

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАЛОМОДОВОЙ МОДЕЛИ $\alpha\Omega$ -ДИНАМО С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ α -ЭФФЕКТА

О.В. Шереметьева¹, А.Н. Годомская²

¹Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Российская Федерация

²Муниципальное бюджетное учреждение дополнительного образования «Центр «Луч», г. Елизово, Российская Федерация

В рамках модели $\alpha\Omega$ -динамо рассматривается магнитогидродинамическая система (далее МГД-система) с введенной аддитивной поправкой интенсивности α -эффекта в виде функции $Z(t)$. Изменение интенсивности α -эффекта со временем определяется показательным ядром $J(t)$ функции $Z(t)$. Проведен предварительный анализ влияния изменения значений массовой плотности внешних сил и интенсивности α -эффекта на значения магнитного поля и поля скорости. Для упрощения численной модели МГД-система перемасштабирована и в качестве единицы времени принято время диссипации магнитного поля, которое составило порядка 10^4 лет. Выбор временной единицы определяется необходимостью исследования поведения магнитного поля на больших временных масштабах. С целью сокращения количества варьируемых параметров МГД-система обезразмерена таким образом, что управляющими параметрами выступают число Рейнольдса, которое несет информацию о крупномасштабном генераторе, и амплитуда α -эффекта, характеризующая турбулентный генератор. Результаты численного моделирования режимов генерации магнитного поля отражены на фазовой плоскости управляющих параметров, и исследуется вопрос о динамике изменения картины на фазовой плоскости в зависимости от времени ожидания, определяемого масштабным коэффициентом показательного ядра $J(t)$ функции $Z(t)$.

Ключевые слова: $\alpha\Omega$ -динамо; магнитогидродинамическая система; режимы генерации магнитного поля; инверсия.

Введение

Магнитное поле является одним из важных аспектов наличия жизни на планете. Исследование природы возникновения магнитного поля и моделирование вариаций поля является интенсивно разрабатываемым разделом теории динамо. Изучение проводится как с использованием прямого численного моделирования, так и на основе упрощенных моделей. Магнитные поля реальных космических объектов (планет, звезд, галактик) с течением времени претерпевают изменения, которые носят как хаотический, так и периодический характер. Известным свойством магнитного поля является резкая смена полярности дипольной составляющей поля – инверсия. Большой интерес представляют инверсии без существенной перестройки движения проводящей среды. Протяженность интервалов времени между инверсиями (интервалы полярности) может отличаться на несколько порядков, существуют длительные интервалы без инверсий [1]. Информацию об инверсиях магнитного поля Земли получают из палеомагнитных записей, на основе которых строится шкала геомагнитной полярности. Построение модели динамо, полностью воспроизводящей реальную палеомагнитную

шкалу, является трудновыполнимой задачей. Прямое численное моделирование магнитогидродинамических уравнений позволяет воспроизвести многочисленные режимы инверсий, но не отвечает на вопрос об их причине. Кроме этого, полные уравнения содержат очень много параметров, оценки которых часто расходятся на много порядков, либо вообще не существуют. Поэтому исследователи с помощью простых динамических систем малой размерности пытаются объяснить физическую причину, признаки, важнейшие свойства этого явления [1–5].

Для систем космического динамо (планет, звезд, галактик) обычно рассматривают три механизма $\alpha\Omega$, α^2 и $\alpha^2\Omega$, из которых третий является наиболее общим [3, 6, 7]. Различные модели динамо позволяют получить случайные последовательности инверсий, свойства которых сильно отличаются в зависимости от выбора параметров. Первые два используются, когда эффективности α - и Ω -генераторов резко отличаются. В частности, для Земли характерны сильное дифференциальное вращение объекта и турбулентный характер движения проводящей среды, при которых генерацию магнитного поля описывают с помощью $\alpha\Omega$ -динамо [2, 3, 6–8]. В своей работе мы используем маломодовую модель $\alpha\Omega$ -динамо [9] для исследования смены полярности магнитного поля, не связанной с перестройкой конвекции. В рамках данной модели такое исследование удобнее проводить во временных масштабах, сравнимых со временем затухания магнитного поля. Использование новой временной шкалы приведет к перемасштабированию магнитогидродинамической системы, описывающей динамо. Кроме того, целесообразным представляется обезразмеривание системы в целом, что снизит возможность возникновения расчетных погрешностей на длительных временных интервалах, перегрузки численных решений большими значениями и ухода на «машинную» бесконечность. Данная статья посвящена решению задач перемасштабирования и обезразмеривания МГД-системы в рамках принятых ограничений модели $\alpha\Omega$ -динамо, численному моделированию МГД-системы с учетом введенной аддитивной поправки интенсивности α -эффекта в виде интегральной функции с показательным ядром и анализу результатов моделирования.

