

**РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ И ФЕРРОМАГНЕТИКОВ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ И МОДЕЛИ ДЖИЛСА – АТТЕРТОНА**

*Р.В. Арутюнян*, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

В статье рассматривается расчет трехмерного магнитного поля системы постоянных магнитов и ферромагнетиков на основе интегрального уравнения намагниченности и модели Джиллса – Аттертона. Предполагается, что магнитная система состоит из постоянных магнитов и конструктивных элементов, выполненных из ферромагнитных материалов с известными характеристиками. Одной из задач является учет влияния магнитного гистерезиса материала каркаса на точность расчета магнитного поля. Для решения интегрального уравнения намагниченности используются метод ячеек и метод итерационной релаксации. Основная кривая намагниченности вычисляется по формуле Ланжевена. В качестве модельной задачи рассматривается расчет магнитного поля, создаваемого прямоугольным постоянным магнитом, расположенным на ферромагнитном основании в виде параллелепипеда. Полученные результаты могут быть использованы также при решении прямых и обратных задач для системы ферромагнитных тел и в тестовых задачах для сравнения с другими методами.

*Ключевые слова:* ферромагнит; постоянный магнит; магнитное поле; интегральное уравнение; гистерезис; клеточный метод; релаксационный метод.

**Введение**

Благодаря возможности создавать магнитное поле без привлечения внешних источников энергии постоянные магниты широко применяются в конструкциях электротехнических устройств. В статье предполагается, что магнитная система состоит из постоянных магнитов и конструктивных частей из ферромагнитных материалов с известными характеристиками. Одна из актуальных проблем теории расчета магнитного поля таких устройств связана с учетом влияния магнитного гистерезиса материала каркаса на точность расчета магнитного поля [1]. Для решения данной проблемы в статье исследуется метод расчета трехмерного магнитостатического поля в электротехнической системе на основе соответствующего интегрального уравнения намагниченности с учетом гистерезиса согласно модели Джиллса – Аттертона [1–4]. Задачи данного типа в литературе [1–12] рассмотрены ограниченно.

Моделирование явления гистерезиса представляет собой одну из самых сложных задач при создании расчетных алгоритмов, направленных на исследование и проектирование электромагнитных устройств, в конструкции которых присутствуют ферромагнитные элементы. Среди математических моделей гистерезиса можно выделить следующие основные модели: Прейсаха и ее многочисленные модификации, Стонера

– Вольфарта и модель Джилса – Аттертона [12]. Модель Преисаха является стохастической моделью и при численной реализации требует вычисления многомерных интегралов от нелинейных функций. Вторая из упомянутых моделей, хотя и построена на основе физических аналогий, с точки зрения вычислительных затрат обладает тем же недостатком ввиду необходимости интегрирования нелинейных функций. В основе модели Джилса – Аттертона лежит нелинейное дифференциальное уравнение относительно вектора намагниченности  $M$  и вектора напряженности поля  $H$ , которое решается итерационным методом. Этот факт также является неблагоприятным для построения производительного алгоритма, поскольку алгоритмы решения уравнений на основе МКЭ также являются итерационными. Кроме того, имеется еще трудность перехода от вектора намагниченности к вектору магнитной индукции. В этих случаях задача обычно формулируется в терминах векторного магнитного потенциала.

Согласно известным данным последние версии пакета Ansys Maxwell позволяют учитывать векторный магнитный гистерезис [13]. Данной проблеме посвящено множество публикаций на крупнейшей международной конференции по расчету электромагнитных полей COMPMAG. При этом разработка моделей векторного магнитного гистерезиса продолжается. Неясными остаются вопросы о детальности параметризации модели, об учете наведенной анизотропии, об эффективных способах сопряжения модели с процессом расчета электромагнитного поля.

Модель Джилса – Аттертона позволяет рассчитывать малую и большую петли гистерезиса, но в исходном виде подходит только для изотропных материалов. Расширение этой модели позволяет моделировать анизотропные магнитные материалы.

В публикациях [12–14] описывается, в частности, гистерезисная модель нелинейного индуктора, используемая в симуляторе LTspice, производится её сравнение с моделью Джилса – Аттертона. В этом симуляторе предусмотрено два способа задания нелинейности индуктивности. Первый позволяет аналитически задавать зависимости потока магнитной индукции от тока в обмотке катушки индуктивности. Этот способ редко используется для моделирования нелинейной индуктивности. Второй способ позволяет использовать упрощенную гистерезисную модель магнитного сердечника, которую предложил Джон Чан. В отличие от модели Джилса-Аттертона, которая используется сейчас в большинстве коммерческих SPICE-симуляторов, гистерезисная модель LTspice использует только основные параметры петли магнитного гистерезиса.

