

ДИНАМИКА ТОЧЕК ОТРЫВА ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ УДАРЕ ПЛАВАЮЩЕГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

М.В. Норкин, Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону,
Российская Федерация

Рассматривается плоская задача о вертикальном отрывном ударе прямоугольного цилиндра, полностью погруженного в идеальную, несжимаемую, тяжелую жидкость. Предполагается, что после удара цилиндр движется с постоянной скоростью в глубь жидкости без вращения. Особенностью этой задачи является то, что в результате удара происходит отрыв жидкости от твердой поверхности с последующим образованием присоединенной каверны за телом. Основной целью работы является изучение процесса схлопывания тонкой каверны, происходящего при небольших числах Фруда, соответствующих малым скоростям движения цилиндра. Исследование задачи проводится с помощью специальной математической модели, основанной на предположении о малости возмущений свободных границ жидкости. В математическом плане дело сводится к решению динамической смешанной краевой задачи теории потенциала с граничными условиями типа неравенств. Полученные на ее основе численные расчеты сравниваются с результатами асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость; отрывной удар; динамика точек отрыва; число Фруда; число кавитации.

Введение

При ударном взаимодействии твердого тела с жидкостью, во многих случаях, необходимо учитывать явление отрыва частиц жидкости от твердой поверхности. В классической теории удара первоначальная зона отрыва заранее неизвестна и определяется в момент, непосредственно следующий после удара, на основании решения смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела [1, 2]. После удара образуется зона пониженного давления вблизи тела, ограниченная движущейся свободной границей (присоединенная каверна). Описанный процесс может сопровождаться искусственной подачей газа в каверну со стороны тела (искусственная кавитация). Ранее такие задачи изучались с помощью асимптотического анализа на малых временах в частном случае кругового цилиндра [3–5]. Важным элементом исследования является динамика точек отрыва, которая определяется из условия Кутты–Жуковского. На основе полученного решения находится давление на смоченной поверхности тела, которое по физическому смыслу должно оставаться неотрицательным. В работах [3–5] основное внимание уделялось большим числам Фруда ($Fr \geq 1$), где асимптотический анализ на малых временах является наиболее эффективным. При уменьшении числа Фруда диапазон применимости асимптотических формул уменьшается, что затрудняет их использование без альтернативных подходов. В работе [6] для исследования задачи удара при малых числах Фруда была предложена математическая модель, основанная на полном пренебрежении квадратичными членами и возмущениями свободных границ жидкости. При этом геометрическая нелинейность в задаче была сохранена благодаря неравенствам, которые формулировались в зонах отрыва и контакта. Вследствие этого

функциональная зависимость точек отрыва от времени носила нелинейный характер. Было показано, что для чисел Фруда, изменяющихся в диапазоне $0,2 - 0,5$, полученные численные результаты хорошо согласуются с данными асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах. В настоящей статье предлагается сохранить нелинейные слагаемые в модели, предложенной в [6], оставив без изменения сделанные в ней предположения. В частности, существенным является предположение о пренебрежимой малости деформаций внутренней и внешней свободных границ жидкости при малых и умеренных числах Фруда ($Fr \leq 0,5$). Отметим, что в плоской гидродинамике круг представляет собой тело идеальной формы и сделанные для него выводы не всегда носят общий характер. Поэтому важным является исследование задачи для тел другой формы. Дальнейшие рассуждения проводятся на примере плоской задачи о вертикальном отрывном ударе прямоугольного цилиндра, расположенного под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Численные расчеты, полученные с использованием предложенной модели, сравниваются с результатами асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах. На основе проведенных исследований моделируется процесс схлопывания каверны с учетом подъема внутренней свободной границы жидкости. Заметим, что предложенная модель схлопывания справедлива только при малых числах Фруда. При увеличении числа Фруда картина может измениться. Например, можно предположить, что после удара произойдет отрыв газового пузыря от тела или образуется кумулятивная струйка, направленная к телу. Эти и многие другие вопросы, связанные с динамикой каверн после удара, остаются неизученными.

Среди близких работ, в которых возникает проблема кавитационного отрыва жидкости от тела, отметим статьи, посвященные прониканию твердых тел в идеальную и несжимаемую жидкость [7, 8].