1. Постановка задачи

Опишем основные положения и ограничения модели. Исследование проводится в рамках модели $\alpha\Omega$ -динамо, где жидкое ядро Земли полагается ограниченной сферической оболочкой с центром в начале координат. Сферическая оболочка вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью Ω . Поле скорости \mathbf{v} вязкой несжимаемой жидкости внешнего ядра и порождаемое магнитное поле считаем аксиально симметричными. Внутренняя граница оболочки жидкого ядра имеет радиус $r = r_1$, а внешняя – радиус $r = r_2$ ($r_1 < r_2$), на которых поле скорости вязкой жидкости \mathbf{v} нулевое (граничные условия прилипания). Принимаем магнитную проницаемость внутреннего и внешнего ядер одинаковыми, а среду за границей внешнего ядра ($r > r_2$) – непроводящей. Таким образом, для магнитного поля принимаются вакуумное граничное условие на внешней границе и условие ограниченности в центре Земли. Физические параметры оболочки считаем неизменными и турбулентность в ядре изотропной. Полагаем также, что турбулентный α -эффект антисимметричен относительно экватора, поэтому используем его скалярную параметризацию в виде функции $\alpha(r, \theta) = \alpha_0 a(r) \cos \theta = \alpha_0 \alpha'(r, \theta)$, где положительный коэффициент α_0

определяет интенсивность α -эффекта, $\alpha'(r, \theta)$ – безразмерная величина, радиальная составляющая $a(r)$ удовлетворяет условию $\max |a(r)| \sim 1$. В соответствии с принятой моделью динамо считаем, что среднее течение $\bar{\mathbf{v}}$ носит характер дифференциального вращения в поле внешних сил с массовой плотностью \mathbf{f}_{out} [2, 3, 7, 8]. Тогда маломодовая модель будет описываться МГД-уравнениями, включающими уравнение Навье – Стокса, уравнение индукции магнитного поля \mathbf{B} с учетом турбулентного α -эффекта, условие неразрывности поля скорости \mathbf{v} , условие соленоидальности магнитного поля и граничные условия. В приближении Буссинеска МГД-система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{f}_c &= \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P - \mathbf{f}_K + \mathbf{f}_{out} + \mathbf{f}_L, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\alpha(r, \theta) \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}_1) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

где ускорение центробежной силы

$$\mathbf{f}_c = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \tag{2}$$

значение угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ изменяется в пределах $10^{-1} \div 10$ 1/с, ν – кинематическая вязкость (пределы изменения $10^{-6} \div 10^2$ м²/с), $\rho_0 = 7 \cdot 10^3$ кг/м³ – плотность, P – давление, ν_m – магнитная вязкость (изменяется в пределах $1 \div 20$ м²/с), массовая плотность силы Кориолиса

$$\mathbf{f}_K = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \tag{3}$$

\mathbf{f}_{out} – массовая плотность поля внешних сил (источник полоидальной скорости), массовая плотность силы Лоренца

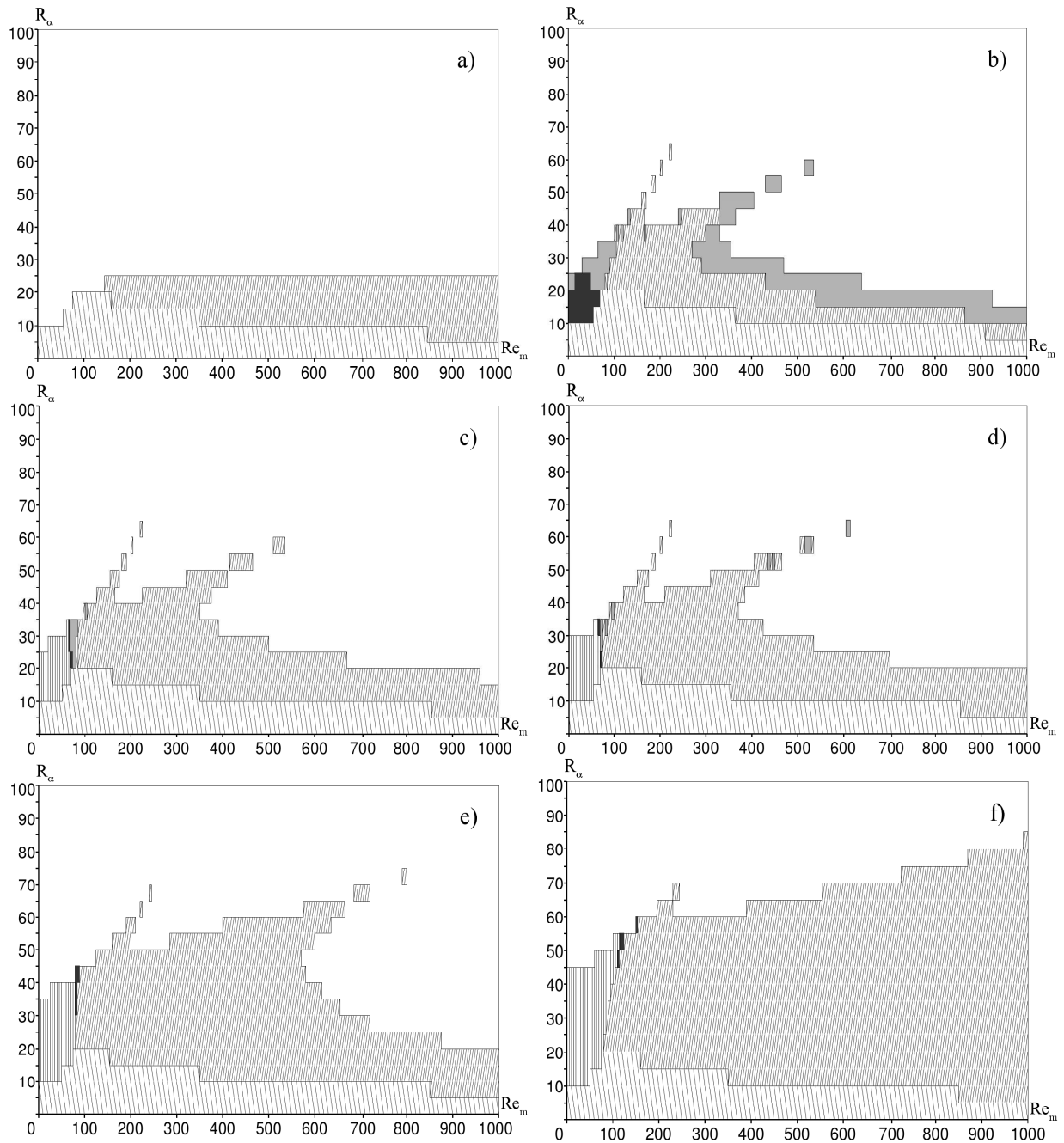
$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{\rho_0 \mu_0 \mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \tag{4}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м – магнитная постоянная, $\mu = 1$ – магнитная проницаемость, \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 – радиусы-векторы внутренней и внешней границ сферической оболочки жидкого ядра.