Модель Джилса – Аттертона хорошо воспроизводит предельные циклы перемагничивания, но сильно искажает частные циклы, где погрешность модели превышает сотни процентов. По сравнению с ней гистерезисная модель [12] обеспечивает хорошее совпадение как предельных, так и частных циклов перемагничивания. В [14] при расчете динамического перемагничивания учитывалась магнитная вязкость (магнитное последствие) – задержка во времени изменения магнитных характеристик ферромагнетиков (намагниченности, магнитной проницаемости и др.) от изменений напряженности внешнего магнитного поля, вследствие которой намагниченность образца устанавливается после изменения напряжённости поля через время от  $10^{-9}$  с до десятков минут и даже часов. В диссертации [14] использовалось интегральное уравнение намагниченности и модель магнитной вязкости Джилса для расчета поля в сердечниках трансформаторов с учетом гистерезиса при переменном токе для построения динамической петли гистерезиса.

Отмеченные обстоятельства свидетельствуют о необходимости совершенствования математической модели гистерезиса, лишенной отмеченных недостатков. В данной статье предлагается подход на основе объединения основного интегрального уравнения магнитостатики и модели Джилса – Аттертона. Координаты вектора намагниченности находятся из условия сонаправленности с вектором напряженности. Для решения получающейся нелинейной интегрально-дифференциальной системы применяется метод установления, основанный на переходе к некоторой динамической задаче с устанавливаемым стационарным решением.

## 1. Описание метода расчета

Пространственное интегро-дифференциальное уравнение намагниченности широко применяется для решения прямых и обратных задач магнитостатики. Предположим, что материал с магнитными свойствами (вообще говоря, неоднородный с нелинейными и анизотропными свойствами) занимает объем  $V$ . Часть этого объема  $V_{pm}$  представляет собой постоянный магнит, оставшаяся часть объема  $V_f$  – ферромагнетик. Некоторая часть пространства  $V_J$  заполнена обмоткой с током.  $\vec{M}_n(Q)$  – остаточная намагниченность тела  $V$ .

Намагниченность связана с индукцией и напряженностью магнитного поля согласно векторному соотношению:  $\vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}$ . В немагнитной среде  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , в ферромагнетике и постоянном магните  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ . Для стационарного поля определяется скалярный магнитный потенциал:  $\vec{H} = -\nabla\varphi$ . Предполагаем, что на бесконечности потенциал равен нулю.

Магнитная восприимчивость материала  $\chi = \mu(Q, \vec{H}(Q))/\mu_0 - 1$ .

Магнитную напряженность, созданную различными источниками, например, током в обмотках, обозначим  $\vec{H}_S(Q)$ :  $\vec{H}_S(Q) = \int_{V_1} \vec{J}(P) \times \vec{r}_{PQ} / (4\pi r_{PQ}^3) dV_P$ , где  $\vec{J}(Q)$  – плотность распределенных в пространстве сторонних токов. Напряженность, созданная в результате намагниченности объема равна:

$$\vec{H}_M(Q) = -\text{grad}_Q \int_V \vec{M}(P) \vec{r}_{PQ} / (4\pi r_{PQ}^3) dV_P,$$

суммарная напряженность магнитного поля равна:  $\vec{H}(Q) = \vec{H}_S(Q) + \vec{H}_M(Q)$ .

При отмеченных обстоятельствах интегральное уравнение магнитостатики можно записать в виде [1, 2]:

$$\vec{M}(Q) = \chi \left[ \vec{H}(Q) + \text{grad}_Q \int_V \vec{M}(P) \text{grad}_P \frac{1}{4\pi r_{PQ}} dV_P \right] + \vec{M}_n(Q), \quad Q \in V, \quad (1)$$

или

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}_S(Q) + \chi \text{grad}_Q \int_V \vec{M}(P) \text{grad}_P \frac{1}{4\pi r_{PQ}} dV_P, \quad (2)$$

данные уравнения сингулярны, что представляет при численном решении значительную проблему. Поэтому целесообразно выделить сингулярность и переписать интегральные уравнения в регулярированной форме. Выделим некоторую относительно малую

окрестность в форме шара с радиусом  $\varepsilon$  и центром в точке  $Q : V_\varepsilon(Q)$ , тогда с точностью  $O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\text{grad}_Q \int_{V_\varepsilon(Q)} \vec{M}(P) \text{grad}_P \frac{1}{4\pi r_{PQ}} dV_P = -\vec{M}(Q)/3,$$

следовательно, интегральное уравнение можно переписать в регулярном виде:

$$(E + \chi/3) \vec{M}(Q) = \vec{M}_S(Q) + \chi \text{grad}_Q \int_{V-V_\varepsilon(Q)} \vec{M}(P) \text{grad}_P \frac{1}{4\pi r_{PQ}} dV_P,$$

где  $E$  – единичная матрица, магнитная восприимчивость может быть тензором.

