

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С НЕАДДИТИВНЫМ АГРЕГИРОВАНИЕМ ЗАТРАТ

А.Г. Ченцов^{1,2}, А.А. Ченцов¹, А.Н. Сесекин^{1,2}

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург, Российская Федерация

²Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Исследуется задача последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств) с условиями предшествования и неаддитивным агрегированием затрат. Предполагается, что на «внешнем» уровне (при оценивании системы циклов, определяемых всякий раз этапами внешнего перемещения и внутренних работ) вариант агрегирования отвечает задаче «на узкие места» с корректирующим параметром. На «внутреннем» уровне (в пределах цикла) агрегирование затрат на внешнее перемещение и проведение работ может быть произвольным. Построен «неаддитивный» вариант процедуры динамического программирования, включая экономичный вариант, использующий условия предшествования. Оптимальный алгоритм на основе ДП реализован в виде программы для ПЭВМ в случае постановки, ориентированной на задачу об управлении автономной системой, функционирующей в агрессивной среде и осуществляющей последовательно процесс демонтажа источников воздействий (данной среды) на систему. Эта постановка может отвечать инженерной задаче о демонтаже источников радиационного излучения при аварийных ситуациях на АЭС в случае применения роботизированной системы с электронным оборудованием, функционирование которого возможно лишь при соблюдении допусков на интенсивность радиационного воздействия в течении всего временного промежутка. Для данного варианта общей постановки проведен вычислительный эксперимент с применением ПЭВМ.

Ключевые слова: динамическое программирование; маршрут; условия предшествования.

Введение

Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов с выполнением (при посещении мегаполисов) работ, именуемых далее внутренними. Процесс посещения мегаполисов представляется в виде совокупности однородных циклов; каждый из упомянутых циклов включает перемещение к мегаполису извне и выполнение соответствующих внутренних работ. Агрегирование стоимостей циклов соответствует задаче «на узкие места» с использованием корректирующего параметра.

Содержательный пример прикладной задачи связан с проблемой управления автономным устройством, функционирующим в агрессивной среде и использующим электронное оборудование, для функционирования которого уровень внешнего воздействия на каждом этапе перемещений не должен превышать заданного допуска. Процесс представляет собой конечную систему циклов. Каждый цикл заключается в осуществлении двух этапов (внешнее перемещение и внутренние работы); воздействия внешней среды, отвечающие этим этапам, агрегируются. Данное агрегирование не сводится к суммированию. Так, в частности, при использовании роботизированной системы для последовательного демонтажа радиационно активных элементов требуется не превышение порогового уровня в интересах обеспечения работоспособности электронного оборудования. Такой режим (непревышения) надо поддерживать

в течение всего времени работы системы. По этой причине естественно использовать модель задачи «на узкие места» как на этапе (внешних) перемещений, так и на этапе работ, связанных с демонтажом. В упомянутой задаче агрегирование радиационного воздействия соответствует непрерывному аналогу задачи «на узкие места». Мы снимаем ограничение в виде порогового уровня и минимизируем максимальное (на промежутке управления) значение воздействия. Если это максимальное значение не превосходит данного допуска, то система в состоянии осуществить работы по демонтажу.

Для выяснения упомянутой возможности предлагается «разделить» совокупный промежуток времени на циклы, на каждом из которых определяется свое максимальное значение радиационного воздействия с агрегированием упомянутых значений по типу задачи «на узкие места». В то же время каждый цикл включает в себя внешнее перемещение и внутренние работы по демонтажу. Здесь также естественно разделить два максимальных воздействия и выбрать среди них наибольшее (данный вариант агрегирования используется в работе). В то же время на теоретическом уровне полезно задействовать абстрактное агрегирование стоимостей внешнего перемещения и внутренних работ для каждого цикла, имея в виду другие возможные приложения.

В результате мы получаем достаточно сложную «неаддитивную» задачу маршрутизации с ограничениями; особо выделяем условия предшествования (см. [1]). Данные условия использовались в задаче курьера (см. [1]) или TSP-PC. Они имеют практический смысл, т.к. учитывают особенности прикладных задач, но, самое главное, позволяют снижать сложность вычислений при использовании динамического программирования (ДП).

Рассматриваемая задача маршрутизации имеет прототипом труднорешаемую [2] задачу коммивояжера или TSP; см. [1, 3, 4]. Отметим применение ДП в [5, 6], а также неаддитивный вариант в [7]. При решении TSP широко используется метод ветвей и границ [8]; применяются эвристические алгоритмы. Вместе с тем рассматриваемая в статье задача содержит существенные особенности качественного характера. Это касается ограничений и функций стоимости, зависящих от списка заданий, а также неаддитивного варианта агрегирования затрат. В этой связи отметим, наряду с [7], исследования [9–12], касающиеся «неаддитивных» задач маршрутизации, а также монографию [13], посвященную снижению дозовой нагрузки исполнителей при последовательном демонтаже излучающих элементов (см. [14]). В связи с применением условий предшествования для экономичной версии ДП отметим [15, §4.9]; имеется в виду вариант ДП, развивающий схему Р. Беллмана [5]. Еще одна особенность связана с реализуемой здесь процедурой оптимизации начального состояния, что также связано с упомянутым вариантом ДП (используется единая процедура построения слоев функции Беллмана).

1. Общие обозначения и определения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); \emptyset – пустое множество, \triangleq – равенство по определению. Произвольным объектам α и β сопоставляем единственное множество $\{\alpha; \beta\}$, содержащее α, β и не содержащее никаких других элементов. Тогда $\{x\} \triangleq \{x; x\}$ есть синглетон, соответствующий объекту x . Всякое множество – объект, а поэтому произвольным объектам

u и v сопоставляется [17, с. 67] упорядоченная пара (УП) $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$ этих объектов, где u – первый элемент данной УП, а v – второй ее элемент. Если z есть какая-либо УП, то через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z , однозначно определяемые условием $z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z))$. На основе УП конструируются триплеты: если a, b и c – объекты, то $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$. В этой связи напомним, что для любых трех множеств A, B и C полагается [16, с. 17] $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$.

Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Каждому множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$; $\text{Fin}(H)$ есть семейство всех непустых конечных п/м H . Для непустых множеств P и Q через Q^P обозначаем множество всех отображений из P в Q , т.е. $Q^P = \{P \rightarrow Q\}$. Если $f \in Q^P$ и $A \in \mathcal{P}(P)$, то $f^1(A) \triangleq \{f(x) : x \in A\} \in \mathcal{P}(Q)$ (см. [17, с. 87]) есть образ множества A при действии f . Через $(\text{Bi})[P; Q]$ обозначим множество всех биекций P на Q . Для непустого множества H в виде $(\text{Bi})[H; H]$ имеем множество всех перестановок H (см. [18, с. 87]); при $\alpha \in (\text{Bi})[H; H]$ в виде $\alpha^{-1} \in (\text{Bi})[H; H]$ имеем перестановку, обратную к α : $\alpha(\alpha^{-1}(h)) = \alpha^{-1}(\alpha(h)) = h \quad \forall h \in H$. Далее \mathbb{R} – вещественная прямая, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leq \xi\}$, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$; при $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$ в виде $\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 | (p \leq k) \& (k \leq q)\}$ имеем промежуток (возможно пустой) в \mathbb{N}_0 , $\overline{1, k} = \{s \in \mathbb{N} | s \leq k\}$ при $k \in \mathbb{N}$. Если K – непустое конечное множество, то $|K| \in \mathbb{N}$ есть по определению мощность K , а $(\text{bi})[K]$ – множество всех биекций $\overline{1, |K|}$ на K , т.е. $(\text{bi})[K] \triangleq (\text{Bi})[\overline{1, |K|}; K]$. Если же $m \in \mathbb{N}$, то $|\overline{1, m}| = m$, а потому $(\text{bi})[\overline{1, m}] = (\text{Bi})[\overline{1, m}, \overline{1, m}]$ – множество всех перестановок $\overline{1, m}$. Как обычно, $|\emptyset| \triangleq 0$. Для каждого непустого множества T через $\mathcal{R}_+[T]$ обозначаем множество всех функций из T в \mathbb{R}_+ , т.е. $\mathcal{R}_+[T] \triangleq (\mathbb{R}_+)^T$.

2. Постановка задачи

Фиксируем непустое множество X , $X^0 \in \mathcal{P}'(X)$, $N \in \mathbb{N}$ со свойством $N \geq 2$, множества

$$M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_N \in \text{Fin}(X), \tag{1}$$

именуемые мегаполисами, а также (непустые) отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N). \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$(X^0 \cap M_j = \emptyset \quad \forall j \in \overline{1, N}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, N} \quad \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}). \tag{3}$$

Соглашения (1)–(3) типичны для приложений. Мы рассмотрим задачу о последовательном посещении мегаполисов (1) с целью выполнения тех или иных работ. В задаче маршрутизации циклов эти работы могут соответствовать демонтажу излучающих элементов при авариях на АЭС, подобных Чернобылю и Фукусиме. Тогда мегаполисы (1) могут получаться дискретизацией границ ближних зон источников; возможен и другой случай: мегаполисы определяются системой входов-выходов в помещения с повышенной радиацией за счет уже (возможно) нескольких источников. Задачу управления можно пояснить схемой

$$\begin{aligned} (x^0 = x \in X^0) &\longrightarrow (x_{1,1} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow (x_{N,1} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in M_{\alpha(N)}), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha \in \mathbb{P}$ (α именуется далее маршрутом) при $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$. Полагаем, что точки посещения мегаполисов (точки прибытия и отправления) должны удовлетворять условиям

$$(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \dots, (x_{N,1}, x_{N,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(N)} \quad (5)$$

(возможные варианты (2): $(\mathbb{M}_j = M_j \times M_j) \vee (\mathbb{M}_j = \{(y, y) : y \in M_j\})$ при $j \in \overline{1, N}$). Выбор перестановки в (4), (5) может быть стеснен условиями предшествования, для введения которых фиксируем отношение $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N})$ (итак, $\mathbf{K} \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}$) со следующим свойством $\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z_0) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0$. Элементы \mathbf{K} – адресные пары – определяют требование: при $(i, j) \in \mathbf{K}$ посещение M_i должно предшествовать посещению M_j . Тогда

$$\mathbf{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}) \quad (6)$$

есть непустое [15, гл. 2] множество допустимых маршрутов; как следствие $\mathbf{A} \in \text{Fin}(\mathbb{P})$.

Как видно из (4), (5) выбор маршрута $\alpha \in \mathbf{A}$ еще не определяет течение процесса: важно располагать конкретной траекторией $x^0, (x_{1,1}, x_{1,2}), \dots, (x_{N,1}, x_{N,2})$. Здесь x^0 – начальное состояние, которое также выбирается исследователем. Пусть, при $j \in \overline{1, N}$

$$(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)) \& (\mathbf{M}_j \triangleq \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)). \quad (7)$$

Всюду в дальнейшем полагаем для простоты, что $X^0 \in \text{Fin}(X)$ (более общий случай может исследоваться по аналогии с [12, 19]). Тогда с учетом (7) получаем, что

$$(\mathbf{X} \triangleq (\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i) \cup X^0 \in \text{Fin}(X)) \& (\mathfrak{X} \triangleq (\bigcup_{i=1}^N \mathfrak{M}_i) \cup X^0 \in \text{Fin}(X)). \quad (8)$$

Пусть \mathbb{Z} – множество всех отображений из $\overline{0, N}$ в $\mathfrak{X} \times \mathbf{X}$. При $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ в виде

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathbb{Z} | (z_0 = (x, x)) \& (z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, N})\} \in \text{Fin}(\mathbb{Z}) \quad (9)$$

имеем множество всех траекторий, стартующих из x и согласованных с маршрутом α (см. (4), (5)); если при этом $(\tilde{z}_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$, то при $t \in \overline{1, N}$ имеем по определению \mathbb{Z} что $\text{pr}_1(\tilde{z}_t) \in \mathfrak{X}$ и $\text{pr}_2(\tilde{z}_t) \in \mathbf{X}$. В силу (6) и (9) получаем, что при $x \in X^0$

$$\tilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} | \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z}) \quad (10)$$

есть (непустое конечное) множество допустимых решений (ДР), стартующих из x . В виде

$$\mathbf{D} \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \times X^0 | (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z} \times X^0) \quad (11)$$

имеем множество ДР полной задачи.

Функции стоимости. Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$; элементы \mathfrak{N} (а это – непустые п/м $\overline{1, N}$) рассматриваем как списки заданий. Фиксируем

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}], \dots, c_N \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}]; \quad (12)$$

функция \mathbf{c} используется для оценивания внешних перемещений, а функции c_1, \dots, c_N – для оценивания (внутренних) работ, связанных с посещением мегаполисов (1). Как

видно из (12), функции стоимости $\mathbf{c}, c_1, \dots, c_N$ допускают зависимость от списка заданий. В последующих построениях будет использоваться зависимость от списка заданий, не выполненных на текущий момент, что соответствует содержательной задаче, обсуждавшейся во введении.

Мы рассматриваем далее неаддитивный вариант агрегирования стоимостей, порожденных вредными воздействиями. При этом агрегирование стоимостей циклов осуществляется по аналогии с [12] подобно задаче «на узкие места» с некоторым управляющим параметром. Этот параметр позволяет реализовать доминирование ближайших или, напротив, финальных циклов в смысле получаемых значений функций (12). В пределах каждого цикла также осуществляется неаддитивное агрегирование стоимостей внешнего перемещения и внутренних работ: используется произвольная функция агрегирования, подобная применяемой в [10].