1. Общая постановка задачи

Рассматривается вертикальный удар прямоугольного цилиндра, полностью погруженного в идеальную, несжимаемую, тяжелую жидкость. После удара цилиндр движется в глубь жидкости с постоянной скоростью без вращения. В результате удара происходит мгновенное образование зоны отрыва, которая характеризуется тем, что импульсивное давление в ней равняется нулю. Дальнейшее развитие этого процесса связано с динамикой присоединенной каверны. При малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда ($Fr \leq 0,5$), возмущением свободных границ жидкости можно пренебречь и свести изучение вопроса об уменьшении зоны отрыва (о схлопывании тонкой каверны) к исследованию динамики точек отрыва. В естественной ситуации, когда в каверне образуются пары жидкости или газа с давлениями, близкими к нулю, время схлопывания каверны оказывается близким к ударному промежутку (схлопывание происходит практически мгновенно). Поэтому, при малых скоростях движения цилиндра, задачу целесообразно рассматривать с учетом искусственной кавитации. Предполагается, что сразу после удара со стороны тела в сторону жидкости выделяется газ постоянного давления. При увеличении давления в каверне движение точек отрыва замедляется и процесс схлопывания тонкой каверны становится хорошо обозримым. В работе рассматриваются случаи, для которых точки отрыва монотонно сближаются. Последнее условие выполняется, когда

давление в каверне не является очень большим.

Согласно классической теории удара и теоремы Лагранжа, исследование задачи проводится в рамках потенциальных течений идеальной и несжимаемой жидкости. При этом момент, непосредственно следующий после удара, соответствует начальному моменту времени. Общая математическая постановка задачи формулируется в безразмерных переменных, в подвижной системе координат, связанной с цилиндром (рис. 1):

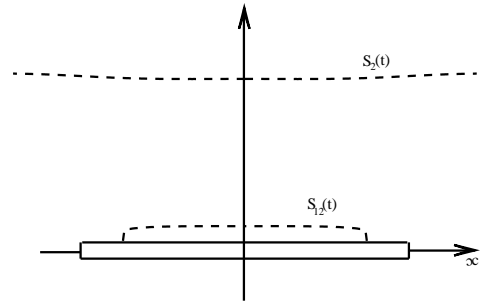


Рис. 1. Постановка задачи

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_y, \quad R \in S_{11}(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(y + h(t) - H) - 0,5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \dot{h}(t) = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x, t) = 0, \quad R \in S_2(t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b - h(t); \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R, \quad (7)$$

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \eta(x, 0) = 0. \quad (8)$$

Более подробная запись условия непротекания (2) определяется равенствами:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \dot{h}(t), \quad y = \varepsilon, \quad c(t) < |x| < 1; \quad y = -\varepsilon, \quad -1 < x < 1; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm 1, \quad -\varepsilon < y < \varepsilon.$$

Течение жидкости в начальный момент времени находится на основании классической модели удара с отрывом [1]:

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \Phi_0 = 0, \quad R \in S_2(0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = -n_y, \quad \Phi_0 \leq 0, \quad R \in S_{11}(0), \quad (10)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \geq -n_y, \quad \Phi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0), \quad (11)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b; \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R. \quad (12)$$

Наличие неравенств говорит о том, что задача (9) – (12) является задачей со свободной границей. В предельном случае горизонтальной пластинки, расположенной в слое жидкости конечной глубины, она имеет аналитическое решение [9].

Безразмерные величины вводятся по формулам:

$$t' = \frac{a}{v_0} \cdot t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = av_0\Phi, \quad p' = \rho v_0^2 p, \quad v_0 = -V_y,$$

где штрихи относятся к размерным величинам. Подвижные координаты x, y выражаются через неподвижные X, Y с помощью равенств: $X = x, Y = y + h(t)$.

В работе используются следующие обозначения: $\Phi(x, y, t)$ – потенциал скоростей, записанный в подвижной системы координат; $\Omega(t)$ – область, заполненная жидкостью; $S_1 = S_{11}(t) \cup S_{12}(t)$ – поверхность прямоугольного цилиндра, причем $S_{11}(t) = \{c(t) \leq |x| \leq 1, y = \varepsilon\} \cup \{-1 \leq x \leq 1, y = -\varepsilon\} \cup \{x = \pm 1, -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon\}$ является зоной безотрывного обтекания, а $S_{12}(t) = \{y = \varepsilon, -c(t) < x < c(t)\}$ представляет собой зону отрыва; $x = \pm c(t), y = \varepsilon$ – координаты точек отрыва; $\bar{V} = (0, V_y)$ – скорость цилиндра в момент удара; $\dot{h}(t)$ – проекция безразмерной скорости движения цилиндра на ось y ($\dot{h}(t) = -1$); $2a, 2b$ – длины горизонтальной и вертикальной сторон прямоугольника; $Y = -H_b, X = \pm H_R$ – дно и стенки бассейна; H – глубина погружения цилиндра в начальный момент времени; R – радиус-вектор с координатами (x, y) (начало координат находится в центре прямоугольника, ось y направлена вертикально вверх). Картина течения жидкости является симметричной относительно оси y .