Введем следующие обозначения для ядра уравнения:

$$\text{grad}_Q \left( \vec{M}(P) \text{grad}_P \frac{1}{4\pi r_{PQ}} \right) = D_3(P, Q) \vec{M}(P), \quad D_3(P, Q) = \frac{1}{r_{PQ}^3} \left[ \frac{3}{r_{PQ}^2} T_3(P, Q) - E \right],$$

где элементы матрицы  $T$  равны:  $t_{ij}^{(3)} = [x_i(P) - x_i(Q)][x_j(P) - x_j(Q)]$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $x_1(Q) = x_Q$ ,  $x_2(Q) = y_Q$ ,  $x_3(Q) = z_Q$  – декартовы координаты точки объема  $Q$ . Тогда получаем форму интегрального уравнения, более удобную для численного решения:

$$(E + \chi/3) \vec{M}(Q) = \vec{M}_S(Q) + \chi/(4\pi) \int_{V-V_\varepsilon(Q)} D_3(P, Q) \vec{M}(P) dV_P.$$

## 2. Численный метод решения интегрального уравнения

### 2.1. Дискретизация интегрального уравнения

Объем магнитного материала разобьем на  $N_0$  ячеек  $V_i$  (элементарные параллелепипеды). В пределах ячейки считаем намагниченность постоянной. Тогда интегралы в (1) и (2) вычисляются аналитически, а напряженность поля записывается в виде [1]:

$$\begin{aligned} \vec{H}(Q) = & \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1, j \neq i}^{N_0} \left[ \left( \int_{S_{x_2}^{(j)}} \frac{\vec{p}_{PQ} dS_P}{r_{PQ}^3} - \int_{S_{x_1}^{(j)}} \frac{\vec{r}_{PQ} dS_P}{r_{PQ}^3} \right) M_x^{(j)} + \right. \\ & + \left. \left( \int_{S_{x_2}^{(j)}} \frac{\vec{r}_{PQ} dS_P}{r_{PQ}^3} - \int_{S_{x_1}^{(j)}} \frac{\vec{r}_{PQ} dS_P}{r_{PQ}^3} \right) M_y^{(j)} + \left( \int_{S_{x_2}^{(j)}} \frac{\vec{r}_{PQ} dS_P}{r_{PQ}^3} - \int_{S_{x_1}^{(j)}} \frac{\vec{r}_{PQ} dS_P}{r_{PQ}^3} \right) M_z^{(j)} \right] - \\ & - \xi_V(Q) \vec{M}(Q) / 3, \quad Q \in V_i, \quad i = 1, \dots, N_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi_V(Q)$  – характеристическая функция объема  $V$ , поверхность ячейки представляет собой объединение граней  $S_{\text{ПМ}} = S_{X_1} \cup S_{X_2} \cup S_{Y_1} \cup S_{Y_2} \cup S_{Z_1} \cup S_{Z_2}$  с нормальными

$$\begin{aligned} \vec{n}_{x_1} &= (-1, 0, 0), \quad \vec{n}_{x_2} = (1, 0, 0), \quad \vec{n}_{y_1} = (0, -1, 0), \\ \vec{n}_{y_2} &= (0, 1, 0), \quad \vec{n}_{z_1} = (0, 0, -1), \quad \vec{n}_{z_2} = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Координаты вершин ячеек обозначим в виде:  $(x_i^{(j)}, y_i^{(j)}, z_i^{(j)})$ ,  $i = 1, 2; j = 1, \dots, N_0$ .  
Интегралы в (3) вычисляются точно на основе аналитических формул:

$$\int_{S_{z_0}} \frac{dS_P}{r_{PQ}} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx_p dy_p}{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2} = \int_{x_1 - x_Q}^{x_2 - x_Q} \int_{y_1 - y_Q}^{y_2 - y_Q} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= f(x_2 - x_Q, y_2 - y_Q, z) - f(x_1 - x_Q, y_2 - y_Q, z) - f(x_2 - x_Q, y_1 - y_Q, z) +$$

$$+ f(x_1 - x_Q, y_1 - y_Q, z), \quad z = z_p z_Q$$

$$f(x, y, z) = x \ln(r + y) + y \ln(r + x) - z \operatorname{arctg}[xy/(zr)] + z \operatorname{arctg}(x/z) - x,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

соответствующие выражения для производных в (3):

$$\partial f / \partial x = -1 + (1 + x^2 z^{-2})^{-1} + yr^{-1} + x^2 r^{-1} (r + y)^{-1} -$$

$$- yr^{-1} (1 - x^2 r^{-2}) (1 + x^2 y^2 z^{-2} r^{-2})^{-1} + \ln(r + y),$$

$$\partial f / \partial y = xr^{-1} + y^2 r^{-1} (r + x)^{-1} -$$

$$- xr^{-1} (1 - y^2 r^{-2}) (1 + x^2 y^2 z^{-2} r^{-2})^{-1} + \ln(r + x),$$

$$\partial f / \partial z = -\operatorname{arctg}(xyz^{-1}r^{-1}) - xz^{-1} (1 + x^2 z^{-2})^{-1} +$$

$$+ xyzr^{-1} (z^{-2} + r^{-2}) (1 + x^2 y^2 z^{-2} r^{-2})^{-1} +$$

$$+ xzr^{-1} (r + y)^{-1} + yzr^{-1} (r + x)^{-1} + \operatorname{arctg}(xz^{-1}).$$

