

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ НАЧАЛЬНЫЙ УЧАСТОК В ПЛОСКОМ ПОРИСТОМ КАНАЛЕ ПРИ НАПОРНОМ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ НЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДЫ

*А.В. Рязских*¹, *А.В. Николенко*¹, *Д.А. Коновалов*¹, *В.И. Рязских*¹,
*А.В. Келлер*¹

¹Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж,
Российская Федерация

Аналитически решена задача о гидродинамическом начальном участке изотермического напорного ламинарного течения ньютоновской жидкости в горизонтальном плоском пористом канале полубесконечной длины, сформулированной в начально-краевой постановке для уравнения Дарси – Бринкмана с частичным учетом конвективной составляющей при условии зависимости давления только от аксиальной координаты. Для канала без пористой матрицы результаты коррелируют с классическими данными. Предложено в явном виде соотношение для расчета длины гидродинамического начального участка, не противоречащее результатам, основанным на макроскопических погранслоиных представлениях.

Ключевые слова: плоский пористый канал; напорное ламинарное течение; ньютоновская жидкость; уравнение Дарси – Бринкмана; гидродинамический начальный участок.

Введение

Классическая физическая модель пористых сред представляется как плотная упаковка сфер [1], пустоты которой соединены между собой и полностью заполнены жидкостью без фазовых переходов, что, как правило, соответствует неподвижным зернистым слоям в различных технологических аппаратах [2]. Численным интегрированием уравнения макроскопического пограничного слоя, полученным из модели Дарси – Бринкмана – Форчхеймера стандартным интегральным методом, в предположении конечной его толщины, было показано, что длина гидродинамического начального участка в неподвижном зернистом слое сопоставима с размером частиц или пор [3]. Это давало основание, наряду с эффектом выравнивания пористым слоем скорости потока в поперечном сечении канала [4], обосновывать применение режима идеального вытеснения для моделирования явлений переноса в зернистых слоях [5,6]. Однако появление новых технологий получения пористых материалов из вспененных металлов, графитов, керамики и полимеров с высокими значениями пористости и проницаемости [7] и использование их для интенсификации различных процессов [8] вновь инициировало проблему идентификации гидродинамического начального участка и его влияния на теплообмен [9].

В [10], по-видимому, впервые анализировалось влияние поперечной неоднородности поля скоростей на теплообмен при ламинарном течении ньютоновской жидкости

в высокопроницаемом канале, но опять-таки в приближении малости начального гидродинамического участка и с введением ограничения на использование предложенной модели (по типу модели Дарси – Бринкмана) в виде критерия $h\sqrt{\varepsilon/K} > 200$, где h – высота канала, m ; ε – пористость; K – проницаемость, m^2 . Численное исследование уравнения Дарси – Бринкмана в формате 3-D, в предположении параболической зависимости аксиального давления, позволило установить длину начального гидродинамического участка в высокопроницаемом (число Дарси $Da = 5 \cdot 10^{-5}$) канале квадратного сечения $L = 0,05 Re$ (число Рейнольдса определялось по расходу среды через проходное сечение канала) [11], однако обобщения полученных результатов для широкого спектра изменения числа Дарси не было сделано.

Из условия стабилизации толщины макроскопического пограничного слоя в [12] при равенстве нулю фактора Форчхеймера показано, что в плоском канале с изотропным пористым наполнителем и с проницаемостью, подчиняющейся закону Козени – Кармана, длина ламинарного начального гидродинамического участка пропорциональна числу Рейнольдса, а коэффициент пропорциональности есть функция проницаемости. Такой подход был использован при определении входного участка для анизотропной среды, заполняющей цилиндрический канал [13].

До настоящего времени экспериментального подтверждения корректности полученных данных и возможности их экстраполяции на высокопроницаемые среды, кроме указанных теоретических оценок и результатов вычислительного анализа, пока нет. Поэтому необходимым является развитие альтернативных подходов (например, основывающихся на предположении об однонаправленном течении ньютоновской среды в пористом канале [14]), с помощью которых возможно на основе сравнительного анализа сделать выводы о точности имеющейся информации о длине начального гидродинамического участка.

1. Постановка задачи

Рассматривается установившееся изотермическое напорное течение ньютоновской жидкости в горизонтальном плоском анизотропном пористом канале полубесконечной длины в декартовой системе координат формата 2-D (x, y – продольная и поперечная координаты) с началом на нижней стенке (рис. 1).