В задачу (1) – (8) входят следующие безразмерные параметры:

$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho v_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a},$$

где Fr – число Фруда; χ – безразмерная разность давлений (число кавитации); p_a и p_c – атмосферное давление и давление в каверне; g – ускорение свободного падения; ε – отношение сторон прямоугольника.

На внешней и внутренней свободных границах задаются давления (динамические условия), и предполагается, что жидкие частицы не покидают этих границ (кинематические условия) (формулы (3) – (6)). На $S_2(t)$ действует атмосферное давление p_a , а на $S_{12}(t)$ – давление $p = p_c$, где p_c соответствует естественной ($p_c \approx 0$) или искусственной кавитации.

Формы внутренней и внешней свободных границ относительно подвижной системы координат определяются по формулам:

$$y = \varepsilon + \eta(x, t); \quad y = H + \xi(x, t) + t.$$

Дифференцируя эти равенства по времени вдоль траектории движения жидкой частицы, приходим к кинематическим уравнениям (4) и (6). На основании интеграла Коши – Лагранжа, записанного в подвижной системе координат, получаем динамические условия (3) и (5).

Положение точек отрыва внутренней свободной границы жидкости в каждый момент времени определяется из условия Кутты – Жуковского.

2. Асимптотический анализ задачи на малых временах

В статьях [3–5] был предложен асимптотический метод решения динамических кавитационных задач удара на малых временах с учетом динамики точек отрыва

внутренней свободной границы жидкости. С его помощью была исследована задача об отрывном ударе кругового цилиндра, плавающего на поверхности жидкости или полностью в нее погруженного. В настоящем параграфе, в очень краткой форме, главным образом для полноты изложения, объясняется применение этого метода к задаче для прямоугольного цилиндра. Приведенные асимптотические формулы используются в дальнейшем для сравнения с численными результатами при малых числах Фруда (результаты подробного асимптотического анализа данной задачи с конкретными примерами решений при больших числах Фруда составляют содержание отдельной статьи).

Для построения асимптотики решения поставленной задачи на малых временах, необходимо зафиксировать положение точек отрыва с помощью следующей замены переменных:

$$x_1 = x^{\alpha(t)}, \quad \alpha(t) = \frac{\ln c_0}{\ln c(t)}; \quad y_1 = y, \quad x > 0,$$

где $x = c(t)$, $y = \varepsilon$ – координаты точки отрыва в момент времени t , $c(0) = c_0$. В силу геометрической симметрии задачи, дальнейшие рассуждения проводятся при $x > 0$.

Решение преобразованной задачи ищется в виде асимптотических разложений ($t \rightarrow 0$):

$$\varphi(x_1, y_1, t) = \varphi_0(x_1, y_1) + t\varphi_1(x_1, y_1) + o(t), \quad (13)$$

$$\mu(x_1, t) = t\mu_0(x_1) + t^2\mu_1(x_1) + o(t^2), \quad (14)$$

$$\zeta(x_1, t) = t\zeta_0(x_1) + t^2\zeta_1(x_1) + o(t^2), \quad (15)$$

$$c(t) = c_0 + c_1t + o(t), \quad (16)$$

$$\varphi(x_1, y_1, t) = \Phi(x_1^\gamma, y_1, t); \quad \zeta(x_1, t) = \eta(x_1^\gamma, t); \quad \mu(x_1, t) = \xi(x_1^\gamma, t); \quad \gamma = [\alpha(t)]^{-1}.$$

Подставляя равенства (13) – (16) в задачу (1) – (8) и применяя специальные процедуры, связанные с переносом краевых условий на первоначально невозмущенный уровень и с приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях t , приходим для определения функций φ_0 и φ_1 к смешанным краевым задачам для уравнений Лапласа и Пуассона в области $\Omega(0)$. Задача, возникающая для функции φ_0 , совпадает с решением классической задачи об ударе с отрывом (9) – (12). Другая функция сводится к гармонической при помощи подстановки:

$$\varphi_1 = cx_1 \ln x_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} + u, \quad c = \frac{c_1}{c_0 \ln c_0},$$

где функция u , не зависящая от c , удовлетворяет уравнению Лапласа и следующим граничным условиям на первоначально невозмущенных свободных границах:

$$u + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1} + 0,5(\nabla \varphi_0)^2 + Fr^{-2}(y_1 - H) - 0,5\chi = 0, \quad y_1 = \varepsilon, \quad 0 < x_1 < c_0,$$

$$u + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1} + 0,5\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1}\right)^2 = 0, \quad y_1 = H, \quad 0 < x_1 < H_R.$$

В зоне контакта, а также на оси симметрии и на боковых стенках нормальная производная функции u обращается в ноль. На дне выполняется условие $u_{y_1} = \varphi_{0x_1x_1}$.