## 2.2. Учет формы характеристики намагничивания и гистерезиса

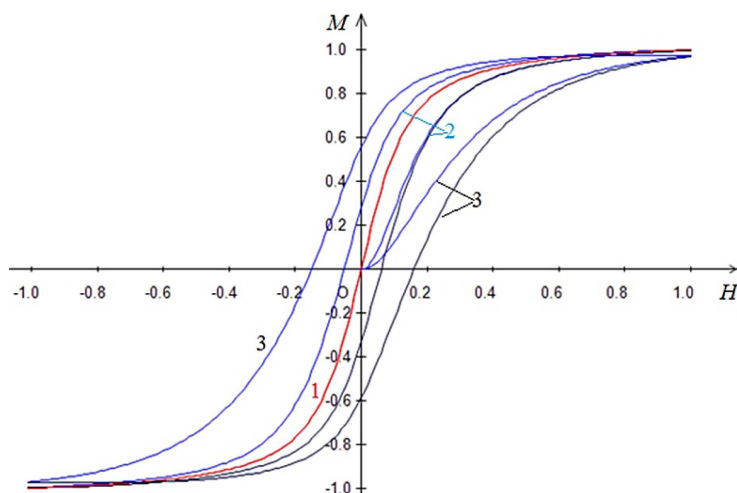
Основная кривая намагничивания вычисляется по формуле Ланжевена  $M_f(H) = M_s (\operatorname{cth}(H/a) - a/H)$ , параметры  $M_s$ ,  $a$  – определяются материалом. В рассматриваемом в расчете интервале значений напряженности согласно модели Джилса – Аттертона вычисляется намагниченность с учетом возможного (в силу изначальной остаточной намагниченности) гистерезиса [3, 4]:

$$\begin{aligned} dM/dH &= (M_f(H) - M)/kd(H_t, M_f(H) - M) + c dM_f/dH, \\ dM_f/dH &= M_s (-\operatorname{sh}^{-2}(H/a) + a/H^2), \end{aligned} \quad (4)$$

$$d(H_t, \Delta) = \begin{cases} -1, & H_t < 0, \Delta \leq 0, \\ 0, & H_t \Delta < 0, \\ 1, & H_t > 0, \Delta \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $H_t$  – частная производная по времени от напряженности поля.

Значения параметров модели Джилса – Аттертона для электротехнической стали марки Э330А равны  $M_s = 1648136, 0$ ;  $a = 55, 2$ ;  $k = 67, 5$ ;  $c = 0, 0186$  [4]. Модель (4), (5) представляет собой задачу Коши для дифференциального уравнения I порядка, решаемую при помощи МКР. График одной из петель гистерезиса и основной кривой намагниченности данной марки стали, соответствующие наибольшей напряженности поля  $H_{\max} = 1000$  А/м, представлен на рис. 1. Основное влияние на ширину петли



**Рис. 1.** Петли гистерезиса и кривая намагничивания при  $k = 67,5$  (сталь Э330А) и при  $k = 200$ ; 1 – основная кривая намагничивания; 2 – петля гистерезиса с начальным участком при  $k = 67,5$ ; 3 – петля с начальным участком при  $k = 200$

оказывает параметр  $k$  в модели (4), (5). Для сравнения на рис. 1 дан аналогичный график более широкой петли гистерезиса при  $k = 200$ .

Применение модели Джилса – Аттертона позволяет, в принципе, осуществлять расчеты полей с учетом гистерезиса в условиях изначального существования в системе сложно распределенного остаточного намагничивания. При отсутствии в этих условиях единственности решения уравнения намагниченности более оправданным может быть применение моделей динамического перемагничивания.

### 2.3. Численный метод расчета магнитного поля

Уравнение намагниченности и его дискретный аналог (1) – (3) решаются методом релаксации. Данный метод равносильен некоторому эволюционному методу решения интегрального уравнения намагниченности (1) – (3), основанному на переходе к эволюционному уравнению вида:

$$\frac{\partial \vec{M}(Q, t)}{\partial t} = \vec{H}_S(Q) + \text{grad}_Q \int_V \vec{M}(P, t) \text{grad}_P \frac{1}{4\pi r_{PQ}} dV_P - \vec{H}(Q, t), \quad t > 0, \quad (6)$$

где намагниченность определяется через напряженность поля в соответствии с (4), (5) и условием их сонаправленности  $\vec{M} = M\vec{H}/H$ . При помощи явного метода Эйлера (6) интегрируется по параметру  $t$  с шагом  $\tau$ , который является также и параметром релаксации.

Основные этапы итерационных вычислений:

1. На первом этапе вычислений задается начальное распределение намагниченности  $\vec{M}^{(0)}(Q)$  и напряженности  $\vec{H}^{(0)}(Q)$  в объеме ферромагнетика, а также значения намагниченности в объеме постоянного магнита (где они остаются неизменными на всех последующих этапах вычислений).