Итак, полагаем, что задана функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Отметим два примера: а) аддитивное агрегирование, когда $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2 \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \xi_2 \in \mathbb{R}_+$; б) $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \sup(\{\xi_1; \xi_2\}) \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \xi_2 \in \mathbb{R}_+$. Построения [12] доставляют развитие варианта б), характеризуемое равенством $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \sup(\{\xi_1; \mathbf{s}\xi_2\})$, где $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+, \mathbf{s} > 0$. Все эти варианты актуальны с точки зрения приложений, подобных отмеченным во Введении. Мы фиксируем далее параметр $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+$ со свойством $\mathbf{a} > 0$. Если $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$, то

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \triangleq \max_{j \in \overline{1, N}} \mathbf{a}^{j-1} \varphi(\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}(j-1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}(j)), \alpha^1(\overline{j, N})); c_{\alpha(j)}(\mathbf{z}(j), \alpha^1(\overline{j, N}))). \quad (13)$$

Для нас (13) актуально при $\alpha \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]$, где $x \in X^0$. Это соответствует задаче

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \rightarrow \min, \quad (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x], \quad (14)$$

которой сопоставляется экстремум $V[x]$ в виде наименьшего из значений $\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}]$, $(\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$, а также (непустое) множество решений

$$(SOL)[x] \triangleq \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] | \mathfrak{C}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0] = V[x]\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\mathbf{D}}[x]). \quad (15)$$

Наконец, полная экстремальная задача имеет вид

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \rightarrow \min, \quad (\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}. \quad (16)$$

Экстремум задачи (16) обозначаем через \mathbb{V} :

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] = \min_{x \in X^0} V[x] \in \mathbb{R}_+. \quad (17)$$

При этом, конечно, имеем $\mathbf{SOL} \triangleq \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0, x_0) \in \mathbf{D} | \mathfrak{C}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D})$.

3. Динамическое программирование

Для решения задач (14), (16) используем вариант ДП, допускающий идейную аналогию с [15, §4.9], но учитывающий особенности, отмеченные в [12]. Прежде всего введем отображение \mathbf{I} , действующее в \mathfrak{N} по правилу $\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\}$, где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} | (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$. Отображение \mathbf{I} определяет правило вычеркивания (заданий из списка). Наряду с (14) будем рассматривать локальные

экстремальные задачи маршрутизации. Если $K \in \mathfrak{N}$, то, следуя [15, часть 2], полагаем, что

$$(\mathbf{I}-\text{bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\text{bi})[K] \mid \alpha(s) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{s, |K|})) \quad \forall s \in \overline{1, |K|}\}, \quad (18)$$

получая множество локальных маршрутов (вариантов посещения мегаполисов $M_i, i \in K$), $(\mathbf{I}-\text{bi})[K] \neq \emptyset$; тогда (18) определено при $K = \overline{1, N}$, причем [20, (3.4)] $\mathbf{A} = (\mathbf{I}-\text{bi})[\overline{1, N}]$. Используем (18) в качестве множества частичных маршрутов. Нам потребуются частичные траектории. Если $K \in \mathfrak{N}$, то через \mathbb{Z}_K обозначим множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} : \overline{0, |K|} \rightarrow \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$, где $\tilde{\mathbb{X}} \triangleq \mathbb{X} \cup \mathbf{X}$. При $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\text{bi})[K]$ полагаем, что

$$Z(x, K, \alpha) \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathbb{Z}_K \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, |K|})\}; \quad (19)$$

ясно, что $Z(x, K, \alpha) \in \text{Fin}(\mathbb{Z}_K)$. Для наших целей существенным является случай, когда в (19) $\alpha \in (\mathbf{I}-\text{bi})[K]$. Отметим, что $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{\overline{1, N}}$. При этом $\overline{1, N} \in \mathfrak{N}$ и определено множество $Z(x, \overline{1, N}, \alpha)$. Из (9) и (19) получаем, что $\mathcal{Z}_\alpha[x] = Z(x, \overline{1, N}, \alpha) \quad \forall x \in X^0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}$. В частности, $\mathcal{Z}_\alpha[x] = Z(x, \overline{1, N}, \alpha)$ при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{A}$. Заметим также, что согласно (19) при $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}, \alpha \in (\text{bi})[K], \mathbf{z} \in Z(x, K, \alpha)$ и $t \in \overline{0, |K|}$ имеем, в частности, $\mathbf{z}(t) \in \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$. Ясно, что (см. (12)) при $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}, \alpha \in (\text{bi})[K], \mathbf{z} \in Z(x, K, \alpha)$ и $t \in \overline{1, N}$ определены $(\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}(t-1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}(t)), \alpha^1(t, |K|))) \in \mathbb{R}_+ \& (c_{\alpha(t)}(\mathbf{z}(t), \alpha^1(t, |K|))) \in \mathbb{R}_+$. С учетом этого введем локальный аналог (13). Итак, при $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}, \alpha \in (\text{bi})[K]$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, |K|}} \in Z(x, K, \alpha)$

$$\mathcal{B}_K[\alpha; (z_t)_{t \in \overline{0, |K|}}] \triangleq \max_{t \in \overline{1, |K|}} \mathbf{a}^{t-1} \varphi(\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(t, |K|)); c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(t, |K|))); \quad (20)$$

$\mathcal{B}_K[\alpha; (z_t)_{t \in \overline{0, |K|}}] \in \mathbb{R}_+$. В частности, в (20) можно использовать $\alpha \in (\mathbf{I}-\text{bi})[K]$. Пусть

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha \in (\mathbf{I}-\text{bi})[K]} \min_{\mathbf{z} \in Z(x, K, \alpha)} \mathcal{B}_K[\alpha; \mathbf{z}] \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}; \quad (21)$$

посредством (21) определена функция из $\mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathfrak{N}]$; $v(x, \overline{1, N}) \in \mathbb{R}_+$ при $x \in X^0$,

$$v(x, \overline{1, N}) = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]} \mathcal{B}_{\overline{1, N}}[\alpha; \mathbf{z}]. \quad (22)$$

Как следствие получаем (см. (13), (22)), что при $x \in X^0$

$$V[x] = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] = \min_{\alpha \in (\mathbf{I}-\text{bi})[\overline{1, N}]} \min_{\mathbf{z} \in Z(x, \overline{1, N}, \alpha)} \mathcal{B}_{\overline{1, N}}[\alpha; \mathbf{z}] = v(x, \overline{1, N}).$$

Итак $V[\cdot] \triangleq (V[x])_{x \in X^0} = v(\cdot, \overline{1, N})$, где (здесь и ниже) $v(\cdot, \overline{1, N}) \triangleq (v(x, \overline{1, N}))_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$;

$$\mathbb{V} = \min_{x \in X^0} v(x, \overline{1, N}). \quad (23)$$

Полагаем, что $v(x, \emptyset) \triangleq 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}$. Теперь $v \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})]$.

Теорема 1. Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то справедливо равенство

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}[K]} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\varphi(\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), K), c_j(z, K)); \mathbf{a}v(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\}). \quad (24)$$

Доказательство подобно [22, теорема 5.1]. В частности (см. (24)),

$$V[x] = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\varphi(\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}), c_j(z, \overline{1, N})); \mathbf{a}v(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})\}) \quad \forall x \in X^0. \quad (25)$$

4. Слои функции Беллмана

Рассмотрим экономичную версию ДП, использующую вместо «полной» функции Беллмана v систему ее слоев. Данная конструкция соответствует [10, 19]. Введем семейство

$$\mathfrak{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \ (\text{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in K)\} \quad (26)$$

непустых множеств, именуемых существенными списками. Эти списки ранжируем по мощности $\mathfrak{G}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{G} \mid s = |K|\} \ \forall s \in \overline{1, N}$; $\mathfrak{G}_N = \{\overline{1, N}\}$. При этом [22] $\mathfrak{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathfrak{G}_s, t \in \mathbf{I}(K)\} \ \forall s \in \overline{2, N}$. Тогда [22, замечание 3.2] $\mathfrak{G}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\}$, где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Семейства $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_N$ определяются рекуррентной процедурой $\mathfrak{G}_N \rightarrow \mathfrak{G}_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{G}_1$.