После решения краевых задач для φ_0 и u коэффициент c_1 находится из условия регулярности решения исходной задачи в точке отрыва. При этом затрагиваются весьма тонкие вопросы, связанные с асимптотическим поведением гармонической функции вблизи точки раздела краевых условий. Проводя рассуждения, аналогичные [3–5], придем для определения величины c_1 к следующим равенствам:

$$c_1 = -\frac{a_2}{a_1}, \quad a_1 = \lim_{x_1 \rightarrow c_0+0} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} \sqrt{x_1 - c_0}, \quad a_2 = \lim_{x_1 \rightarrow c_0+0} \frac{\partial u}{\partial x_1} \sqrt{x_1 - c_0}.$$

Таким образом, чтобы воспользоваться асимптотической формулой (16), нужно найти точку отрыва (c_0, ε) в начальный момент времени на основании решения классической задачи об ударе с отрывом (9) – (12) и определить коэффициент c_1 (начальную скорость движения точки отрыва) с помощью решения двух задач (для φ_0 и u) и вычисления пределов.

Асимптотики малых времен позволяют последовательно рассматривать вопросы, связанные с динамикой точек отрыва и определением форм внутренней и внешней свободных границ жидкости. Ниже приводятся только окончательные формулы для коэффициентов асимптотических разложений (14) и (15):

$$\zeta_0(x_1) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1}(x_1, \varepsilon) + 1, \quad \zeta_1(x_1) = f(x_1, \varepsilon); \quad \mu_0(x_1) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1}(x_1, H),$$

$$\mu_1(x_1) = f(x_1, H), \quad f(x_1, y_1) = cx_1 \ln x_1 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1 \partial y_1} + 0,5 \frac{\partial u}{\partial y_1}.$$

Отметим, что второй член асимптотической формулы (15) имеет в точке отрыва корневую особенность. Однако, несмотря на это, анализ внутренней свободной границы жидкости все-таки удается провести без построения специальных погранслойных решений. Это объясняется тем, что на малых временах указанная особенность проявляет себя только в очень маленькой окрестности точки отрыва и на форму каверны практически не влияет. Так, рис. 1, соответствующий постановке задачи, выполнен на основании приведенных асимптотических формул при $Fr = 0,5$, $\chi = -4$, $\varepsilon = 0,1$, $t = 0,1$, $H = 1$, $H_b = 3$, $H_R = 4$. Также обратим внимание на то, что в маленьких окрестностях угловых точек прямоугольника возникают отрицательные давления и нарушается условие Кутты – Жуковского. Однако на малых временах эту проблему можно отделить от основной проблемы кавитационного отрыва, вызванного ударом, и провести анализ задачи без учета влияния угловых точек. Заметим, что при малых скоростях движения цилиндра влияние угловых точек становится практически незаметным.

3. Решение задачи при малых числах Фруда

В настоящем параграфе предлагается обобщить линеаризованную модель, предложенную в [6], сохранив в ней нелинейные слагаемые. При малых числах Фруда, которые соответствуют небольшим скоростям движения цилиндра, возмущением внутренней свободной границы можно пренебречь и свести вопрос о схлопывании тонкой каверны к изучению вопроса о динамике точек отрыва. Предполагается, что после удара точки отрыва движутся по направлению друг к другу и схлопывание происходит тогда, когда зона отрыва полностью исчезает. В математическом плане дело

сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с нелинейными граничными условиями типа неравенств:

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t); \quad \Phi = U(\Phi), \quad y = H - h(t), \quad (17)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_y, \quad G(\Phi) \geq 0, \quad R \in S_{11}(t), \quad (18)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} \geq \dot{h}(t)n_y, \quad G(\Phi) = 0, \quad R \in S_{12}(t), \quad (19)$$

$$G = 0, \quad 5\chi t - \Phi + \Phi_0 + F(\Phi) - Fr^{-2}t(y - H) - Fr^{-2} \int_0^t h(s)ds, \quad (20)$$

$$F(\Phi) = \int_0^t \dot{h}(s) \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, y, s)ds - 0,5 \int_0^t (\nabla\Phi)^2(x, y, s)ds, \quad (21)$$