2. На втором этапе согласно (3) вычисляются соответствующие значения магнитной напряженности  $\vec{H}^{(1)}(Q)$  в каждой ячейке разбиения объема ферромагнетика.
3. Пересчитываются значения напряженности согласно методу релаксации:  $\vec{H}_{rel}^{(1)}(Q) = \tau \vec{H}^{(1)}(Q) + (1 - \tau) \vec{H}^{(0)}(Q)$ , где параметр релаксации выбирается в интервале  $0 < \tau < 1$ .
4. Осуществляются вычисления намагниченности в соответствии с моделью гистерезиса Джилса – Аттертона:

А) находится приращение модуля напряженности на шаге

$$\Delta H^{(1)}(Q) = \left| \vec{H}^{(1)}(Q) \right| - \left| \vec{H}^{(0)}(Q) \right|,$$

Б) вычисляется производная модуля намагниченности по модулю напряженности и новое значение модуля намагниченности согласно формуле интегрирования Эйлера:

$$\left| M^{(1)}(Q) \right| = \left| M^{(0)}(Q) \right| + \Delta H^{(1)}(Q) \frac{dM}{dH}(\Delta H^{(1)}(Q), M_f(H^{(0)}(Q)) - M^{(0)}(Q)),$$

В) находятся координаты вектора намагниченности из условия сонаправленности с вектором напряженности:

$$M_x^{(1)}(Q) = \left| M^{(1)}(Q) \right| H_x^{(1)}(Q) / \left| H^{(1)}(Q) \right|,$$

$$M_y^{(1)}(Q) = \left| M^{(1)}(Q) \right| H_y^{(1)}(Q) / \left| H^{(1)}(Q) \right|,$$

$$M_z^{(1)}(Q) = \left| M^{(1)}(Q) \right| H_z^{(1)}(Q) / \left| H^{(1)}(Q) \right|.$$

5. Вычисляются значения магнитной индукции:

$$\vec{B}^{(1)}(Q) = \mu_0 \left( \vec{H}^{(1)}(Q) + \vec{M}^{(1)}(Q) \right).$$

6. Значения магнитных характеристик и параметров, полученные в результате выполнения этапов 1 – 5 принимаются снова в качестве начальных и шаги 2 – 5 повторяются. Критерием останова итераций является близость по норме приближенных значений магнитной индукции на двух шагах итераций:

$$\max_{Q \in V} \left\| \vec{B}^{(k+1)}(Q) - \vec{B}^{(k)}(Q) \right\| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность вычислений,  $k$  – номер итераций.

### 3. Результаты моделирования

В качестве модельной задачи рассмотрен расчет магнитного поля создаваемого прямоугольным постоянным магнитом ( $0 < x < L_x$ ;  $0 < y < L_y$ ;  $L_f < z < L_z$ ), расположенном на ферромагнитном основании в форме параллелепипеда ( $0 < x < L_x$ ;  $0 < y < L_y$ ;  $0 < z < L_f$ ).

Размеры варьировались в следующих пределах:

$$L_x = 0,01 \dots 0,1; L_y = 0,01 \dots 0,1; L_z = 0,01 \dots 0,1; L_f = 0,005 \dots 0,05.$$

Количество разбиений по осям координат:  $n_x, n_y, n_z = 1..12$ ; соответствующее число ячеек разбиения объема  $N_0 = n_x n_y n_z$ ; соответствующее число ячеек разбиения объема выбиралось равным  $8 \dots 125$ . Размеры ячеек  $h_x = L_x/n_x, h_y = L_y/n_y, h_{fz} = L_f/n_{fz}, h_z = (L_z - L_f)/(n_z - n_{fz})$ . Объем постоянного магнита предполагается равномерно намагниченным по оси OZ с максимальной остаточной индукцией  $B_r = 1$  Тл:  $M_x^{(j)} = 0, M_y^{(j)} = 0, M_z^{(j)} = B_r/\mu_0, j = N_f + 1, \dots, N_0$ . Значения намагниченности в ферромагнитном основании априорно неизвестны.

Рассмотрим результаты конкретного расчета при

$$L_x = 0,01; L_y = 0,01; L_z = 0,02; L_f = 0,01; n_x = 4, n_y = 4, n_z = 8, n_{fz} = 4;$$