Слои пространства позиций. Следуя [10, 19], конструируем слои D_0, D_1, \dots, D_N пространства позиций. При этом

$$D_0 \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \cup_{t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_t\}, \quad D_N \triangleq \{(x, \overline{1, N}) : x \in X^0\}; \quad (27)$$

посредством (27) определены крайние слои пространства позиций. Рассмотрим построение промежуточных слоев, фиксируя $s \in \overline{1, N-1}$. Определяем при $K \in \mathfrak{G}_s$

$$\begin{aligned} J_s(K) &\triangleq \{j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{G}_{s+1}\}, \quad \mathcal{M}_s[K] \triangleq \\ &\triangleq \cup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j, \quad \mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Все множества, участвующие в (28), являются непустыми (см. [22]). Полагаем

$$D_s \triangleq \cup_{K \in \mathfrak{G}_s} \mathbb{D}_s[K], \quad (29)$$

получая множество из $\mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathfrak{G}_s)$. Теперь мы располагаем непустыми множествами D_0, D_1, \dots, D_N . При $s \in \overline{0, N}$ вводим функцию $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ по правилу

$$v_s(x, K) \triangleq v(x, K) \quad \forall (x, K) \in D_s. \quad (30)$$

Напомним, что каждое из множеств $D_s, s \in \overline{0, N}$, является п/м $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})$, где $\mathcal{P}(\overline{1, N}) = \mathfrak{N} \cup \{\emptyset\}$; функция v определена на $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})$, см. раздел 3. Итак, слои (30) определены корректно. При этом v_0 есть функция, тождественно равная нулю. Напомним, что (см. [22])

$$(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, N} \quad \forall (x, K) \in D_s \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall z \in \mathbb{M}_j. \quad (31)$$

В частности, из (31) вытекает свойство $(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1} \quad \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1, N}) \quad \forall z \in \mathbb{M}_j$. В связи с использованием теоремы 1 заметим, что в силу (30), (31) при $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$ определено значение $v_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathbb{R}_+$.

Предложение 1. Если $s \in \overline{1, N}$ и $(x, K) \in D_s$, то

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\varphi(\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z)), K), c_j(z, K)\}; \mathbf{a}v_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией теоремы 1, (30), (31).

Следствие 1. Если $x \in X^0$, то

$$V[x] = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\varphi(\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z)), \overline{1, N}), c_j(z, \overline{1, N})\}; \mathbf{a}v_{N-1}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})).$$

Предложение 1 и следствие 1 определяют алгоритм построения $V[\cdot]$ и глобального экстремума \mathbb{V} . Итак (см. (30)), функция v_0 тождественно равна нулю. При $s \in \overline{1, N}$ преобразование v_{s-1} в v_s полностью определяется предложением 1. После исполнения всех таких преобразований, отвечающих реализации $s = 1, \dots, N$, получаем согласно следствию 1 функцию $V[\cdot]$, т.е. систему значений (экстремумов) задач (14);

$$V[x] = v_N(x, \overline{1, N}) \quad \forall x \in X^0. \quad (32)$$

Определение \mathbb{V} (17) сводятся к минимизации значений (32), т.е. к реализации сравнительно простой вычислительной процедуры. При вышеупомянутых построениях, направленных на определение экстремума, можно, как видно из предложения 1, использовать процедуру с перезаписью слоев функции Беллмана. А именно: при $s \in \overline{1, N}$ для построения v_s требуется только слой v_{s-1} , который и достаточно сохранять в памяти вычислителя для определения v_s . После построения v_s слой v_{s-1} можно не сохранять и заменить на v_s т.е. выполнить перезапись $v_{s-1} \rightarrow v_s$. Это позволяет экономить ресурсы памяти (см. [23, 24]). Данный прием (перезапись слоев) может использоваться для определения $V[x], x \in X^0$, и \mathbb{V} (17), а также для оптимизации начального состояния: имеется ввиду нахождение $x^0 \in X^0$ со свойством $V[x^0] = \mathbb{V}$. В то же время для построения конкретных решений из множества (15) при $x = x^0$ требуются уже все слои функции Беллмана. Итак, при построении оптимальных решений процедура с перезаписью слоев функции Беллмана недостаточна.

5. Построение оптимальных решений

Рассмотрим построение $(\alpha_0, \mathbf{z}_0, x_0) \in \mathbf{SOL}$, т.е. построение оптимального решения задачи (16). Определение $x^0 \in X^0$ со свойством $V[x^0] = \mathbb{V}$ обсуждалось в предыдущем разделе. Полагаем, что состояние x^0 уже найдено, и рассмотрим построение $(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in (SOL)[x^0]$. Пусть $\mathbf{z}_0(0) \triangleq (x^0, x^0)$. С учетом следствия 1 имеем (по выбору x^0), что

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= V[x^0] = \\ &= \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\varphi(\mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z)), \overline{1, N}), c_j(z, \overline{1, N})\}; \mathbf{a}v_{N-1}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})). \end{aligned} \quad (33)$$

С учетом (33) определяем $\alpha_0(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $\mathbf{z}_0(1) \in \mathbb{M}_{\alpha_0(1)}$, для которых

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \sup(\{\varphi(\mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(\mathbf{z}_0(1))), \overline{1, N}); c_{\alpha_0(1)}(\mathbf{z}_0(1), \overline{1, N})\}; \\ &\quad \mathbf{a}v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0(1)), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\})). \end{aligned} \quad (34)$$

Согласно (31) $(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0(1)), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}) \in D_{N-1}$ (согласно (27) $(x^0, \overline{1, N}) \in D_N$). В силу (31) $(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1); j\}) \in D_{N-2} \quad \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}) \quad \forall z \in \mathbb{M}_j$. В силу предложения 1 имеем равенство

$$\begin{aligned} &v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0(1)), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}) = \\ &= \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \sup(\{\varphi(\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0(1)), \text{pr}_1(z)), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}); \\ &\quad c_j(z, \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}); \mathbf{a}v_{N-2}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1); j\})\}). \end{aligned} \quad (35)$$

Определяем $\alpha_0(2) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\})$ и $\mathbf{z}_0(2) \in \mathbb{M}_{\alpha_0(2)}$ так, что (см. (35))

$$v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0(1)), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}) = \sup(\{\varphi(\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0(1)), \text{pr}_1(\mathbf{z}_0(2))), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}),$$

$$c_{\alpha_0(2)}(\mathbf{z}_0(2), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}); \mathbf{a}v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0(2)), \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1); \alpha_0(2)\})\}. \quad (36)$$

Замечание 1. Обсудим случай $N = 2$. Тогда $\mathbf{z}_0(0) = (x^0, x^0)$, $\mathbf{z}_0(1) \in \mathbb{M}_{\alpha_0(1)}$, $\mathbf{z}_0(2) \in \mathbb{M}_{\alpha_0(2)}$. Из (7), (8) получаем, что $\mathbf{z}_0 : \overline{0, 2} \rightarrow \mathbb{X} \times \mathbb{X}$. При этом $\alpha_0 \triangleq (\alpha_0(k))_{k \in \overline{1, 2}}$ таково, что $\alpha_0(2) \in \overline{1, N} \setminus \{\alpha_0(1)\}$, а тогда $\alpha_0(1) \neq \alpha_0(2)$ и $\alpha_0 \in \mathbb{P}$. Легко видеть, что при $N = 2$ $((\alpha_0(t))_{t \in \overline{1, 2}}, (\mathbf{z}_0(t))_{t \in \overline{0, 2}}, x^0)$ есть элемент **SOL**, т.е. оптимальное решение полной задачи.