При постоянной интенсивности α -эффекта α_0 в рамках используемой модели система (1) определяет три режима магнитного поля: затухающий, регулярный и неограниченное увеличение (расходимость поля) (рисунок а). Интенсивность α_0 может изменяться со временем под действием внешних сил. Такое изменение определим путем ввода в динамическую систему (1) аддитивной поправки для интенсивности α -эффекта в виде функции

$$Z(t) = \int_0^t J(t - \tau) Q(\mathbf{B}(\tau), \mathbf{B}(\tau)) d\tau. \tag{5}$$

Функция (5) имеет размерность скорости [м/с], как и функция $\alpha(r, \theta)$, и используется с целью регулирования степени влияния турбулентного эффекта за счет задержки



Характер генерации магнитного поля в зависимости от параметров Re_m и Re_α . Интенсивность α -эффекта: а) постоянная – α_0 ; в остальных случаях определяется функцией $Z(t)$ с ядром: б) $J(t) = e^{-0,1t}$, в) $J(t) = e^{-0,5t}$, д) $J(t) = e^{-t}$, е) $J(t) = e^{-5t}$, ф) $J(t) = e^{-10t}$. Белая область – магнитное поле бесконечно возрастает, разреженная наклонная штриховка – магнитное поле затухает, частая наклонная штриховка – регулярный режим генерации магнитного поля, вертикальная штриховка – стационарный режим, черная область – вазциляция, серая область – динамо-всплеск

или поддержания его воздействия. Характер такого воздействия определяется безразмерным ядром $J(t - \tau)$. Квадратичная форма $Q(\mathbf{B}(\tau), \mathbf{B}(\tau))$ в подынтегральном выражении имеет размерность $[M/c^2]$, а ее коэффициенты q_{ij} $[M/(c \text{ Гл})^2]$. С учетом аддитивной поправки для интенсивности α -эффекта МГД-система (1) запишется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{f}_c &= \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P - \mathbf{f}_K + \mathbf{f}_{out} + \mathbf{f}_L, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\alpha_0 - Z(t)) \alpha'(r, \theta) \mathbf{B} + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}_1) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{6}$$

2. Свойства МГД-системы

Прежде, чем переходить к обезразмериванию, а в дальнейшем к численному решению системы (6), преобразуем ее и исследуем влияние на результат численного моделирования изменения основных параметров системы уравнений в λ раз.