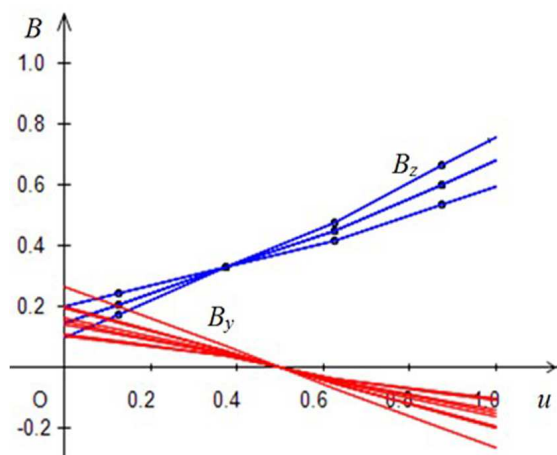
число ячеек разбиения объема магнитного материала  $N_0 = 128$ , число неизвестных значений индукции в объеме ферромагнетика  $N_f = 192$ . Начальное распределение намагниченности в объеме ферромагнетика нулевое. Точность вычислений значений индукции в ячейках, равная  $10^{-4}$ , достигается за 55 итераций при значении параметра релаксации  $\tau = 10^{-4}$ . Вычисленное наибольшее значение  $z$ -компоненты индукции достигается в центре верхней границы ферромагнетика и равняется  $B_{ms} = 0,76$  Тл. Соответствующее наибольшее значение в центре ячеек равно  $B_m = 0,66$  Тл. Расчетное значение нормальной компоненты индукции поля, создаваемого постоянным магнитом на верхней границе ферромагнитного основания равно примерно  $B_{pm} = 0,435$  Тл. Графики распределения компонент индукции в объеме ферромагнетика представлен на рис. 2 и 3 (в относительных масштабах). По горизонтальной оси откладывается всюду на рисунках относительная координата, соответствующая ординате или аппликату в соответствии с направлением компоненты поля, а именно, по принципу  $B_y(y), B_z(z), H_y(y), H_z(z)$ . Цвет линий на рисунках служит только для целей удобства зрительного восприятия. Кривые на графиках имеют характер ломаных линий, так как являются кусочно-линейной интерполяцией по точкам значений численного решения.

При отсутствии гистерезиса значения индукции получаются практически те же. Значимые различия проявляются лишь для напряженности поля (рис. 4 и 5). Причина здесь не в факторе гистерезиса, в относительно высокой относительной магнитной проницаемости электротехнической стали марки Э330А (порядка 10000). Можно отметить, что при вычислениях без учета гистерезиса точность, равная  $10^{-4}$ , достигается за 202 итерации при значении параметра релаксации  $10^{-5}$  (то есть условия сходимости не улучшаются).

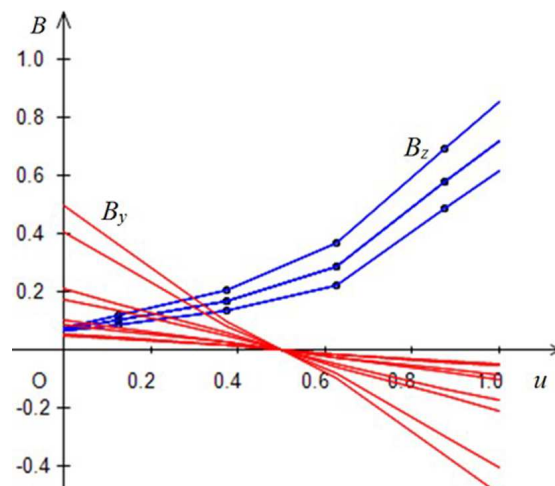
Картина силовых линий магнитного поля в объеме постоянного магнита и ферромагнитного основания дана на рис. 6 (в относительных масштабах). Расчет осуществлялся при тех же, что и для рис. 2 условиях.

На рис. 6 показано центральное сечение расчетной области плоскостью XOZ или  $y = 0$ . Картина силовых линий в сечении плоскостью  $x = 0$  полностью аналогична.

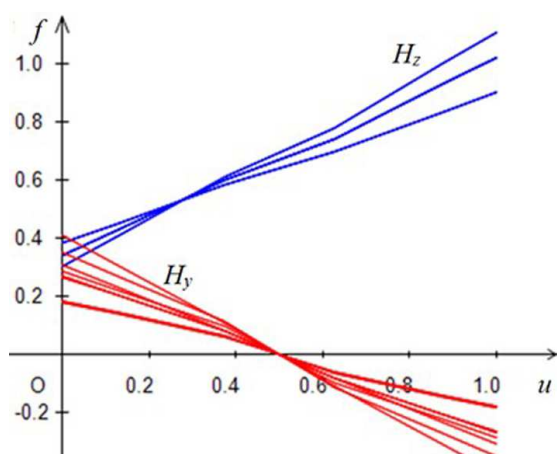




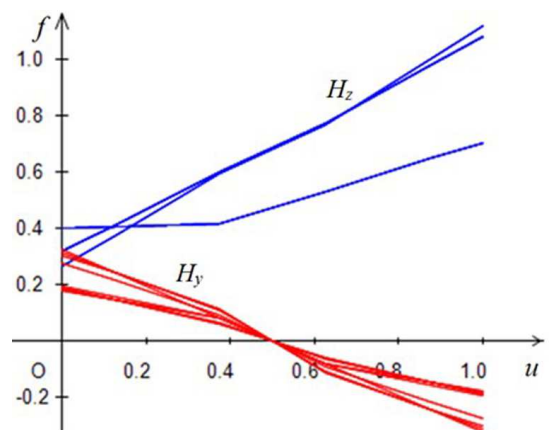
**Рис. 2.** Графики значений индукции для стали Э330А  $B_y(y)$ ,  $B_z(z)$  (масштаб по вертикальной оси:  $f = 1$  соответствует 0,5 Тл,  $M = H$ )