Возвращаясь к общему случаю $N \geq 2$, полагаем, что процедуры, подобные выбору $(\alpha_0(1), \alpha_0(2))$ и $(\mathbf{z}_0(0), \mathbf{z}_0(1), \mathbf{z}_0(2))$ (см. (34), (36)) следует продолжать вплоть до исчерпывания индексных множеств $\overline{1, N}$ и $\overline{0, N}$. В результате будут построены маршрут $\alpha_0 = (\alpha_0(t))_{t \in \overline{1, N}} \in \mathbf{A}$ и траектория $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{z}_0(t))_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha_0}[x^0]$ со свойством $\mathfrak{C}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0] = \mathbb{V}$; в виде $(\alpha_0, \mathbf{z}_0, x^0)$ будет получено оптимальное решение: $(\alpha_0, \mathbf{z}_0, x^0) \in \mathbf{SOL}$.

6. Вычислительный эксперимент

Ниже рассматривается вариант постановки, обсуждавшийся во Введении и связанный с обеспечением работоспособности электронного оборудования роботизированной системы, осуществляющей последовательный демонтаж радиационно активных элементов. Соответствующая модель является «неаддитивной версией» [13] (в [13] рассматривалась задача о снижении дозы одного исполнителя (человека) при осуществлении демонтажа).

Предполагается, что на плоскости находятся N радиационно активных элементов, возле каждого из которых выделена соответствующая ближняя зона, граница которой может содержать те или иные препятствия, в связи с чем намечены участки входа в данную зону и выхода из нее. Эти участки доступны для прохождения роботизированной системой. Они играют роль «городов», образующих в совокупности соответствующий мегаполис.

Полагаем, что система находится под постоянным радиационным воздействием, создаваемым теми и только теми источниками, которые не демонтированы на момент перемещения (мы учитываем мгновенные воздействия источников в отличие от [13], где суммировались интегральные эффекты). Функция агрегирования φ соответствует примеру раздела 2, что отвечает логике задачи «на узкие места». Что касается функций $\mathbf{c}, c_1, \dots, c_N$, то их значения определяются максимальными значениями вышеуказанных мгновенных воздействий. Зависимость от списка заданий возникает в связи с необходимостью учета не демонтированных источников и проявляется при максимизации мгновенных воздействий радиации.

С практической точки зрения оптимизация в духе (16) может потребоваться с целью выяснения самой возможности выполнения комплекса работ по демонтажу, связанной с непревышением порогового уровня, определяемого условиями работы электронного оборудования. Движение роботизированной системы возможно из множества начальных (базовых) пунктов, в которых производится подготовка к работе данного устройства; в нашей модели – это множество X^0 . Каждый i -й радиоактивный объект «окружен» множеством M_i (аналог мегаполисов (1), отметим также (2)), которое образуют пункты, играющие роль точек входа роботизированной системы (\mathfrak{M}_i , см. (7)) в ближнюю зону источника и пунктов ее покидания (выходов) (\mathbf{M}_i , см. (7)). Простейший пример ближней зоны – помещение, в котором расположен излу-

чающий объект, попасть в которое, как и покинуть его, можно через некоторые входы/выходы. Демонтаж заключается в мгновенном действии, связанном с «выключением» источника с расстояния, достаточного для действия манипулятора. Движения внутри ближней зоны при приближении к источнику и к точке выхода после его «выключения» соответствуют внутренним работам (внутренние работы состоят из этапа перемещения к источнику, демонтажа и этапа покидания ближней зоны отключенного источника). Перемещения между базой (элемент X^0) и точкой входа в первую по порядку выполнения работ ближнюю зону, а также между точками выхода из каждой предыдущей ближней зоны к точке входа в следующую образуют внешние перемещения.

Каждый i -й источник ($i \in \overline{1, N}$) характеризуется двумя параметрами:

1) $\Gamma_i \in \mathbb{R}_+$ – интенсивность излучения (количественная мера интенсивности излучения непосредственно на источнике).

2) Дистанция демонтажа источника L_i – расстояние приближения к источнику, достаточное для манипуляций по его демонтажу (разумеется, имеет смысл рассматривать такую модель расположения источников, при котором размеры «ближней зоны» M_i больше области доступности источника для демонтажа – круга радиуса L_i).

В отличие от [13], будем минимизировать наибольшую величину мгновенной дозы облучения, что на практике продиктовано требованием обеспечения радиационной стойкости выполняющего демонтаж оборудования (в каждый момент времени интенсивность воздействия на устройство со стороны всех не демонтированных источников не должна превышать порог его работоспособности). Таким образом, выбирается траектория движения по мегаполисам (4), которая при каждом посещении того или иного мегаполиса минимизирует наибольшее (вдоль всей траектории движения (4)) радиационное воздействие со стороны недемонтированных источников на роботизированную систему.

Придерживаемся традиционной модели (см. [13]), в которой излучение в точке пространства от i -го источника обратно пропорционально квадрату евклидова расстояния до данного источника и прямо пропорционально интенсивности его излучения Γ_i ; величина излучения в точке пространства в любой момент времени от всех не демонтированных излучающих объектов получается суммированием воздействий от каждого источника, активного на данный момент. Расчет излучения в ближней зоне не демонтированного источника имеет специфику.

а) Облучение при перемещении внутри ближней зоны непосредственно на источник $s \in \overline{1, N}$ от точки входа в ближнюю зону к собственно излучающему объекту (напомним, что мы приближаемся к источнику на расстояние L_s , гарантирующее доступ системы к нему для выключения) при воздействии в каждый момент времени облучения от данного источника. В этом случае мы имеем дело с компонентой внутренних работ. Радиационное воздействие на расстоянии r от источника с индексом s равно $2 \Gamma_s / r^2$.

б) Облучение от источника при иных перемещениях, не связанных с переходом на данный источник для его демонтажа. Речь идет об оценивании воздействия активного источника вне его ближней зоны. Величина радиационного воздействия на расстоянии r от излучающего объекта с индексом s равна Γ_s / r^2 .

Отметим, что умножение на 2 в а) в отличие от б) продиктовано повышенным радиационным фоном в ближней зоне, создаваемым источником излучения. В каж-

дой точке траектории, воздействия от не демонтированных источников суммируются, при этом возможны следующие варианты движения:

1) Перемещение из базы $x \in X^0$ в точку входа в первую (по порядку посещения) ближнюю зону $x_{1,1} \in M_{\alpha(1)}$ (см. (4)). Используется только вариант б) оценивания воздействия каждого источника.