Поскольку при постоянной угловой скорости Ω ускорение центробежной силы (2) в (1) представимо в следующем виде

$$\mathbf{f}_c = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \nabla (\Omega \times \mathbf{r})^2, \tag{7}$$

то его можно объединить вместе с давлением в одно потенциальное слагаемое $\frac{1}{\rho_0} \nabla P^*$, где редуцированное давление будет задаваться выражением

$$P^* = P + \frac{1}{2} \rho_0 (\Omega \times \mathbf{r})^2. \tag{8}$$

Тогда система (6) в соответствии с принятыми обозначениями (3), (4), (8) и учетом того факта, что $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0$, т.к. в модели рассматриваются собственные колебания вязкой вращающейся жидкости малой амплитуды [9], может быть записана в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P^* - 2\Omega \times \mathbf{v} + \mathbf{f}_{out} + \frac{1}{\rho_0 \mu_0 \mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (\alpha_0 - Z(t)) (\nabla \times \alpha'(r, \theta) \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}_1) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{9}$$

Исследуем, сохранится ли инвариантность формы записи МГД-системы (9) при изменении массовой плотности внешних сил в λ раз

$$\tilde{\mathbf{f}}_{out} = \lambda \mathbf{f}_{out}. \tag{10}$$

Выразим из (10) \mathbf{f}_{out} , подставим в систему (9) и, учитывая вид функции $Z(t)$ (5), получим систему (9) в преобразованном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} &= \nu \Delta \tilde{\mathbf{v}} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{P} - 2\Omega \times \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{f}}_{out} + \frac{1}{\rho_0 \mu_0 \mu} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}, \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} &= \frac{1}{\lambda} \nabla \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}}) + (\alpha_0 - \frac{1}{\lambda} Z(t)) (\nabla \times \alpha'(r, \theta) \tilde{\mathbf{B}}) + \nu_m \Delta \tilde{\mathbf{B}}, \\ \nabla \tilde{\mathbf{v}} &= 0, \\ \nabla \tilde{\mathbf{B}} &= 0, \\ \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_1) &= \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Общий вид всех уравнений, кроме уравнения индукции, в результате перемасштабирования не изменится. Таким образом, увеличение или уменьшение воздействия внешних сил в λ раз приводит к изменению масштаба магнитного поля соответственно в $\sqrt{\lambda}$ раз, а полей скорости и давления в λ раз. При увеличении значений λ увеличиваются амплитуды этих полей, однако коэффициент $1/\lambda$ при этом уменьшается, что приводит к уменьшению влияния функции $Z(t)$ на интенсивность α -эффекта, а значит к уменьшению возможности изменения режимов генерации магнитного поля на фоне незначительных изменений поля скорости по сравнению со случаем, когда интенсивность α -эффекта постоянна.

К аналогичным выводам приходим, если проводить исследование системы (9) при изменении поля скорости или магнитного поля в λ раз. Неинвариантность формы уравнения магнитной индукции при таком преобразовании может повлиять на режим генерации магнитного поля и изменить картину на фазовой плоскости. Отметим также, что появление нормировочного коэффициента λ в ядре функции $Z(t)$

$$Z(t) = \int_0^t \lambda J(t - \tau) Q(\mathbf{B}(\tau), \mathbf{B}(\tau)) d\tau \quad (12)$$

равносильно перемасштабированию магнитного поля

$$Z(t) = \int_0^t J(t - \tau) Q(\sqrt{\lambda} \mathbf{B}(\tau), \sqrt{\lambda} \mathbf{B}(\tau)) d\tau = \int_0^t J(t - \tau) Q(\tilde{\mathbf{B}}(\tau), \tilde{\mathbf{B}}(\tau)) d\tau. \quad (13)$$

Поэтому произойдет такое же перемасштабирование остальных параметров, но в данном случае в левой части уравнения индукции появится коэффициент $1/\lambda$ только перед первым слагаемым, что не окажет влияния на функцию $Z(t)$ и не изменит степени ее воздействия на амплитуду α -эффекта. Таким образом, введение нормировочного коэффициента в функцию $Z(t)$ приведет к перемасштабированию поля скорости и магнитного поля, а также повлияет на режимы генерации магнитного поля.

3. Обезразмеривание уравнений МГД-системы

Введем характерные величины скорости u_0 [м/с] и линейного размера области L [м] (радиус внешнего ядра), а в качестве составных будем рассматривать единицы магнитной индукции B_0 [Тл], давления P_0 [Па], массовой плотности внешних сил f_0 [Н/кг] и угловой скорости Ω_0 [1/с]. Исходя из принятых предположений модели, определим поле скорости как линейную комбинацию $\mathbf{v} = u_0 \mathbf{v}'$, где \mathbf{v}' – безразмерное поле, индукцию магнитного поля как $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{B}'$, где \mathbf{B}' – безразмерное поле, угловую

скорость $\mathbf{\Omega} = \Omega_0 \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси вращения Oz , давление $P^* = P_0 P'$, где P' – безразмерная величина, и массовую плотность внешних сил $\mathbf{f}_{out} = f_0 \mathbf{f}'_{out}$, где \mathbf{f}'_{out} – безразмерное поле. В качестве единицы времени используем время затухания магнитного поля при отсутствии внешних воздействий (подкачки) – время диссипации магнитного поля L^2/ν_m [с], порядок которого составляет 10^4 лет. Тогда переход к новой временной шкале определяется соотношением $t = \frac{L^2}{\nu_m} t'$. Проведем перемасштабирование системы (9), принимая во внимание введенные характерные величины, ограничения и зависимости, и обезразмерим ее