**Рис. 3.** Графики индукции (масштаб по вертикальной оси:  $f = 1$  соответствует 0,5 Тл,  $M = 0,1H$ )



**Рис. 4.** Графики компонент магнитной напряженности  $H_y(y)$ ,  $H_z(z)$  в объеме ферромагнетика с учетом гистерезиса (сталь Э330А,  $H_{\max} = 119,37$  А/м)



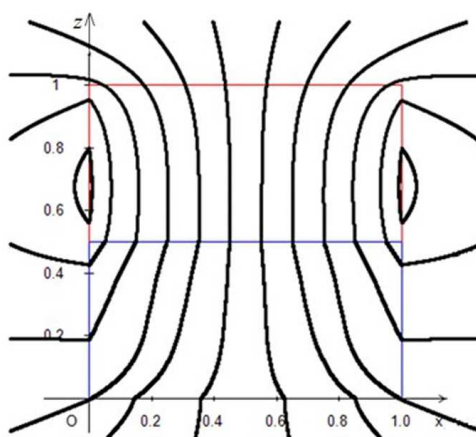
**Рис. 5.** График компонент магнитной напряженности  $H_y(y)$ ,  $H_z(z)$  в объеме ферромагнетика без учета гистерезиса  $H_{\max} = 60,43$  А/м

Красные линии соответствуют границе постоянного магнита, синие линии ограничивают область ферромагнитного (стального) основания. Качественно характер силовых линий вполне согласуется с известными картинками поля систем постоянных магнитов и ферромагнетиков, представленных в литературе, например, в [1]. Изломы линий на границах магнитной области связаны с различиями магнитных проницаемостей постоянного магнита, стального основания и воздуха. Внутри каждой подобласти линии индукции качественно имеют гладкий характер, что свидетельствует о высокой степени точности расчета.

Таблица

Расчетные параметры магнитного поля и релаксации при разных значениях магнитной восприимчивости

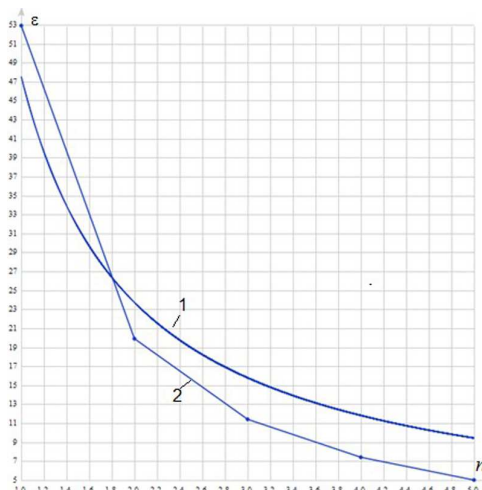
Характеристика материала	$B_m$ , Тл	$B_{ms}$ , Тл	$B_{ms}$ , Тл	$\tau$
$M = 0,1H$	0,35	0,43	0,435	0,1
$M = H$	0,44	0,53	0,435	0,01
сталь Э330А	0,66	0,76	0,435	0,0001



**Рис. 6.** Графики силовых линий компонент магнитного поля в объеме постоянно-го магнита (вверху) и ферромагнетика (внизу) с учетом гистерезиса (сталь Э330А,  $H_{\max} = 119,37$  А/м)

**Контроль погрешности вычислений.** Основным фактором, определяющим количество разбиений расчетной области на ячейки является точность вычисления индукции поля. По вполне понятным причинам, уменьшение размера ячеек ведет к повышению точности расчета. Погрешность расчета индукции контролировалась при помощи специального метода, основанного на применении ранее обоснованного метода решения обратной задачи магнитостатики [1, 11]. Суть данного метода контроля погрешности решения задачи заключается в изменении числа ячеек и сопоставления с данными решения соответствующей обратной задачи методом [1, 11]. На первом этапе решалась прямая задача, описанная выше в данной статье. Далее по значениям индукции на границе постоянного магнита посредством решения обратной задачи методом [1, 11] вычислялась намагниченность в объеме постоянного магнита). Соответствие результатов и, следовательно, оценка погрешности решения, составили порядка 5 – 10%, что является вполне удовлетворительным для рассматриваемого класса задач. Область ферромагнетика разбивалась на ячейки по принципу: по каждой оси декартовой системы координат бралось разбиение из одинакового числа  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  отрезков. После решения прямой и обратной задач магнитостатики на основе их сопоставления оценивалась погрешность расчета индукции. Теоретическая оценка погрешности  $\varepsilon$  при центрировании в ячейках точек коллокации имеет

гиперболический характер  $O(n^{-1})$ , где коэффициент выбирался при помощи МНК. Результаты расчетов и теоретическая оценка представлены на рис. 7.