Будем идентифицировать ламинарный режим по числу Рейнольдса, определение которого следует из модифицированного уравнения Эргуна [15]

$$Re_d = \frac{2k_V}{3(1-\varepsilon)} \cdot \frac{v_0 d_p \rho_f}{\mu_f},$$

со значением меньше 50, где k_V – коэффициент формы характерных элементов размера d_p пористой матрицы; ρ_f, μ_f – плотность и динамическая вязкость жидкости.

Так как для установившегося ламинарного режима течения инерционные эффекты незначимы [16], то уравнения неразрывности и Дарси – Бринкмана – Форчхеймера переходят в стационарную систему Дарси

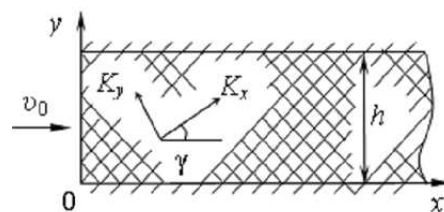


Рис. 1. Расчетная схема: $v_0 = \text{const}$ – скорость жидкости на входе в канал; K_y, K_x – проницаемости пористой среды; угол ориентации γ

– Бринкмана [17]:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0; \quad (1)$$

$$\left(\frac{\bar{v}}{\varepsilon} \cdot \nabla\right) \bar{v} = \frac{\varepsilon}{\rho_f} \left(-\nabla p + \frac{\mu_f}{\varepsilon} \nabla^2 \bar{v} - \frac{\mu_f}{\bar{K}} \bar{v}\right), \quad (2)$$

где \bar{v} – вектор скорости жидкости; p – давление; \bar{K} – тензор проницаемости пористой матрицы, представленный в инвариантной записи [18]:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_x \cos^2 \gamma + K_y \sin^2 \gamma & (K_x - K_y) \cos \gamma \sin \gamma \\ (K_x - K_y) \cos \gamma \sin \gamma & K_x \sin^2 \gamma + K_y \cos^2 \gamma \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В компонентном виде система (1), (2) с учетом того, что

$$\bar{K}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{xx}^{-1} & K_{xy}^{-1} \\ K_{yx}^{-1} & K_{yy}^{-1} \end{bmatrix},$$

где $K_{xx}^{-1} = K_x^{-1} \cos^2 \gamma + K_y^{-1} \sin^2 \gamma$; $K_{xy}^{-1} = K_{yx}^{-1} = (K_x^{-1} - K_y^{-1}) \cos \gamma \sin \gamma$; $K_{yy}^{-1} = K_x^{-1} \sin^2 \gamma + K_y^{-1} \cos^2 \gamma$, такова:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_f}{\rho_f} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) - \\ &- \varepsilon \frac{\mu_f}{\rho_f} (K_{xx}^{-1} v_x + K_{yy}^{-1} v_y), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_f}{\rho_f} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \\ &- \varepsilon \frac{\mu_f}{\rho_f} (K_{yx}^{-1} v_x + K_{yy}^{-1} v_y), \end{aligned} \quad (6)$$

где v_x, v_y – компоненты \bar{v} . С помощью стандартного приближения макроскопического пограничного слоя [12] уравнения (5) и (6) трансформированы:

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_f}{\rho_f} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \varepsilon \frac{\mu_f}{\rho_f} K_{xx}^{-1} v_x; \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Как и в [19], учтем в левой части (7) квадратичные члены частично, следуя методу Озеена, тогда

$$\frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_f}{\rho_f} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \varepsilon \frac{\mu_f}{\rho_f} K_{xx}^{-1} v_x, \quad (9)$$

где v_0 – скорость на границе пограничного слоя. Система уравнений (4), (8) и (9) с начальными

$$v_y(0, y) = 0, v_x(0, y) = v_0 = \text{const}$$

и граничными условиями

$$v_x(x, 0) = v_x(x, h) = 0 \quad (10)$$

(условия «прилипания» на стенке (10) также выполняются и для v_y) представлена в безразмерной форме:

$$\frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial V_X}{\partial X} = -\varepsilon^2 \frac{dP}{dX} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2} - \frac{\varepsilon}{\text{Re}} q^2 V_X; \quad (13)$$

$$V_X(0, Y) = 1; \quad (14)$$

$$V_X(X, 0) = V_X(X, 1) = 0, \quad (15)$$

с помощью относительных переменных: $X = x/h$; $Y = y/h$; $V_{X,Y} = v_{x,y}/v_0$; $P = p/(\rho_f v_0^2)$; $\text{Re} = v_0 h \rho_f / \mu_f$ – число Рейнольдса; $\text{Da} = K_x / h^2$ – число Дарси; $A = \cos^2 \gamma + \eta \sin^2 \gamma$; $\eta = K_x / K_y$; $q = \sqrt{\varepsilon A / \text{Da}}$. Система (11) – (15) дополнена условием сохранения расхода жидкости в любом сечении канала

$$\int_0^1 V_X(X, Y) dY = 1. \quad (16)$$

2. Решение

Из осреднения уравнения (13) по поперечному сечению канала, принимая во внимание условие (16) и учитывая симметрию касательных напряжений потока жидкости на стенках, следует, что