$$U(\Phi) = -0,5 \int_0^t (\nabla\Phi)^2(x, H - h(t), t)dt. \quad (22)$$

Существенное отличие математической модели (17) – (22) от линеаризованной модели, предложенной в [6], состоит в том, что после учета нелинейных членов (21), (22) время уже не входит в задачу как параметр. Поэтому для ее решения применяется комбинированный подход, включающий в себя метод шагов по времени в сочетании со специальным итерационным методом решения задач со свободными границами. Нет сомнения в том, что при достаточно малых скоростях движения цилиндра нелинейными слагаемыми в модели можно будет полностью пренебречь. Однако скорости, очень близкие к нулю, не представляют большого интереса для практики. Поэтому важно как можно точнее установить диапазон изменения скорости цилиндра (или числа Фруда), где нелинейные слагаемые не оказывают существенного влияния на основные характеристики процесса и, в первую очередь, на динамику точек отрыва. Другими словами, нужно определить границы применимости линеаризованной модели, которая характеризуется равенствами $F(\Phi) = 0$, $U(\Phi) = 0$. Именно в этом заключается основной смысл нелинейной модели (17) – (22). Преимущество линеаризованной модели состоит в том, что она легко обобщается на плоские тела произвольной формы (предполагается, что граница тела допускает кусочно-гладкую параметризацию). Для ее решения могут быть использованы известные численные и аналитические методы, хорошо себя зарекомендовавшие при решении классической задачи об ударе с отрывом. Попутно отметим, что асимптотики малых времен, описанные выше, строятся тоже с учетом нелинейности. Таким образом, сравнение численных результатов, полученных на основе рассматриваемых подходов, позволяет оценить влияние нелинейных членов и достоверно определить диапазон применимости линеаризованной модели. Существенно отметить, что, в отличие от линеаризованной модели, асимптотики малых времен очень сложно обобщаются на плоские тела другой формы, что связано с необходимостью учета динамики точек отрыва. Численное решение нелинейной модели (17) – (22) также оказывается более сложным из-за комбинированного подхода.

Физический смысл краевых условий типа неравенств объясняется по аналогии с [6]. Решение задачи (17) – (22) должно удовлетворять условию Кутты – Жуковского в точках отрыва и условию положительности давления на смоченной поверхности тела. Асимптотический анализ линеаризованной модели в окрестности точки раздела краевых условий показывает, что условие Кутты – Жуковского, по крайней мере локально, оказывается равносильным системе неравенств вида (18) – (19). Причем динамическое условие в (18) является следствием неравенства $p \geq p_c$ (оно интегрируется по времени от 0 до t). Справедливость этого неравенства на всей смоченной поверхности тела подтверждается результатами асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах и корректностью математической постановки задачи при $F(\Phi) = 0$, $U(\Phi) = 0$. Таким образом, в случае искусственной кавитации и малых чисел Фруда формулируется более сильное динамическое условие на смоченной поверхности тела (при $p_c = 0$ оно совпадает с условием неотрицательности давления). При увеличении числа Фруда неравенство $p \geq p_c$ может нарушаться [5–6]. Кинематическое условие в виде неравенства в зоне отрыва приближенно означает, что жидкая частица не может входить внутрь твердого тела. Точность этого неравенства зависит от справедливости предположения о малости возмущения внутренней свободной границы жидкости. Таким образом, в случае линеаризованной модели условие Кутты – Жуковского равносильно системе неравенств, которая используется при численном счете. Для нелинейной модели аналогичные выводы делаются на каждом шаге по времени. В результате динамика точек отрыва определяется из условия Кутты – Жуковского, а неравенство для давления проверяется после решения задачи.

4. Численная реализация и анализ результатов

Для решения смешанной краевой задачи теории потенциала (17) – (22) с нелинейными граничными условиями типа неравенств применяется метод шагов по времени. На каждом шаге по времени возникает задача с линейными односторонними ограничениями, совпадающая по своей структуре с классической задачей об ударе с отрывом. С ее помощью определяется новое положение точек отрыва. Заменяя в (21) – (22) интегралы на конечные суммы с помощью формулы левых прямоугольников, получим на k -м шаге итерационного процесса следующую задачу:

$$\Delta\Phi_k = 0, \quad R \in \Omega(t_k); \quad \Phi_k = U_k, \quad y = H + t_k, \quad (23)$$

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial n} = -n_y, \quad G_k \geq 0, \quad R \in S_{11}(t_k), \quad (24)$$

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial n} \geq -n_y, \quad G_k = 0, \quad R \in S_{12}(t_k), \quad (25)$$

$$G_k = 0, 5\chi t_k - \Phi_k + \Phi_0 + F_k - Fr^{-2}(y - H)t_k + 0, 5t_k^2 Fr^{-2}, \quad (26)$$

$$F_k = -\tau \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial\Phi_m}{\partial y} - 0, 5\tau \sum_{m=0}^{k-1} (\nabla\Phi_m)^2, \quad (27)$$

$$U_k = -0, 5\tau \sum_{m=0}^{k-1} (\nabla\Phi)^2(x, H + t_m, t_m), \quad (28)$$

где $\Phi_k = \Phi(x, y, t_k)$, $\tau = t_k - t_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$), функция Φ_0 соответствует классической модели удара.