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} &= \frac{\nu}{\nu_m} \Delta \mathbf{v}' - \frac{P_0 L}{\rho_0 u_0 \nu_m} \nabla P' - \frac{2\Omega_0 L^2}{\nu_m} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}') + \frac{L^2 f_0}{u_0 \nu_m} \mathbf{f}'_{out} + \\ &+ \frac{B_0^2 L}{\mu \mu_0 \rho_0 \nu_m u_0} (\nabla \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}', \\ \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} &= \frac{u_0 L}{\nu_m} [\nabla \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}')] + \left(\frac{\alpha_0 L}{\nu_m} - \frac{L}{\nu_m} Z(t') \right) [\nabla \times \alpha'(r, \theta) \mathbf{B}'] + \Delta \mathbf{B}', \\ \nabla \mathbf{v}' &= 0, \\ \nabla \mathbf{B}' &= 0, \\ \mathbf{v}' \left(\frac{\mathbf{r}_1}{L} \right) &= \mathbf{v}'(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{14}$$

В качестве управляющих параметров системы примем безразмерные параметры: $\frac{u_0 L}{\nu_m}$ – это магнитное число Рейнольдса Re_m и $R_\alpha = \frac{\alpha_0 L}{\nu_m}$ – безразмерная амплитуда α -эффекта. Учитывая, что $\frac{\nu}{\nu_m} = P_m$ – магнитное число Прандтля и $\frac{\nu}{\omega L^2} = E$ – число Экмана, коэффициент в кориолисовом члене можно выразить следующим образом $\frac{\Omega_0 L^2}{\nu_m} = \frac{\Omega_0 L^2}{\nu} \frac{\nu}{\nu_m} = E^{-1} P_m$. Для упрощения системы и дальнейшего ее использования для численного моделирования удобно принять равными единицам коэффициенты $\frac{P_0 L}{\rho_0 u_0 \nu_m} = 1$, $\frac{L^2 f_0}{u_0 \nu_m} = 1$, $\frac{B_0^2 L}{\mu \mu_0 \rho_0 \nu_m u_0} = 1$, выбрав соответствующие значения магнитной индукции B_0 , давления P_0 и массовой плотности внешних сил f_0 . В результате перехода к новой системе единиц в обезразмеренном виде МГД-система (9) запишется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} &= P_m \Delta \mathbf{v}' - \nabla P' - E^{-1} P_m (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}') + \mathbf{f}'_{out} + (\nabla \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}', \\ \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} &= Re_m [\nabla \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}')] + (R_\alpha - Z'(t')) [\nabla \times \alpha'(r, \theta) \mathbf{B}'] + \Delta \mathbf{B}', \\ \nabla \mathbf{v}' &= 0, \\ \nabla \mathbf{B}' &= 0, \\ \mathbf{v}' \left(\frac{\mathbf{r}_1}{L} \right) &= \mathbf{v}'(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{15}$$

4. Численное моделирование

Для численной реализации системы (15) используем маломодовое приближение, включающее минимальное количество мод скорости и магнитной индукции, позволяющее получить инверсии в модели $\alpha\Omega$ -динамо с переменной интенсивностью α -

генератора [10–12]. В данном случае ограничиваемся одномодовым приближением поля скорости

$$\mathbf{v} = u(t)\mathbf{v}_0 = u(t)(\alpha_1\mathbf{v}_{0,1,0}^T + \alpha_2\mathbf{v}_{0,2,0}^P + \alpha_3\mathbf{v}_{0,3,0}^T + \alpha_{11}\mathbf{v}_{1,1,0}^T + \alpha_{13}\mathbf{v}_{1,3,0}^T), \quad (16)$$

и трехмодовым приближением магнитного поля

$$\mathbf{B} = B_2^T(t)\mathbf{B}_{0,2,0}^T(\mathbf{r}) + B_1^P(t)\mathbf{B}_{0,1,0}^P(\mathbf{r}) + B_3^P(t)\mathbf{B}_{0,3,0}^P(\mathbf{r}), \quad (17)$$