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{2}{\varepsilon \cdot \text{Re}} \left(\frac{\partial V_X}{\partial Y} \right)_{Y=1} - \frac{q^2}{\varepsilon \cdot \text{Re}}, \quad (17)$$

поэтому уравнение (13) вместе с краевыми условиями (14) и (15), после подстановки в него (17) и последующего применения полуограниченного интегрального преобразования Лапласа [20] по переменной X , сводится к краевой задаче отыскания изображения скорости $V_X^{(L)}(s, Y)$ с комплексным параметром s :

$$\frac{d^2 V_X^{(L)}(s, Y)}{dY^2} - \left(q^2 + \frac{\text{Re} \cdot s}{\varepsilon} \right) V_X^{(L)}(s, Y) = 2 \frac{dV_X^{(L)}(s, 1)}{dY} - \frac{q^2}{s} - \frac{\text{Re}}{\varepsilon};$$

$$V_X^{(L)}(s, 0) = V_X^{(L)}(s, 1) = 0,$$

решение которой, согласно [21] есть

$$V_X^{(L)}(s, Y) = C(s) \left\{ -1 + \frac{\text{sh}[B(s)Y] + \text{sh}[B(s)(1-Y)]}{\text{sh} B(s)} \right\}, \quad (18)$$

где

$$C(s) = 2 \frac{dV_X^{(L)}(s, 1)}{dY} - \frac{q^2}{s} - \frac{\text{Re}}{\varepsilon} \Big/ B^2(s),$$

$$B(s) = \sqrt{q^2 + \frac{\text{Re} \cdot s}{\varepsilon}}.$$

После дифференцирования (18) по Y найдено

$$\frac{dV_X^{(L)}(s, Y)}{dX} = -\frac{2}{s} B(s) \left[\frac{\text{ch } B(s) - 1}{\text{sh } B(s)} \right] / \left\{ 1 - \frac{2}{B(s)} \left[\frac{\text{ch } B(s) - 1}{\text{sh } B(s)} \right] \right\},$$

тогда

$$C(s) = -\frac{1}{s} \left\{ 1 - \frac{2}{B(s)} \left[\frac{\text{ch } B(s) - 1}{\text{sh } B(s)} \right] \right\}$$

и (18) записано в виде

$$V_X^{(L)}(s, Y) = \frac{B(s) \{ \text{sh } B(s) - \text{sh } [B(s) Y] + \text{sh } [B(s) (1 - Y)] \}}{s \{ B(s) \text{sh } B(s) - 2 [\text{ch } B(s) - 1] \}}. \quad (19)$$

Числитель и знаменатель соотношения (19) представляют собой бесконечные полиномы целой степени s , причем порядок полинома знаменателя превышает порядок числителя, так что выполнены условия второй теоремы Хэвисайда обращения изображения по Лапласу [20], применение которой к (19) приводит к решению системы (11) – (15):

$$\begin{aligned} V_X(X, Y) = & q \{ \text{sh } q - \text{sh } (qY) - \text{sh } [q(1 - Y)] \} / \\ & / [q \text{sh } q - 2 (\text{ch } q - 1)] - \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \{ -\sin \mu_n + \sin (\mu_n Y) + \sin [\mu_n (1 - Y)] \} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{\varepsilon}{\text{Re}} (\mu_n^2 + q^2) X \right] / \\ & / \left[(\mu_n^2 + q^2) \left(\cos \mu_n - \frac{1}{\mu_n} \sin \mu_n \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где μ_n – корни уравнения

$$\mu_n \sin \mu_n = 2 (1 - \cos \mu_n), n = \overline{1, \infty}, \quad (21)$$

причем корню $\mu = 0$ соответствует нулевое слагаемое в решении (20). Из (11) и (17) с использованием (20) получено:

$$\begin{aligned} V_Y(X, Y) = & \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left\langle \sin \mu_n Y - \frac{1}{\mu_n} [1 - \cos (\mu_n Y)] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\mu_n} \{ \cos [\mu_n (1 - Y)] - \cos \mu_n \} \right\rangle \cdot \\ & \cdot \exp \left[-\frac{\varepsilon}{\text{Re}} (\mu_n^2 + q^2) X \right] / \left(\cos \mu_n - \frac{1}{\mu_n} \sin \mu_n \right); \\ P - P_0 = & \frac{2}{\varepsilon \text{Re}} \langle q^2 (1 - \text{ch } q) X / [q \text{sh } q - 2 (\text{ch } q - 1)] + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 (1 - \mu_n \cos \mu_n) \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\varepsilon}{\text{Re}} (\mu_n^2 + q^2) X \right] \right\} / \\ & / \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{\text{Re}} (\mu_n^2 + q^2) \right] \left[(\mu_n^2 + q^2) \left(\cos \mu_n - \frac{1}{\mu_n} \sin \mu_n \right) \right] \right\} \right\rangle - \frac{AX}{\text{ReDa}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $P_0 = p_0 / (\rho_f v_0^2)$, p_0 – давление на входе в канал.

3. Анализ

Если в канале отсутствует пористая матрица, то соотношение для аксиальной скорости (20) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 1$ и $Da \rightarrow \infty$ таково

$$V_X(X, Y) = 6Y(1 - Y) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \{-\sin \mu_n + \sin(\mu_n Y) + \sin[\mu_n(1 - Y)]\} \exp(-\mu_n^2 X / Re) / (-\sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n). \quad (23)$$

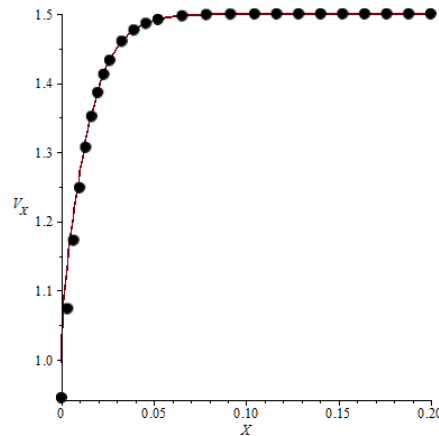


Рис. 2. Изменение продольной скорости V_x при $Y = 0,5$ и $Re = 1$ с различным числом членов ряда в (24): — — 100; ● — 1

Расчеты показывают (рис. 2), что для оценки максимальной аксиальной скорости течения вполне достаточно ограничиться в (24) первым ненулевым членом ряда при $Y = 1/2$

$$\bar{V}_X(X, 1/2) \approx \frac{3}{2} - \frac{2[-\sin \mu_2 + 2 \sin(\mu_2/2)]}{-\sin \mu_2 + \mu_2 \cos \mu_2} \exp\left(-\frac{\mu_2^2}{Re} X\right),$$

где $\mu_2 \approx 8,987$. Из условия

$$\bar{V}_X(X, 1/2) = 0,99\bar{V}_X(\infty, 1/2)$$

найдено

$$L = 0,178Re_L, \quad (24)$$

где относительная длина начального гидродинамического участка L и число Re_L рассчитаны по геометрическому масштабу $h/2$. Соотношение (25) коррелирует с результатами [19, 22] для напорного течения ньютоновской жидкости в плоском горизонтальном канале.

Расчетами по соотношению (20) установлено, что порозность вблизи входного сечения влияет в меньшей степени на структуру поля аксиальной скорости в отличие от проницаемости, определяемой комплексом q , который также характеризует и строение пористой матрицы ($K_x = K_y$ — структура изотропна при любом угле ориентации γ ($A = 1$); $K_x \neq K_y$ — структура анизотропна, причем направление наибольшей проницаемости также зависит и от γ). Для $A = 1$ увеличение проницаемости приводит