Для решения задачи (23) – (28) при каждом фиксированном k применяется специальный итерационный метод, в котором последовательно уточняются неизвестные заранее зоны отрыва и контакта частиц жидкости. Главным образом, дело сводится к последовательному решению линейных краевых задач с фиксированными точками раздела краевых условий. Заметим, что для численной реализации метода достаточно локальной формулировки граничных условий типа неравенств в окрестности точки отрыва. В роли начального приближения выступает решение смешанной краевой задачи (23) – (28) (без учета неравенств) с такой маленькой зоной отрыва, в окрестности которой нарушается динамическое условие в виде неравенства. Точка, в которой функция G_k достигает локального отрицательного минимума, принимается за следующее приближение к точке отрыва. Повторение алгоритма приводит к уменьшению зоны отрицательных значений функции G_k на каждом шаге итерационного процесса (отрицательные значения, которые наблюдаются в маленьких окрестностях угловых точек прямоугольника, на ход итерационного процесса не влияют). Условием окончания итерационного процесса является полное исчезновение этой зоны. Затем проверяется кинематическое условие в виде неравенства в зоне отрыва. Заметим, что линейные задачи (23) – (28) решаются численно методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++ [10]. Подробно это описано в работах [3–5]. В монографии [11] изложены близкие итерационные методы последовательного уточнения неизвестной границы, возникающие в различных других физических задачах.

Численные расчеты, проведенные на основе модели (23) – (28), в случаях, когда $F(\Phi) = 0$, $U(\Phi) = 0$ (линеаризованная модель) и $F(\Phi) \neq 0$, $U(\Phi) \neq 0$ (нелинейная модель), сравниваются с результатами асимптотического анализа исходной нелинейной задачи на малых временах. Результаты сравнения для величины $c(t)$ при $Fr = 0, 4, 0, 5$ приведены в табл. 1, 2 ($\chi = -4$, $\varepsilon = 0, 1$, $H = 1$, $H_b = 3$, $H_R = 4$). Во второй строке каждой таблицы представлены результаты, найденные по асимптотической формуле (16), где $c_0 = 0,86$, $c_1 = -1,91$ ($Fr = 0, 4$) и $c_1 = -1,08$ ($Fr = 0, 5$). Третья и четвертая строки содержат результаты, полученные на основе решения задачи (17) – (22) при $F(\Phi) = 0$, $U(\Phi) = 0$ и $F(\Phi) \neq 0$, $U(\Phi) \neq 0$ соответственно.

Таблица 1

Результаты сравнения для $c(t)$ при $Fr = 0, 4$, $\chi = -4$

t	0	0,05	0,1	0,15	0,18
<i>asymptotics</i>	0,86	0,76	0,66	–	–
<i>linear model</i>	0,86	0,75	0,59	0,31	0
<i>nonlin, model</i>	0,86	0,73	0,56	0,25	0

Сравнение численных результатов позволяет сделать несколько важных выводов. Во-первых отметим, что асимптотическая формула (16) оказывается эффективной на промежутке времени $(0, t_*)$, равном примерно половине времени схлопывания тонкой каверны. Таким образом, можно считать, что в диапазоне $(0, t_*)$ точка отрыва движется по линейному закону. После этого ее движение происходит с ускорением, причем к моменту схлопывания скорость заметно возрастает. Другой важный вывод

Результаты сравнения для $c(t)$ при $Fr = 0,5$, $\chi = -4$

t	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,33
<i>asymptotics</i>	0,86	0,80	0,75	0,69	0,64	–	–	–
<i>linear model</i>	0,86	0,81	0,75	0,67	0,58	0,45	0,27	0,09
<i>nonlin. model</i>	0,86	0,79	0,71	0,62	0,50	0,35	0,10	0

состоит в том, что нелинейные слагаемые в модели (23) – (28) проявляют себя только к моменту схлопывания тонкой каверны и на определение момента схлопывания практически не влияют. При уменьшении числа Фруда влияние нелинейных слагаемых становится менее заметным. Таким образом, при $Fr \leq 0,5$ линейризованную модель можно рекомендовать для изучения процесса схлопывания тонкой каверны и приближенного определения времени схлопывания. Так как нелинейные слагаемые в модели не оказывают серьезного влияния на динамику точек отрыва, то при использовании линейризованной модели размерная скорость движения цилиндра не обязательно должна быть очень маленькой (порядка $0,1 - 0,2$ м/с). Но вместе с тем она должна быть такой, чтобы можно было пренебречь возмущением свободных границ жидкости. Можно считать, что рассмотренные при $Fr = 0,5$, $\chi = -4$ примеры соответствуют следующим конкретным физическим ситуациям: $v_0 = 0,5$ м/с; $p_c = kp_a$; $k = 1,005$, $a \approx 0,1$ м или $v_0 = 1$ м/с; $p_c = kp_a$; $k = 1,002$, $a \approx 0,4$ м. Примерное время схлопывания составляет $0,06$ с или $0,12$ с соответственно.

