. Шестаков, А.Л. Динамические измерения в пространствах «шумов» / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13, № 2. – С. 4–11.
39. Banasiak, J. Chaotic Behavior of Semigroups Related to the Process of Gene Amplification-Deamplification with Cell Proliferation / J. Banasiak, M. Lachowicz, M. Moszynski // Mathematical Biosciences. – 2007. – V. 206, № 2. – P. 200–2015.
40. Banasiak, J. Asynchronous Exponential Growth of a General Structured Population Model / J. Banasiak, K. Pichor, R. Rudnicki // Acta Applicandae Mathematicae. – 2012. – V. 119, № 1. – P. 149–166.

Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математическое и компьютерное моделирование», Южно-Уральский государственный университет, (г. Челябинск, Российская Федерация), sagadeevama@susu.ru.

Поступила в редакцию 6 декабря 2018 г.

MSC 49J15, 62M86, 60H40 **DOI:10.14529/mmp190207**

RECONSTRUCTION OF OBSERVATION FROM DISTORTED DATA FOR THE OPTIMAL DYNAMIC MEASUREMENT PROBLEM

M.A. Sagadeeva, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, sagadeevama@susu.ru

The theory of optimal dynamic measurements is based on the minimization of the difference between the values of virtual observation, i.e. an observation obtained with the help of a computational model, and experimental data, which are usually distorted by some noise. The article describes a mathematical model of optimal dynamic measurement in the presence of various types of interference. In addition, the article proposes an algorithm to reconstruct the values of observation from the values obtained during the experiment, which are assumed to be distorted by some random influences. It is assumed that the experimental data are influenced by "white noise", which is understood as a derivative of Nelson–Gliklich from the Wiener process. In order to reconstruct observation values, we use a priori information about the form of the function describing the observation values. The reconstruction procedure consists of two stages. At the first stage, we formulate the criterion for determining the position of the extreme point of the signal using a special type of statistics. At the second stage, we describe the procedure to reconstruct the signal values on the basis of information about the position of the extreme point and the shape of the signal convexity.

Keywords: Wiener process; Brownian motion; Nelson–Gliklikh derivative; statistical hypothesis.

References

1. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskih izmereniyah* [Methods of the Automatical Control Theory to Dynamical Measurements]. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2013. (in Russian)
2. Pyt'ev Yu.P., Chulichkov A.I. *Metody morfologicheskogo analiza izobrazheniy* [Methods of Morphological Analysis of Pictures]. Moscow, FizMatLit, 2010. (in Russian)
3. Granovskii V.A. *Dinamicheskie izmereniya. Osnovy metrologicheskogo obespecheniya* [Dynamic Measurements. Fundamentals of Metrology Provision]. Leningrad, Energoatomizdat, 1984. (in Russian)
4. Tikhonov A.N, Arsenin A.Ia. *Solutions of Ill-Posed Problems.* Winston, Halsted Press, 1977.
5. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of Linear Ill-posed Problems and Its Applications.* Utrecht, Boston, VSP, 2002.
6. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.* Providence, AMS, 1986.
7. Shestakov A.L. Modal Synthesis of a Measurement Transducer. *Problemy Upravleniya i Informatiki* (*Avtomatika*), 1995, no. 4, pp. 67–75. (in Russian)
8. Derusso R.M., Roy R.J., Close C.M. *State Variables for Engineers.* N.Y., London, Sydney, Wiley, 1965.
9. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyah neopredelennosti* [Control and Observation under Conditions of Uncertainty]. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)
10. Kuzovkov N.T. *Modal'noe upravlenie i nablyudeniya ustrojstva* [Modal Management and the Observing Devices]. Moscow, Mashinostroenie, 1976. (in Russian)
11. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 70–75.
12. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. The Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 3–15.
13. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Optimal Measurements. *XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry"*, 2015, pp. 2072–2076.
14. Keller A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 39–59. DOI: 10.14529/jcem150205

15. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control,* 2012, vol.73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079

16. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, vol. 113, 2015, pp. 183–195. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_11

17. Sagadeeva M. On Nonstationary Optimal Measurement Problem for the Measuring Transducer Model. *2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM–2016)*, 2016, article ID: 7911710, 3 p. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911710

18. Einstein A. Zur theorie der brownschen bewegung. *Annalen der Physik (ser. 4)*, 1905, vol. 19, pp. 371–381. (in German)

19. Krylov N.V. *Introduction to the Theory of Diffusion Processes.* Providence, American Mathematical Society, 1994.

20. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Abstract Cauchy Problem in Spaces of Stochastic Distributions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 149, no. 5, pp. 1567–1579. DOI: 10.1007/s10958-008-0082-4

21. Melnikova I.V., Alshanskiy M.A. White Noise Calculus in Applications to Stochastic Equations in Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 218, no. 4, pp. 395–429. DOI: 10.1007/s10958-016-3038-0

22. Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion.* Princeton, Princeton University Press, 1967.

23. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.* N.Y., London, Dordrecht, Heidelberg, Springer, 2011.

24. Gliklikh Yu.E., Zheltikova O.O. On Existence of Optimal Solutions for Stochastic Differential Inclusions with Mean Derivatives. *Applicable Analysis*, 2014, vol. 93, no. 1, pp. 35–45. DOI: 10.1080/00036811.2012.753588

25. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the Measurement of the "White Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 27 (286), issue 13, pp. 99–108.

26. Sviridyuk G. A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 90–103. DOI: 10.14529/mmp140108 (in Russian)

27. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "Noises". *Abstract and Applied Analysis*, 2015, vol. 2015, article ID: 697410, 8 p. DOI: 10.1155/2015/697410

28. Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of "Noises", *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, vol. 13, no. 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x

29. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive "White Noise". *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185

30. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, article ID: 128, 10 p. Aviable at: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2018/128/favini.pdf

31. Zagrebina S.A., Sukacheva T.G., Sviridyuk G.A. The Multipoint Initial-Final Value Problems for Linear Sobolev-Type Equations with Relatively p-Sectorial Operator and Additive "Noise". *Global and Stochastic Analysis*, 2018, vol. 5, no. 2, pp. 129–143.

32. Kovacs M., Larsson S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. *Proceedings of "New Directions in the Mathematical and Computer Sciences", National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. V. 4.* Publications of the ICMCS, Lagos, 2008, pp. 159–232.

33. Zagrebina S.A., Soldatova E.A., Sviridyuk G.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 317–326. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_20

34. Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A. The Linearized Benney–Luke Mathematical Model with Additive White Noise. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 327–336. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_21

35. Demin D.S., Chulichkov A.I. Filtering of Monotonic Convex Noise-Distorted Signals and Estimates of Positions of Special Points. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2009, vol. 15, no. 6, pp. 15–31. (in Russian)

36. Sviridyuk G.A., Keller A.V. On the Numerical Solution Convergence of Optimal Control Problems for Leontief Type System. *Vestnik of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2011, no. 2 (23), pp. 24–33. (in Russian)

37. Belov A.A., Kurdyukov A.P. *Deskriptornye sistemy i zadachi upravleniya* [Descriptor Systems and Control Problems]. Moscow, Fizmthlit, 2015. (in Russian)

38. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Hudyakov Yu.V. Dinamic Measurement in Spaces of "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 4–11. (in Russian)

39. Banasiak J., Lachowicz M., Moszynski M. Chaotic Behavior of Semigroups Related to the Process of Gene Amplification-Deamplification with Cell Proliferation. *Mathematical Biosciences*, 2007, vol. 206, no. 2, pp. 200–2015. DOI: 10.1016/j.mbs.2005.08.004

40. Banasiak J., Pichor K., Rudnicki R. Asynchronous Exponential Growth of a General Structured Population Model. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2012, vol. 119, no. 1, pp. 149–166. DOI: 10.1007/s10440-011-9666-y

Received December 6, 2018