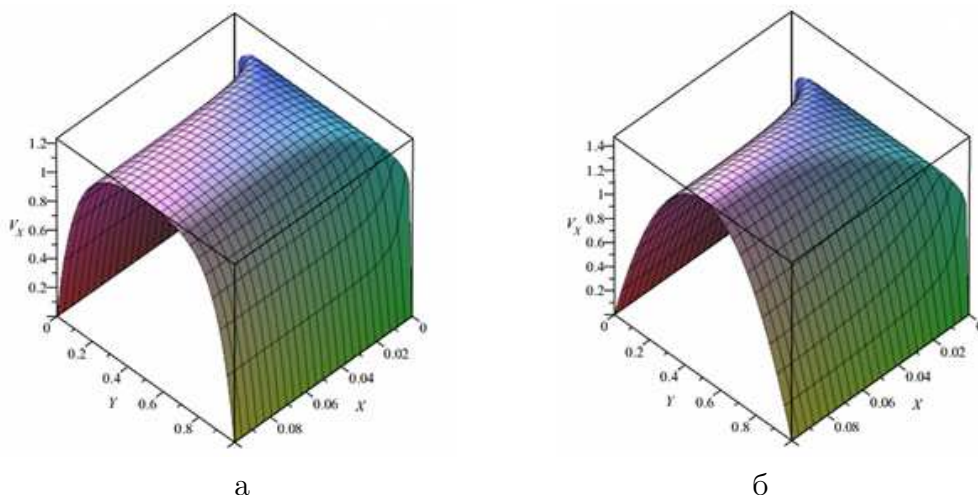


Рис. 3. Поле аксиальной скорости при $A = 1$, $Re = 1$, $\varepsilon = 0,4$ и различных q : $a - 0,01$; $b - 10,0$

к возрастанию длины начального гидродинамического участка (рис. 3), причем при $q = 0,01$ структура аксиальной скорости характерна для высокопроницаемой пористой матрицы, а при $q = 10$ – плотному зернистому слою, что подтверждают профили давления вдоль канала (рис. 4).

Влияние поперечной скорости на структуру течения невелика даже для высокопроницаемой пористой матрицы, о чем свидетельствует незначительное искривление линий тока вблизи входа в канал (рис. 5).

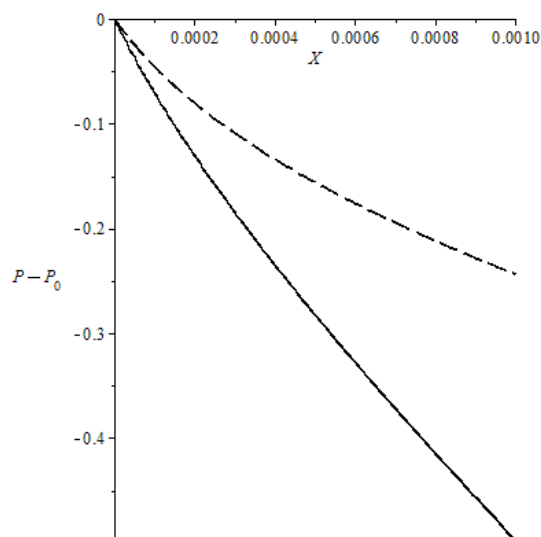


Рис. 4. Изменение давления в аксиальном направлении пористого плоского канала при $A = 1$, $Re = 1$, $\varepsilon = 0,4$ и различных q : - - - - $0,01$; — — $10,0$

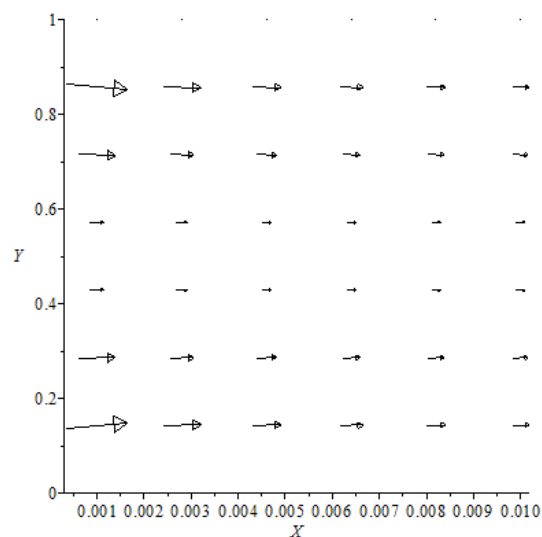


Рис. 5. Линии тока поля скоростей в области, прилегающей ко входу в канал при $A = 1$, $Re = 1$, $\varepsilon = 0,4$, $q = 0,01$

Рис. 6 иллюстрирует возможность достаточно точного представления аксиальной скорости в плоском пористом канале при $Y = 1/2$ и различных значений q приближением решения (22), в котором учтен только первый ненулевой член ряда.