где $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ – мода Пуанкаре, представленная в виде разложения в гильбертовом подпространстве $H_2^T = \{\mathbf{v}_{0,1,0}^T, \mathbf{v}_{0,2,0}^P, \mathbf{v}_{0,3,0}^T, \dots\}$ [4] таким образом, чтобы $|\mathbf{v}_0(\mathbf{r})| = 1$, $u(t)$ – амплитуда скорости, $\mathbf{B}_{0,1,0}^P(\mathbf{r})$ – дипольная составляющая магнитного поля, которая под воздействием дифференциального вращения порождает тороидальную $\mathbf{B}_{0,2,0}^T(\mathbf{r})$ и полоидальную $\mathbf{B}_{0,3,0}^P(\mathbf{r})$ составляющие. Компоненты поля скорости и магнитного поля считаются независимыми. Функция $Z(t)$ (5) задается как

$$Z(t) = \int_0^t e^{-b(t-\tau)} \mathbf{B}^2(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где характер воздействия определяется показательным ядром $J(t) = e^{-bt}$. Выбор в качестве ядра $J(t)$ показательной функции определяет процесс с конечным временем ожидания или памяти, подавляющее влияние которого на изменение интенсивности α -эффекта включается в начальный момент времени и постепенно накапливается в течение времени ожидания. Для различных значений масштабного коэффициента b время ожидания t_0 вычислялось, исходя из соотношения

$$\int_0^{t_0} e^{-bt} dt = 0.95 \int_0^{\infty} e^{-bt} dt. \quad (19)$$

Подставим в систему (15) разложения (16), (17) и функцию (18). После применения метода Галеркина получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -P_m u(t) \sum_k \alpha_k^2 \lambda_k + f_{out} + \sum_{i,j,k} \alpha_i L_{ijk} B_j B_k, \\ \frac{\partial B_i}{\partial t} &= Re_m u(t) \sum_{j,k} \alpha_j W_{ijk} B_k - \mu_i B_i + (R_\alpha - Z) \sum_k W_{ik}^\alpha B_k, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} &= \sum_k B_k^2 - bZ, \end{aligned} \quad (20)$$

где λ_i – собственное значение моды Пуанкаре, коэффициенты $L_{ijk}, W_{ijk}, W_{ij}^\alpha$ – объемные интегралы от рассматриваемых полей, μ_i – коэффициент вязкой диссипации.

Для численной реализации системы (20) использованы неявный метод Эйлера и явный четырехэтапный метод Рунге – Кутты. Шаг дискретизации h выбран равным 10^{-5} . Приняты начальные условия, обеспечивающие выход системы из точки покоя в момент времени $t = 0$ и генерацию остальных компонент магнитного поля,

$$u(0) = 1, B_2^T(0) = 0, B_1^P(0) = 1, B_3^P(0) = 0, Z(0) = 0. \quad (21)$$

Значение массовой плотности внешних сил f_{out} принято равным коэффициенту при $u(t)$ для обеспечения компенсации затухающего эффекта в поле скорости. Управляющие параметры модели – магнитное число Рейнольдса Re_m и амплитуда α -эффекта R_α , задавались в диапазонах $(0, 1000]$ и $(0, 100]$ соответственно. Вычисления проводились для значений масштабного коэффициента b , представленных в таблице. Оба метода при заданных параметрах модели дали идентичные результаты, которые представлены на фазовой плоскости параметров Re_m, R_α (рисунок b – f). Полученные результаты показывают, что с увеличением значения масштабного коэффициента b ядра функции $Z(t)$ на фазовой плоскости уменьшается область расходимости магнитного поля, по сравнению со случаем, когда интенсивность α -эффекта постоянна (рисунок a). Появляются области, где генерируются новые режимы: стационарный, васцилляция, динамо-всплеск. С ростом значений масштабного коэффициента b значительно увеличиваются области регулярного и стационарного режимов генерации магнитного поля, в то время как области васцилляций и динамо-всплеска постепенно уменьшаются. Такие изменения на фазовой плоскости связаны с поведением ядра функции $Z(t)$.

Время ожидания t_0 при увеличении значения масштабного коэффициента – уменьшается, как и интеграл от функции $J(t)$ на промежутке $[0, \infty)$ (см. таблицу). Таким образом, при одинаковых в остальных условиях численного эксперимента разнообразие режимов генерации магнитного поля в условиях слабо изменяющегося поля скорости увеличивается при уменьшении значений масштабного коэффициента b , когда α -эффект подавляется процессом, описываемым функцией $Z(t)$, в течение длительного времени ожидания. Воздействие растянуто во времени, что позволяет на интервале $0 < Re_m < 500$ подавить расходимость поля при $R_\alpha < 50$. Когда значения масштабного коэффициента увеличиваются ($b \geq 1$), на первых отсчетах времени сосредоточивается большее по значению тормозящее воздействие процесса $Z(t)$ и незначительно изменяется в течение остального времени. Это воздействие уменьшает влияние α -эффекта и значительно увеличивает область незатухающих ограниченных осцилляций магнитного поля, но приводит к уменьшению разнообразия режимов генерации.

Таким образом, введение аддитивной поправки интенсивности α -эффекта с ядром в виде показательной функции приводит к увеличению области генерации незатухающих осцилляций магнитного поля, в том числе с инверсиями, на фоне слабо изменяющегося поля скорости и сокращению области расходимости магнитного поля. Дополнительное подавляющее α -эффект воздействие процесса, определяемого функцией $Z(t)$, естественным образом не приводит к уменьшению области затухания магнитного поля, а лишь незначительно увеличивает ее при $b < 1$.