2) Перемещение из точки выхода $x_{i,2} \in M_{\alpha(i)}$ из ближней зоны демонтированного источника $\alpha(i)$, $i \in \overline{1, N-1}$, в точку входа следующей (по порядку посещения) ближней зоны $x_{i+1,1} \in M_{\alpha(i+1)}$ (см. (4)). Используется только вариант б) оценивания воздействия каждого не демонтированного источника.

3) Перемещение от точки входа в ближнюю зону $x_{i,1} \in M_{\alpha(i)}$ источника $\alpha(i)$, $i \in \overline{1, N}$, к источнику с индексом $\alpha(i)$ для его демонтажа (система останавливается на расстоянии $L_{\alpha(i)}$ от источника, достаточном для действия манипулятора). В данном случае используются оба варианта (воздействие от источника, подлежащего демонтажу оценивается посредством а), а облучение от прочих активных источников – с помощью б).

4) Перемещение внутри ближней зоны демонтированного источника $\alpha(i)$, $i \in \overline{1, N}$, к точке выхода из данной ближней зоны $x_{i,2} \in M_{\alpha(i)}$. В данном случае используется только вариант б) – воздействуют оставшиеся не выключенными радиоактивные объекты.

Напомним, что в каждой точке траектории, возможные этапы которой представлены вариантами 1)–4), величины облучения от каждого активного источника суммируются. Также отметим, что 1) и 2) относятся к внешним перемещениям, а функция затрат c (см. (12)) является наибольшей вдоль данного элементарного перемещения величиной (мгновенной) дозы облучения. При этом 3) и 4) в совокупности составляют внутренние работы, а функция c_s затрат для s -го демонтируемого источника (см. (12)) есть наибольшая (мгновенная) доза облучения вдоль составного перемещения с двумя этапами: первый этап типа 3), а второй – типа 4). Таким образом, заданы неаддитивные функции агрегирования затрат.

Рассмотренные алгоритмические конструкции были реализованы в виде программы для ПЭВМ, работающей под управлением 64-х разрядной операционной системы семейства Windows (начиная с Windows 7), написанной на языке программирования C++; вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Имеется возможность графического представления траектории движения по мегаполисам, а также увеличения отдельных участков графика; данное изображение может быть сохранено в файл графического формата bmp. Исходные данные и результаты счета хранятся в текстовом файле специальной структуры.

Рассмотрим пример, в котором $N = 33$, а мегаполисы заданы в виде равномерных сеток на окружностях, внутри которых расположены точечные объекты, соответствующие источникам излучения. Множество начальных состояний $X^0 = \{(-70, -95); (0, 0); (80, -90); (90, 35)\}$. Количество адресных пар, составляющих множество \mathbf{K} равно 34. Величины интенсивности источников Γ_i , $i \in \overline{1, N}$, различны и варьируются в пределах от 1,3 до 4,9, а дистанции демонтажа источников одинаковые: $L_i = 1,3 \forall i \in \overline{1, N}$.

Вычислительный эксперимент проводился на персональном компьютере с процессором Intel Core i7 с объемом ОЗУ 64 гБ и установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1.

Рассмотрим 3 варианта решения задачи на ПЭВМ, отличающиеся значением параметра \mathbf{a} в (13). Нас интересует величина \mathbb{V} (17) и оптимальная траектория, доставляющая данный результат. На основании \mathbb{V} принимается решение о целесообразности применения той или иной роботизированной системы (если значение \mathbb{V} (17) превышает порог радиационной стойкости оборудования, то данными средствами задача решена быть не может; требуется иное оборудование или его дополнительная защита от излучения).

Пусть $\mathbf{a} = 1$ (задача «на узкие места»). Получены следующие результаты. Оптимальная мгновенная доза облучения $\mathbb{V} = 22,845$. Время счета составило 5 часов 11 минут 20 секунд. Выбрана база (начало движения) $(0,0)$. Финальный пункт движения – УП $(-68,-30;-48,-30)$. График траектории движения приведен на рис. 1. Пусть

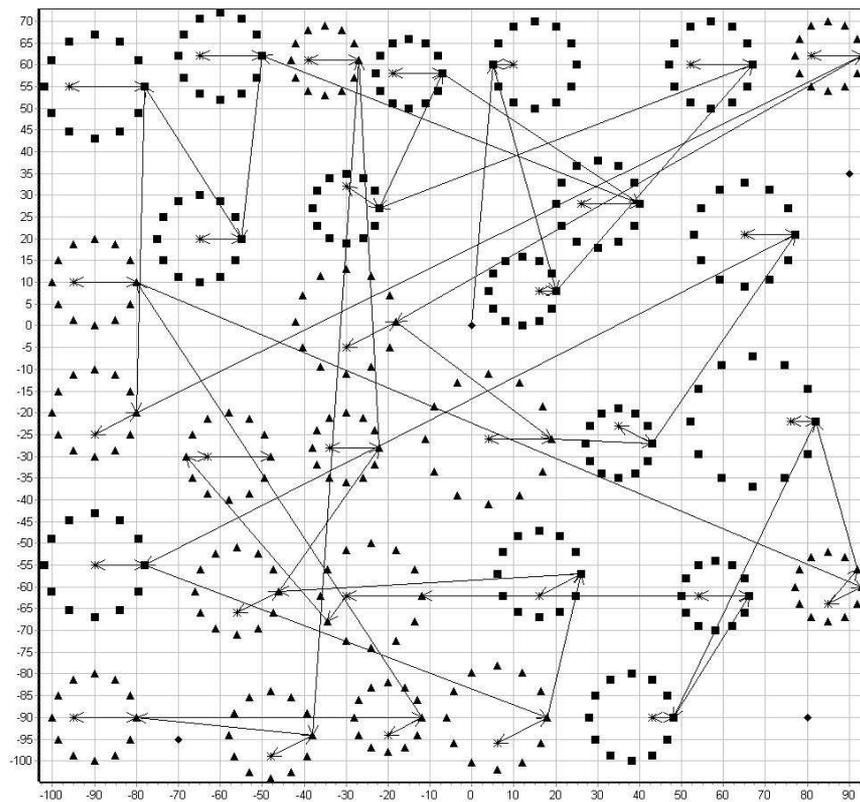


Рис. 1. Маршрут и трасса при значении \mathbf{a} , равном 1

$\mathbf{a} = 0,9$; имеем вариант задачи «на узкие места» с превалированием начальных фрагментов решения. Получены следующие результаты. Оптимальная мгновенная доза облучения $\mathbb{V} = 10,301$. Время счета составило 5 часов 12 минут 4 секунды. Выбрана база (начало движения) $(0,0)$. Финальный пункт движения – УП $(5,60;25,60)$. График траектории движения приведен на рис. 2.