Из такого приближения решения (22) в виде

$$V_X(X, 1/2) \approx \frac{q [\operatorname{sh} q - 2 \operatorname{sh} (q/2)]}{q \operatorname{sh} q - 2 (\operatorname{ch} q - 1)} - \frac{2\mu_2}{\mu_2^2 + q^2} \cdot \frac{[-\sin \mu_2 + 2 \sin (\mu_2/2)]}{\cos \mu_2 - \sin \mu_2/\mu_2} \exp \left[-\frac{\varepsilon}{\operatorname{Re}} (\mu_n^2 + q^2) X \right]$$

получено соотношение для длины гидродинамического начального участка, аналогичное (25)

$$L = b(q) \operatorname{Re}_L, \quad (25)$$

где

$$b(q) = -\frac{1}{\varepsilon (\mu_2^2 + q^2)} \ln \left\{ 0,01 \frac{q [\operatorname{sh} q - 2 \operatorname{sh} (q/2)]}{q \operatorname{sh} q - 2 (\operatorname{ch} q - 1)} \cdot \frac{(\mu_2^2 + q^2) (\cos \mu_2 - \sin \mu_2/\mu_2)}{2\mu_2 [-\sin \mu_2 + 2 \sin (\mu_2/2)]} \right\}. \quad (26)$$

Таким образом подтверждена линейная зависимость длины гидродинамического начального участка от числа Рейнольдса для плоского пористого канала при ламинарном режиме течения ньютоновской жидкости как для изотропных, так и анизотропных сред, а коэффициент пропорциональности коррелирует с данными из [13] (рис. 7).

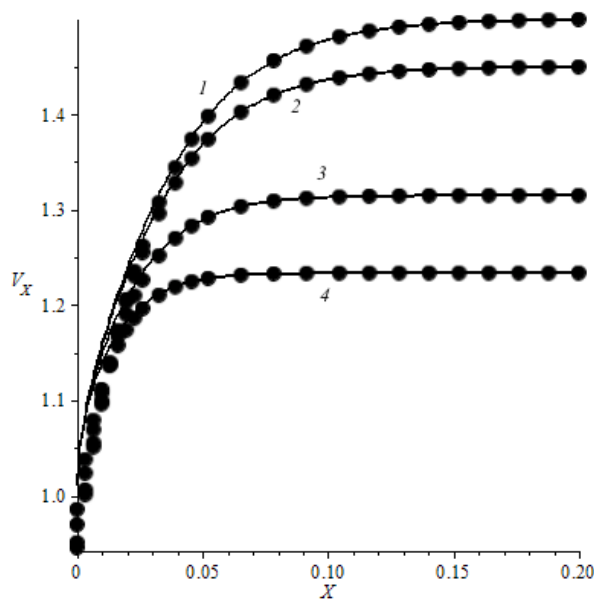


Рис. 6. Аксиальная скорость в плоском пористом канале при $Y = 1/2$; $\varepsilon = 0, 4$, $A = 1$, $Re = 1$, различных q : 1 – 0,01; 2 – 3,0; 3 – 7,0; 4 – 10,0 и с числом членов ряда в решении: — – 100; ● – 1

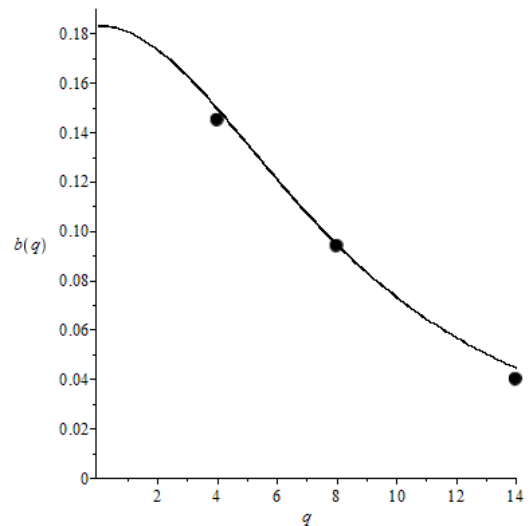


Рис. 7. Зависимость $b(q)$ при $\varepsilon = 0, 4$ и $A = 1$: — – расчет по формуле (27); ● – данные [13]

Заключение

Показана возможность аналитического решения задачи о ламинарном начальном гидродинамическом участке в горизонтальном пористом плоском канале изотропной и анизотропной структуры без использования понятия толщины пограничного слоя и дополнительной информации о профиле скорости по его толщине. Качественная и количественная адекватность полученных полей скорости и давления позволяют применять такой подход для решения аналогичных задач в пористых каналах с поперечными сечениями других геометрий.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-90114.