Заключение

В рамках принятой маломодовой модели $\alpha\Omega$ -динамо и предположении аксиальной симметрии поля скорости и магнитного поля проведено перемасштабирование и обез-

Таблица
Характеристики функции $J(t)$

b	t_0	интеграл от $J(t)$
0,1	29,957	10
0,5	5,992	2
1	2,996	1
5	0,599	0,2
10	0,3	0,1

размеривание МГД-системы. Временной масштаб выбран равным времени диссипации магнитного поля под воздействием внешней силы и при отсутствии в дальнейшем дополнительных воздействий. Система приведена к виду, упрощающему дальнейшую численную реализацию математической модели.

Исследование свойств МГД-системы показало, что увеличение воздействия внешних сил приведет к увеличению амплитуд поля скорости и индукции магнитного поля. Причем рост значений поля скорости будет интенсивнее в $\sqrt{\lambda}$ раз, что может приводить к значительным изменениям его амплитуды. В то же время влияние функции $Z(t)$ будет сводиться к минимуму и не приведет к значительным изменениям режимов генерации магнитного поля по сравнению со случаем постоянной интенсивности α -эффекта. Следовательно, при реализации численной схемы обезразмеренной МГД-системы (15) для обеспечения компенсации затухающего эффекта в поле скорости достаточно принять значение массовой плотности внешних сил равным коэффициенту при $u(t)$ в уравнении Навье – Стокса, а для уменьшения вариаций амплитуды поля скорости ввести нормировочный коэффициент в ядро функции $Z(t)$.

Результаты расчетов показали, что торможение интенсивности α -эффекта путем введения процесса, описываемого функцией $Z(t)$ с показательным ядром, приводит по сравнению со случаем постоянной интенсивности α_0 к появлению новых режимов генерации магнитного поля, в том числе с инверсиями. Воздействие процесса, определяемое ядром с большим временем ожидания, приводит к большему разнообразию режимов генерации магнитного поля, а с уменьшением времени ожидания – значительно уменьшается область расходимости магнитного поля.

Литература

1. Merrill, R.T. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle / R.T. Merrill, M.W. McElhinny, P.L. McFadden. – London: Academic Press, 1996.
2. Steenbek, M. Zur Dynamotheorie stellarer und planetarer magnetfelder. Berechnung sonnenähnlicher wechselfeld generatoren / M. Steenbek, F. Krause // *Astronomische Nachrichten*. – 1969. – № 291. – P. 49–84.
3. Zeldovich, Ya.B. Magnetic Fields in Astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics / Ya.B. Zeldovich, A.A. Rusmaikin, D.D. Sokoloff. – New York: Gordon and Breach, 1983.
4. Водинчар, Г.М. Инверсии в модели геодинамо, управляемой 6-ячейковой конвекцией / Г.М. Водинчар, Л.К. Феценко // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. – 2015. – Т. 11, № 2. – С. 45–54.
5. Гледзер, Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов. – М.: Наука, 1981.
6. Parker, E.N. Hydromagnetic Dynamo Models / E.N. Parker // *The Astrophysical Journal*. – 1955. – № 122. – P. 293–314.
7. Krause, F. Mean-Filed Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory / F. Krause, K.-H. Raedler. – Oxford: Pergamon Press, 1980.
8. Steenbek, M. Berechnung der mittlerer Lorentz–Field starke $\mathbf{v} \times \mathfrak{B}$ für ein elektrisch leitendes medium in Turbulenter, Durch Coriolis–Kräfte beeinflusster bewegung / M. Steenbek, F. Krause, K.-H. Raedler // *Zeitschrift fur naturforschung*. – 1996. – № 21. – P. 369–376.

9. Водинчар, Г.М. Использование собственных мод колебаний вязкой вращающейся жидкости в задаче крупномасштабного динамо / Г.М. Водинчар // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2013. – Т. 7, № 2. – С. 33–42.
10. Godomskaya, A.N. Reversals in the Low-Mode Model Dynamo with $\alpha\Omega$ -generators / A.N. Godomskaya, O.V. Sheremetyeva // E3S Web of Conferences. – 2018. – V. 62. – Article ID: 02016. – 6 p.
11. Godomskaya, A.N. Modes of Magnetic Field Generation in Models of a $\alpha\Omega$ -dynamo with a Power Type α -generator / A.N. Godomskaya, O.V. Sheremetyeva // E3S Web of Conferences. – 2019. – V. 127. – Article ID: 02023. – 7 p.
12. Годомская, А.Н. Режимы генерации магнитного поля в модели $\alpha\Omega$ -динамо с α -генератором степенного типа / А.Н. Годомская, О.В. Шереметьева // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2019. – Т. 29, № 4. – С. 58–66.

Ольга Владимировна Шереметьева, кандидат технических наук, научный сотрудник, лаборатория моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН (Камчатский край, с. Паратунка, Российская Федерация), sheremeteva@ikir.ru.