Пусть теперь $\mathbf{a} = 1,1$, что соответствует варианту задачи «на узкие места» с доминированием конечных фрагментов решения. Получены следующие результаты. Оптимальная мгновенная доза облучения $\mathbb{V} = 132,843$. Время счета составило 5 часов 11 минут 29 секунд. Выбрана база (начало движения) $(-70,-95)$. Финальный пункт движения – УП $(-79,61, -49;-78,-55)$. График траектории движения приведен на рис. 3.

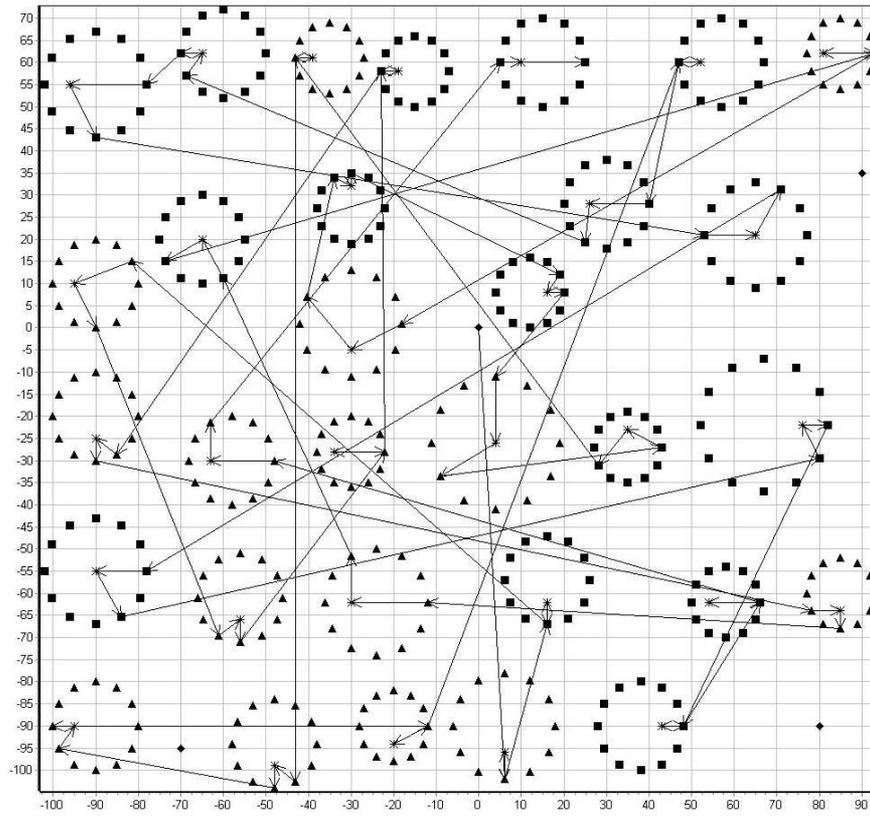


Рис. 2. Маршрут и трасса при значении α , равном 0,9

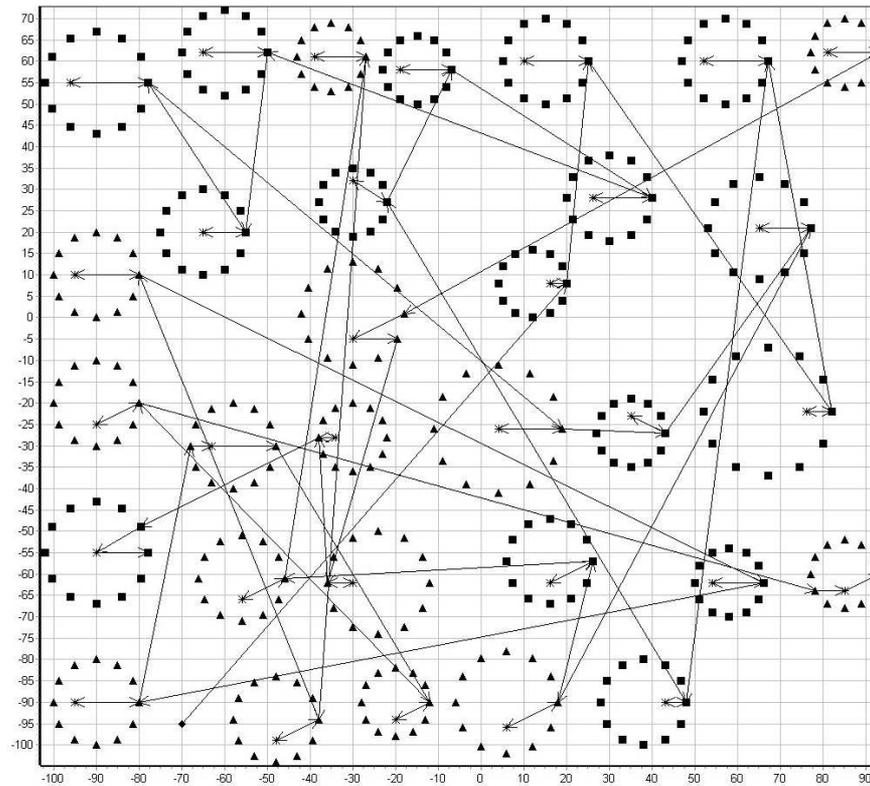


Рис. 3. Маршрут и трасса при значении α , равном 1,1

Работа выполнена в рамках проекта «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники» по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президентом Российской академии наук.

Литература

1. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Вопросы теории / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 9. – С. 3–34.
2. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982.
3. Gutin, G. The Traveling Salesman Problem and Its Variations / G. Gutin, A.P. Punnen. – Berlin: Springer, 2002.
4. Гимади, Э.Х. Экстремальные задачи на множествах перестановок / Э.Х. Гимади, М.Ю. Хачай. – Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
5. Беллман, Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере / Р. Беллман // Кибернетический сборник. Т. 9. – М.: Мир, 1964. – С. 219–228.
6. Хелд, М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения / М. Хелд, Р.М. Карп // Кибернетический сборник. Т. 9. – М.: Мир. 1964. С. 202–218.
7. Сергеев, С.И. Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования / С.И. Сергеев // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 7. – С. 144–150.
8. Литл, Дж. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере / Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел // Экономика и математические методы. – 1965. – Т. 1. – С. 94–107.
9. Ченцов, А.Г. Маршрутизация перемещений при динамических ограничениях: задача «на узкие места» / А.Г. Ченцов, А.А. Ченцов // Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2016. – Т. 26, № 1. – С. 121–140.
10. Сесекин, А.Н. Маршрутизация с абстрактной функцией агрегирования стоимостей перемещений / А.Н. Сесекин, А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 240–264.
11. Ченцов, А.Г. Об одной задаче на узкие места / А.Г. Ченцов, Я.В. Салий // Тезисы Всероссийской научно-практической конференции «Статистика. Моделирование. Оптимизация – 2011». – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ. – С. 85–91.
12. Ченцов, А.Г. Динамическое программирование в «обобщенной задаче на узкие места» и оптимизация точки старта / А.Г. Ченцов, А.А. Ченцов, А.Н. Сесекин // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2018. – Т. 28, № 3. – С. 348–363.
13. Коробкин, В.В. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / В.В. Коробкин, А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, А.Г. Ченцов. – М.: Новые технологии, 2002.
14. Ченцов, А.Г. Модельный вариант задачи о последовательной утилизации источников излучения (итерации на основе оптимизирующих вставок) / А.Г. Ченцов, А.А. Ченцов // Известия Института математики и информатики УдГУ. – 2017. – Т. 50. – С. 83–109.

15. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории / А.Г. Ченцов. – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2008.
16. Дьедонне Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964.
17. Куратовский, К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. – М.: Мир, 1970.
18. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО, 2000.
19. Ченцов, А.Г. Оптимизация точки старта в задаче последовательного обхода мегаполисов при наличии условий предшествования / А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 2. – С. 83–95.
20. Ченцов, А.А. Экстремальная задача маршрутизации «на узкие места» с ограничениями в виде условий предшествования / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 129–142.
21. Ченцов, А.Г. Об одной задаче маршрутизации с внутренними работами / А.Г. Ченцов, И.Б. Чеблоков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – Вып. 1. – С. 96–119.
22. Ченцов, А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ / А.Г. Ченцов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2013. – Вып. 1. – С. 59–82.
23. Lawler, E.L. Efficient Implementation of Dynamic Programming Algorithms for Sequencing Problems / E.L. Lawler // Stichting Mathematisch Centrum. – 1979. – P. 1–16.
24. Ченцов, А.Г. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями / А.Г. Ченцов, А.А. Ченцов // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 1. – С. 41–54.

Александр Георгиевич Ченцов, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; кафедра прикладной математики и механики, Уральский федеральный университет (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov@imm.uran.ru.

Алексей Александрович Ченцов, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov.a@binsys.ru.

Александр Николаевич Сесекин, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и механики, Уральский федеральный университет; отдел оптимального управления, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), a.n.sesekin@urfu.ru.

Поступила в редакцию 10 августа 2019 г.

ON ONE ROUTING PROBLEM WITH NON-ADDITIVE COST AGGREGATION

A.G. Chentsov^{1,2}, A.A. Chentsov¹, A.N. Sesekin^{1,2}

¹Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation

² Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

E-mails: chentsov@imm.uran.ru, chentsov.a@binsys.ru, a.n.sesekin@urfu.ru

We investigate the problem on sequential round of megalopolises (nonempty finite sets) with preceding conditions and nonadditive aggregation of costs. We suppose that a variant of aggregation with respect to “external” phase (by the estimation of the system of cycles, which are determined every time by the “external” movement and internal jobs) corresponds to the “bottleneck” problem with the correction parameter. At the “internal” phase (within the cycle), an aggregation of costs with respect to external movement and carrying out works can be arbitrary. We construct nonadditive variant of the procedure of dynamic programming (DP) including economical variant, which uses preceding conditions. In the form of a program for a personal computer, we realize the optimal algorithm based on DP for the statement oriented to the problem on control of an autonomous system, which works in aggressive environment and implements a sequential process of dismantling of the sources of exposures (of this environment) to the system. Such a statement can correspond to the engineering problem on sequential dismantling of the sources of radiation under emergency situations on the nuclear power plants in the case of application of the robotic system with electronic equipment, which can work only if tolerances are complied with respect to influence of radiation during entire time interval. For this variant of the general statement, we implement a calculation experiment by means of a personal computer.

Keywords: dynamic programming; route; preceding conditions.

References

1. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The Travelling Salesman Problem. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, pp. 1147–1173.
2. Garey R., Johnson D. *Vichislitelnye mashiny i trudnoreshaemye zadachi* [Computers and Intractability]. Moscow, Mir, 1982.
3. Gutin G. Punnen A.P. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*. Berlin, Springer, 2002.
4. Gimadi E.H., Khachay M.Yu. *Ektremalnye zadachi na mnogestvah perestanovok* [Extreme Permutation Problems]. Ekaterinburg, UMC UPI, 2016.
5. Bellman R. Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1962, vol. 9, pp. 61–63. DOI: 10.1145/321105.321111
6. Held M., Karp R.M. A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210.
7. Serveev S.I. Algorithms for the Minimax Problem of the Traveling Salesman. I. An Approach Based on Dynamic Programming. *Automation and Remote Control*, 1995, vol. 56, pp. 1027–1032.
8. Little J., Murthy K., Sweeny D., Karel C. An Algorithm for the Travelling Salesman Problem. *Operation Research*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 972–989. DOI: 10.1287/oper.11.6.972.

9. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Routing of Displacements with Dynamic Constraints: “Bottleneck Problem”. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 121–140. (in Russian) DOI: 10.20537/vm160110
10. Seseкин A.N., Chentsov A.A., Chentsov A.G. [Routing with an Abstract Function of Travel Cost Aggregation]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 240–264. (in Russian)
11. Chentsov A.G., Saliy Ya.V. [A Problem on a Narrow Place]. *Vserossiiskaya nauchno-prakticheskoy konferentsii “Statistika. Modelirovanie. Optimizatsiya”*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2011, pp. 85–91. (in Russian)
12. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Seseкин A.N. Dynamic Programming in the Generalized Bottleneck Problem and the Start Point Optimization. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, 2018. vol. 28, no. 3, pp. 348–363. (in Russian) DOI: 10.20537/vm180306
13. Korobkin V.V., Seseкин A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* [Routing Methods and Their Applications in Improving the Safety and Efficiency of Operation of Nuclear Power Plants]. Moscow, Noviyе tekhnologii, 2012. (in Russian)
14. Chentsov A.G., Chentsov A.A. A Model Variant of the Problem about Radiation Sources Utilization (Iterations Based on Optimization Insertions). *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki Udmurtskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2017, vol. 50, pp. 83–109. (in Russian) DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-08
15. Chentsov A.G. *Extremalnie zadachi marshrutizatsiyi i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* [Extremal Problems of Routing and Assignment of Tasks: Questions Theories]. Izhevsk, Izhevsk Institute of Computer Science, 2008. (in Russian)
16. Dieudonne J. *Foundations of Modern Analysis*. New York, Academic Press, 1960.
17. Kuratowski K, Mostowski A. *Sets Theory*. North-Holland Publishing Company, 1967.
18. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. *Introduction to Algorithms*. London, The MIT Press, 1990.
19. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Optimization of the Start Point in the GTSP with the Precedence Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 83–95. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp180207
20. Chentsov A.G., Chentsov A.A. [Extremal Bottleneck Routing Problem with Constraints in the Form of Precedence Conditions]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 129–142. (in Russian)
21. Cheblokov I.B., Chentsov A.G. [About One Route Problem with Interior Works]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, 2012, no. 1, pp. 96–119. (in Russian) DOI: 10.20537/vm120109
22. Chentsov A.G. [To Question of Routing of Works Complexes]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, 2013, no. 1, pp. 59–82. (in Russian) DOI: 10.20537/vm130107
23. Lawler E.L. *Efficient Implementation of Dynamic Programming Algorithms for Sequencing Problems*. Stichting Mathematisch Centrum, 1979, pp. 1–16.
24. Chentsov A.G., Chentsov A.A. [To the Question of Finding the Value of a Route Problem with Restrictions]. *Problemy upravleniya i informatiki*, 2016, no. 1, pp. 41–54. (in Russian)

Received August 10, 2019