Литература

1. Bear, J. Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
2. Новый справочник химика и технолога. Процессы и аппараты химических технологий. – СПб.: Профессинал, 2004.
3. Vafai, K. Boundary and Inertia Effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media / K. Vafai, C. Tien // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1981. – V. 24. – P. 195–203.
4. Vafai, K. Handbook of Porous Media / K. Vafai. – New York: CRC Press, 2015.
5. Пушнов, А. Аэродинамика воздухоочистных устройств с зернистым слоем / А. Пушнов, П. Баегренас, А. Каган, А. Загорскис. – Вильнюс: Техника, 2010.
6. Tien, C. Adsorption Calculations and Modeling / C. Tien. – Boston: Butter-Heinemann, 1994.
7. Metal Foams. – New York: Elsevier, 2000.
8. Tribok, G. Numerical Study on Maximizing Heat Transfer and Minimizing Flow Resistance Behavior of Metal Foams Owing to Their Structural Properties / G. Tribok, N. Gnanasekaran // International Journal of Thermal Sciences. – 2021. – V. 159. – Article ID: 106617. – 15 p.
9. Bagci, O. Experimental Hydrodynamics of High-Porosity Metal Foam: Effect of Pore Density / O. Bagci, N. Dakhan // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2016. – V. 103. – P. 879–885.
10. Kaviany, M. Laminar Flow Through a Porous Channel Bounded by Isothermal Parallel Plates / M. Kaviany // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1985. – V. 28. – P. 851–858.
11. Tien-Chien Jen. Developing Fluid Flow and Heat Transfer in a Channel Partially Filled with Porous Medium / Tien-Chien Jen, T.Z. Yan // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2005. – V. 49. – P. 3995–4009.
12. Kaviany, M. Principles of Heat Transfer in Porous Media / M. Kaviany. – New York: Springer Science and Business Media, 1995.
13. Akowanou, C. Effect of Permeability Anisotropy on Forced Convection Thermal-Hydrodynamics of Entrance and Developed Flow Regimes in Porous Saturated Circular Tube / C. Akowanou, G. Degan, V. Prodjinonto // International Journal of Applied Science and Technology. – 2016. – V. 20. – P. 1–9.

14. Ryazhskih, V.I. Mathematical Model of the Acceleration Laminar Flow of a Newtonian Fluid in a Anisotropic Porous Channel of Rectangular Cross Section / V.I. Ryazhskih, A.V. Keller, A.V. Ryazhskih, A.V. Nikolenko, S.V. Dakhin // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2020. – V. 13, № 3. – P. 17–28.
15. Tianwang Lai. Extension of Ergun Equation for the Calculation of the Flow Resistance in Porous Media with Higher Porosity and Open-Celled Structure / Tianwang Lai, Xiangyang Liu, Sa Xue, Jimin Xu, Maogang He, Ying Zhang // Applied Thermal Engineering. – 2020. – V. 173. – Article ID: 115262. – 13 p.
16. Izadpanah, M.R. Experimental and Theoretical Studies of Convective Heat Transfer in a Cylindrical Porous Medium / M.R. Izadpanah, H. Muller-Steinhagen, M. Jamilahmadi // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 1998. – V. 19. – P. 629–635.
17. Nield, D.A. Convection in Porous Media / D.A. Nield, A. Bejan. – New York: Springer, 2006.
18. Mobedi, M. Forced Convection Heat Transfer Inside an Anisotropic Porous Channel with Olique Principal Axes: Effect of Viscous Dissipation / M. Mobedi, O. Cokmer, I. Pop // International Journal of Thermal Sciences. – 2010. – V. 49. – P. 1984–1993.
19. Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1955.
20. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals. – New York: Academic Press, 2004.
21. Handbook of Differential Equations. – New York: Elsevier, 1992.
22. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974.

Александр Викторович Рязжских, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ryazhskihav@bk.ru.

Александр Владимирович Николенко, аспирант, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), nikolenko.alexandr.93@yandex.ru.

Дмитрий Альбертович Коновалов, доктор технических наук, кафедра «Теоретическая и промышленная теплоэнергетика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), dkonov@chgeu.ru.

Виктор Иванович Рязжских, доктор технических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ryazhskih_vi@mail.ru.

Алевтина Викторовна Келлер, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), alevtinak@inbox.ru.

Поступила в редакцию 1 марта 2021 г.