Анна Николаевна Годомская, педагог дополнительного образования, естественно-научный отдел, Муниципальное бюджетное учреждение дополнительного образования «Центр «Луч» (г. Елизово, Российская Федерация), anna_antonenko@mail.ru.

Поступила в редакцию 17 сентября 2020 г.

MSC 65N80

DOI: 10.14529/mmp210203

MODELLING THE MAGNETIC FIELD GENERATION MODES IN THE LOW-MODE MODEL OF THE $\alpha\Omega$ -DYNAMO WITH VARYING INTENSITY OF THE α -EFFECT

O. V. Sheremetyeva¹, A. N. Godomskaya²

¹Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russian Federation

²Municipal Budgetary Institution of Supplementary Education “Center “Luch”, Yelizovo, Russian Federation

E-mails: sheremeteva@ikir.ru, anna_antonenko@mail.ru

In the framework of the $\alpha\Omega$ -dynamo model a magnetohydrodynamic system (MHD-system) with an included additive correction of the α -effect intensity in the form of a function $Z(t)$ is considered. The variation of the α -effect intensity with time is determined by the exponential kernel $J(t)$ of the function $Z(t)$. A preliminary analysis of the changes influence in the values of the mass density of external forces and the α -effect intensity on the values of the magnetic field and the velocity field is carried out. To simplify the numerical model, the MHD-system was rescaled and the time of the magnetic field dissipation, which

is of the order of 10^4 years, was taken as a unit of time. The time unit choice is determined by the need to study the magnetic field modes on a large time scales. In order to reduce the number of variable parameters, the MHD-system was made dimensionless so that the control parameters are the Reynolds number, which carries information about the large-scale generator, and the amplitude of the α -effect, which characterizes the turbulent generator. The results of numerical simulation of the modes of magnetic field generation are displayed on the phase plane of the control parameters. The question of the dynamics of the change in the pattern on the phase plane depending on the waiting time determined by the scale factor of the exponential kernel $J(t)$ of the function $Z(t)$ is investigated.

Keywords: $\alpha\Omega$ -dynamo; magnetohydrodynamic system; modes of magnetic field generation; reversal.

References

1. Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. London, Academic Press, 1996.
2. Steenbek M., Krause F. Zur dynamotheorie stellarer und planetarer magnetfelder. Berechnung sonnenähnlicher wechselfeldgeneratoren. *Astronomische Nachrichten*, 1969, no. 291, pp. 49–84. (in German)
3. Zeldovich Ya.B., Rusmaikin A.A., Sokoloff D.D. *Magnetic Fields in Astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics*. New York, Gordon and Breach, 1983.
4. Vodinchar G.M., Feshenko L.K. [Reversals in the 6-Cells Convection Driven]. *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 41–50. (in Russian) DOI: 10.18454/2313-0156-2015-11-2-41-50
5. Gledzer E.B., Dolzhanskiy F.V., Obukhov A.M. *Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ikh primeneniye* [Hydrodynamic Type Systems and Their Application]. Moscow, Nauka, 1981. (in Russian)
6. Parker E.N. Hydromagnetic Dynamo Models. *The Astrophysical Journal*, 1955, no. 122, pp. 293–314.
7. Krause F., Raedler K.-H. *Mean-Filed Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. Oxford, Pergamon Press, 1980.
8. Steenbek M., Krause F., Raedler K.-H. Berechnung der mittlerer lorentz–field starke $\mathbf{v} \times \mathfrak{B}$ für ein elektrisch leitendes medium in turbulenter, durch Coriolis–Kräfte beeinflusster bewegung. *Zeitschrift für Naturforschung*, 1996, no. 21, pp. 369–376. (in German)
9. Vodinchar G.M. [Using Modes of Free Oscillation of a Rotating Viscous Fluid in the Large-Scale Dinamo]. *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2013, vol. 7, no. 2, pp. 33–42. (in Russian) DOI: 10.18454/2079-6641-2013-7-2-33-42
10. Godomskaya A.N., Sheremetyeva O.V. Reversals in the Low-Mode Model Dynamo with $\alpha\Omega$ -Generator. *E3S Web of Conferences*, 2018, vol. 62, 6 p. DOI: 10.1051/e3sconf/20186202016.
11. Godomskaya A.N., Sheremetyeva O.V. Modes of Magnetic Field Generation in Models of a $\alpha\Omega$ -dynamo with a Power Type α -generator. *E3S Web of Conferences*, 2019, vol. 127, article ID: 02023, 7 p. DOI: 10.1051/e3sconf/201912702016
12. Godomskaya A.N., Sheremetyeva O.V. [Dependence of the Magnetic Field Generation in the Model of a $\alpha\Omega$ -Dynamo on the Generator Intensity of a Power Type]. *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 29, no 4, pp. 58–66. (in Russian) DOI: 9.26107/2079-6641-2019-29-4-58-66

Received September 17, 2020