Математическая модель (17) – (22), основанная на полном пренебрежении возмущениями свободных границ жидкости, была направлена исключительно на изучение динамики точек отрыва при малых числах Фруда. Однако она также позволяет определить возмущения свободных границ жидкости в первом приближении. В работе было проведено сравнение форм внутренних свободных границ, полученных на основе линейризованной модели и асимптотической формулы при $t = 0,1; 0,15; 0,2$ ($Fr = 0,5$; рис. 2). В силу симметрии картины течения жидкости на рис. 2 показаны только правые половины свободных границ. Полная картина получается их зеркальным отображением относительно оси y . При использовании линейризованной модели свободная граница определялась с помощью формулы (4) без учета нелинейного члена. После интегрирования этого равенства по времени от 0 до t находилось явное выражение для функции $\eta(x, t)$. Интеграл по времени от левой части (4) вычислялся по формуле левых прямоугольников, в которой на каждом шаге решалась смешанная краевая задача с неизвестной зоной отрыва. Отметим, что на основе линейризованной модели очень сложно изобразить свободную границу в маленькой окрестности точки отрыва, где форма кривой близка к вертикальной. На рис. 2 эта граница показана сплошной линией (пунктирная линия – результат асимптотического анализа). Как видно из рис. 2 и табл. 2, хорошее согласование для форм

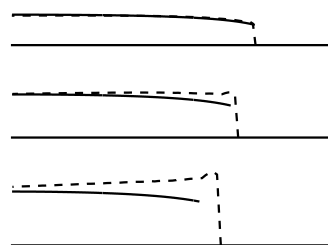
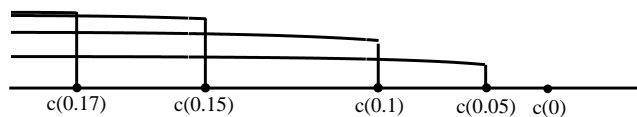


Рис. 2. Внутренняя свободная граница при $t = 0,1; 0,15; 0,2$ ($Fr = 0,5$; $\chi = -4$); сплошная линия – линейризованная модель, пунктирная линия – асимптотика

свободных границ наблюдается при тех моментах времени, при которых имеет место хорошее совпадение для точек отрыва. При $t = 0,2$ погрешности становятся заметными как в определении точки отрыва (примерно 10%), так и для формы внутренней свободной границы жидкости.

На рис. 2 хорошо видно, что уменьшение зоны отрыва сопровождается некоторым подъемом свободной границы. При малых скоростях движения цилиндра такая картина будет наблюдаться вплоть до момента схлопывания.



При уменьшении числа Фруда возмущение свободной границы становится менее заметным и предположение о пренебрежении этим возмущением оправдывается все лучше. Заметим также, что результаты, полученные для $Fr = 0,5$, соответствуют некоторой пограничной ситуации. При дальнейшем увеличении числа Фруда линеаризованная модель перестает работать, а при его уменьшении работает все лучше и лучше. На рис. 3 на основе линеаризованной модели смоделировано полное решение проблемы образования и схлопывания тонкой каверны с учетом подъема внутренней свободной границы жидкости при $Fr = 0,4$, $\chi = -4$ (при этом угловые точки требуют некоторого сглаживания, которое не должно повлиять на форму каверны в целом). Отметим, что использование рассматриваемой математической модели является оправданным, так как максимальное возмущение внутренней свободной границы составляет примерно 5% от горизонтальной длины прямоугольника.

Рис. 3. Модель схлопывания тонкой каверны с учетом подъема внутренней свободной границы ($Fr = 0,4$, $\chi = -4$)

Литература

1. Седов, Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1966.
2. Юдович, В.И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость / В.И. Юдович // Владикавказский математический журнал. – 2005. – Т. 7, № 3. – С. 79–91.
3. Norkin, M. The Motion of the Free-Surface Separation Point During the Initial Stage of Horizontal Impulsive Displacement of a Floating Circular Cylinder / M. Norkin, A. Korobkin // Journal of Engineering Mathematics. – 2011. – V. 70. – P. 239–254.
4. Норкин, М.В. Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны / М.В. Норкин // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 3. – С. 101–112.
5. Норкин, М.В. Образование каверны при наклонном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости / М.В. Норкин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 81–92.
6. Норкин, М.В. Динамика точек отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра / М.В. Норкин // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 5. – С. 19–27.