HYDRODYNAMIC ENTRANCE REGION IN A FLAT POROUS CHANNEL WITH A PRESSURE HEAD ISOTHERMAL LAMINAR FLOW OF A NEWTONIAN MEDIUM

*A.V. Ryazhskih*¹, *A.V. Nikolenko*¹, *D.A. Konovalov*¹, *V.I. Ryazhskih*¹,
*A.V. Keller*¹

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mails: ryazhskihav@bk.ru, nikolenko.alexandr.93@yandex.ru, dkonovalov@cchgeu.ru, ryazhskih_vi@mail.ru, alevtinak@inbox.ru

The problem of the hydrodynamic initial section of an isothermal pressure laminar flow of a Newtonian fluid in a horizontal flat porous channel of semi-infinite length, formulated in the initial-boundary formulation for the Darcy–Brinkman equation with partial consideration of the convective component, provided that the pressure depends only on the axial coordinate, is analytically solved. For a channel without a porous matrix, the results correlate with the classical data. An explicit relation was proposed for calculating the length of the hydrodynamic initial section, which does not contradict the results based on macroscopic boundary layer concepts

Keywords: flat porous channel; pressure head laminar flow; Newtonian fluid; Darcy–Brinkman equation; hydrodynamic initial section.

References

1. Bear J., Bachmat Y. *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1990.
2. *Novyi spravochnik himika i tehnologa. Processy i apparaty himicheskikh tehnologii* [The New Handbook of the Chemist and Technologist. Processes and Apparatuses of Chemical Technologies]. St. Petersburg, Professional, 2004. (in Russian)
3. Vafai K., Tien C.-L. Boundary and Inertia Effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 1981, vol. 24, pp. 195–203.
4. Vafai K. *Handbook of Porous Media*. New York, CRC Press, 2015.
5. Posnov A., Baltrunas P., Kagan A., Zagorskis A. *Aerodinamika vozduhochistnykh ustroystv s zernistym sloem* [The Aerodynamics of Air Treatment Devices with a Granular Layer]. Vilnius, Tehnika, 2010. (in Russian)
6. Tien C. *Adsorption Calculations and Modeling*. Boston, Butter-Heinemann, 1994.
7. *Metal Foams*. New York, Elsevier, 2000.
8. Tribok G., Gnanasekaran N. Numerical Study on Maximizing Heat Transfer and Minimizing Flow Resistance Behavior of Metal Foams Owing to Their Structural Properties. *International Journal of Thermal Sciences*, 2021, vol. 159, article ID: 106617, 15 p.
9. Bagci O., Dakhan N. Experimental Hydrodynamics of High-Porosity Metal Foam: Effect of Pore Density. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 103, pp. 879–885.
10. Kaviany M. Laminar Flow Through a Porous Channel Bounded by Isothermal Parallel Plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1985, vol. 28, no. 4, pp. 851–858.
11. Tien-Chien Jen, Yan T.Z. Developing Fluid Flow and Heat Transfer in a Channel Partially Filled with Porous Medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2005, vol. 49, pp. 3995–4009.

12. Kaviany M. *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. New York, Springer Science and Business Media, 1995.
13. Akowanou C., Degan G., Prodjinonto V. Effect of Permeability Anisotropy on Forced Convection Thermal-Hydrodynamics of Entrance and Developed Flow Regimes in Porous Saturated Circular Tube. *International Journal of Applied Science and Techology*, 2016, vol. 20, pp. 1–9.
14. Ryazhskih V.I., Keller A.V., Ryazhskih A.V., Nikolenko A.V. Dakhin S.V. Mathematical Model of the Acceleration Laminar Flow of a Newtonian Fluid in a Anisotropic Porous Channel of Rectangular Cross Section. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 17–28.
15. Tianwang Lai, Xiangyang Liu, Sa Xue, Jimin Xu, Maogang He, Ying Zhang. Extension of Ergun Equation for the Calculation of the Flow Resistance in Porous Media with Higher Porosity and Open-Celled Structure. *Applied Thermal Engineering*, 2020, vol. 173, article ID: 115262, 13 p.
16. Izadpanah M.R., Muller-Steinhagen H., Jamilahmadi M. Experimental and Theoretical Studies of Convective Heat Transfer in a Cylindrical Porous Medium. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1998, vol. 19, pp. 629–635.
17. Nield D.A., Bejan A. *Convection in Porous Media*, New York, Springer, 2006.
18. Mobedi M., Cokmer O., Pop I. Forced Convection Heat Transfer Inside an Anisotropic Porous Channel with Olique Principal Axes: Effect of Viscous Dissipation. *International Journal of Thermal Sciences*, 2010, vol. 49, pp. 1984–1993.
19. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoi neshhimaemoyi zhidkosti* [Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid], Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1955. (in Russian)
20. *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. New York, Academic Press, 2004.
21. *Handbook of Differential Equations*. New York, Elsevier, 1992.
22. Schlichting H. *Teoriya pogrannichnogo sloya* [The Theory of the Boundary Layer]. Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)

Received March 1, 2021