7. Tassin, A. On Analytical Models of Vertical Water Entry of a Symmetric Body with Separation and Cavity Initiation / A. Tassin, A.A. Korobkin, M.J. Cooker // Applied Ocean Research. – 2014. – V. 48. – P. 33–41.
8. Reinhard, M. Cavity Formation on the Surface of a Body Entering Water with Deceleration / M. Reinhard, A.A. Korobkin, M.J. Cooker // Journal of Engineering Mathematics. – 2016. – V. 96, № 1. – P. 155–174.
9. Сметанин, Б.И. Кавитационный отрыв при ударе по пластинке, расположенной в слое жидкости параллельно его свободной границе / Б.И. Сметанин, К.Е. Федяева // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2014. – № 2. – С. 51–57.
10. Жуков, М.Ю. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии / М.Ю. Жуков, Е.В. Ширяева. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008.
11. Вабищевич, П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей / П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1987.

Михаил Викторович Норкин, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра «Вычислительная математика и математическая физика», Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация), norkinmi@mail.ru.

Поступила в редакцию 2 марта 2020 г.

MSC 76B07, 76B10, 76B20

DOI: 10.14529/mmp200209

DYNAMICS OF SEPARATION POINTS DURING VERTICAL IMPACT OF A FLOATING RECTANGULAR CYLINDER

M. V. Norkin, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation, norkinmi@mail.ru

The 2D problem of the vertical separation impact of a rectangular cylinder completely immersed in an ideal, incompressible, heavy fluid is considered. It is assumed that after the impact, the cylinder moves at a constant speed into the fluid without rotation. A feature of this problem is that as a result of the impact, the liquid is separated from the solid surface with the subsequent formation of an attached cavity behind the body. The main purpose of the work is to study the process of collapse of a thin cavity at small Froude numbers corresponding to low cylinder velocities. The study of the problem is carried out using a special mathematical model based on the assumption of small perturbations of the free boundaries of the liquid. In mathematical terms, it comes down to solving a dynamic mixed boundary-value problem of potential theory with boundary conditions such as inequalities. The numerical calculations obtained on its basis are compared with the results of an asymptotic analysis of the initial nonlinear problem at small times.

Keywords: ideal incompressible fluid; separation impact; dynamics of separation points; Froude number; cavitation number.

References

1. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Two-Dimensional Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow, Nauka, 1966. (in Russian)
2. Yudovich V.I. [Unique Solvability of the Problem of Impact with Separation of a Rigid Body on a Nonhomogeneous Fluid]. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2005, vol. 7, no. 3, pp. 79–91. (in Russian)
3. Norkin M., Korobkin A. The Motion of the Free-Surface Separation Point During the Initial Stage of Horizontal Impulsive Displacement of a Floating Circular Cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*, 2011, vol. 70, pp. 239–254. DOI: 10.1007/s10665-010-9416-6
4. Norkin M.V. Initial Stage of the Circular Cylinder Motion in a Fluid After an Impact with the Formation of a Cavity. *Fluid Dynamics*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 375–386. DOI: 10.1134/S0015462812030118
5. Norkin M.V. Cavity Formation at the Inclined Separated Impact on a Circular Cylinder under a Free Surface of a Heavy Liquid. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, no. 4, pp. 538–548. DOI: 10.1134/S1990478916040104
6. Norkin M.V. Dynamics of Separation Points upon Impact of a Floating Circular Cylinder. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 5, pp. 798–804. DOI: 10.1134/S0021894419050031
7. Tassin A., Korobkin A.A., Cooker M.J. On Analytical Models of Vertical Water Entry of a Symmetric Body with Separation and Cavity Initiation. *Applied Ocean Research*, 2014, no. 48, pp. 33–41. DOI: 10.1016/j.apor.2014.07.008
8. Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J. Cavity Formation on the Surface of a Body Entering Water with Deceleration. *Journal of Engineering Mathematics*, 2016, vol. 96, no. 1, pp. 155–174. DOI: 10.1007/s10665-015-9788-8
9. Smetanin B.I., Fedyaeva K.E. [Cavitation Separation Upon Impact on a Plate Located in a Liquid Layer Parallel to Its Free Boundary]. *Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2014, no. 2, pp. 51–57. (in Russian)
10. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya resheniya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using Package End Elements of FreeFem ++ for the Problems of Hydrodynamics, Electrophoresis and Biology]. Rostov-on-Don, South Federal University, 2008. (in Russian)
11. Vabishchevich P.N. *Chislennyye metody resheniya zadach so svobodnoi granitse* [Numerical Methods for Solving Problems with a Free Boundary]. Moscow, Moscow State University, 1987. (in Russian)

Received March 2, 2020