**Рис. 7.** Графики относительной погрешности (в %) расчета индукции: 1 – теоретическая кривая, 2 – результаты вычислительного эксперимента

*Исследования на тему статьи выполнены при поддержке гранта РФФИ 18-01-00204 «а».*

*Выражаю благодарность профессору Некрасову С.А. за сотрудничество при подготовке рукописи.*

## Литература

1. Денисов, П.А. Решение прямых и обратных задач анализа магнитного поля электротехнических устройств с постоянными магнитами при их локальном размагничивании: автореферат дис. ... канд. техн. наук / П.А. Денисов. – Новочеркасск, 2016.
2. Блох, Ю.И. Теоретические основы комплексной магниторазведки / Ю.И. Блох. – М.: МГГА, 2012.
3. Jiles, D. C. Theory of Ferromagnetic Hysteresis / D.C. Jiles, D.L. Atherton // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 1986. – № 61. – P. 48–60.
4. Денисов, П.А. Описание петли гистерезиса с использованием явных выражений для модели Джилса – Атертона второго уровня / П.А. Денисов // Известия вузов. Электромеханика. – 2018. – №1. – С. 6–12.
5. Черкасова, О.А. Исследование магнитного поля постоянного магнита с помощью компьютерного моделирования / О.А. Черкасова // Гетеромагнитная микроэлектроника. – Саратов: Издательство Саратовского университета. – 2014. – № 17. – С. 112–120.
6. Матюк, В.Ф. Численное моделирование магнитного состояния ферромагнетика в неоднородном постоянном поле методом пространственных интегральных уравнений / В.Ф. Матюк, В.Р. Чурило, А.В. Стрелюхин // Дефектоскопия. – 2003. – №8. – С. 71–84.
7. Игнатъев, В.К. Обратная магнитостатическая задача для ферромагнетиков / В.К. Игнатъев, А.А. Орлов // Наука и образование. – 2014. – №1. – С. 300–324.

8. Печенков, А.Н. Алгоритмы расчетов и моделирования прямых и обратных задач магнитостатической дефектоскопии и устройств технической магнитостатики: автореферат дис. ... доктора техн. наук / А.Н. Печенков. – Екатеринбург, 2007.
9. Dyakin, V.V. On the Solution of the Magnetostatic Field Problem in the Case of Magnetic Permeability That is Dependent on Coordinates / V.V. Dyakin, O.V. Kudryashova, V.Y. Raevskii // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2015. – V. 51, №9. – P. 554–562.
10. Акишин, П.Г. Метод объемных интегральных уравнений в задачах магнитостатики / П.Г. Акишин, А.А. Сапожников // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. – 2014. – №2. – С. 310–315.
11. Арутюнян, Р.В. Идентификация намагниченности постоянных магнитов на основе метода скалярного магнитного потенциала / Р.В. Арутюнян, С.А. Некрасов, П.Б. Середина // Известия вузов. Электромеханика. – 2018. – №6. – С. 19–25.
12. Петухов, И.С. Модель векторного гистерезиса при периодическом электромагнитном поле / И.С. Петухов // Техн. электродинамика. – 2014. – №1. – С. 28–34.
13. Векторный магнитный гистерезис [Электронный ресурс]. – URL: <https://caclub.ru/forum/vektornyy-magnitnyy-gisterezis> (дата обращения: 15.04.2021).
14. Подгорный, Д.Э. Моделирование электромагнитных полей и процессов в трансформаторах тока и их цепях: автореферат дис. ... канд. техн. наук / Д.Э. Подгорный. – Новочеркасск, 1998.

Роберт Владимирович Арутюнян, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики математической физики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (г. Москва, Российская Федерация), rob57@mail.ru.

*Поступила в редакцию 10 октября 2021 г.*

---

MSC 45G05

DOI: 10.14529/mmp220204

**CALCULATION OF THE THREE-DIMENSIONAL MAGNETIC FIELD OF A SYSTEM OF PERMANENT MAGNETS AND FERROMAGNETS BASED ON THE INTEGRAL MAGNETIZATION EQUATION AND THE JILLS–ATTERTON MODEL**

*R. V. Harutyunyan*, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation, rob57@mail.ru

The article considers the calculation of the three-dimensional magnetic field of a system of permanent magnets and ferromagnets based on the integral magnetization equation and the Jills–Atterton model. It is assumed that the magnetic system consists of permanent magnets and structural parts made of ferromagnetic materials with known characteristics. One of the problems is to take into account the influence of the magnetic hysteresis of the frame material on the accuracy of calculating the magnetic field. The cell method and iterative relaxation method are used to solve the integral magnetization equation. The main magnetization curve is calculated using the Langevin formula. As a model problem,

we consider the calculation of the magnetic field created by a rectangular permanent magnet located on a ferromagnetic base in the form of a parallelepiped. The results obtained can also be used in solving direct and inverse problems for a system of ferromagnetic bodies and in test problems for comparison with other methods.

*Keywords:* ferromagnetic; permanent magnet; magnetic field; integral equation; hysteresis; cell method; relaxation method.

## References

1. Denisov P. A. *Solution of Direct and Inverse Problems of Magnetic Field Analysis of Electrical Devices with Permanent Magnets at Their Local Demagnetization*. PhD thesis, Novocherkassk, 2016. (in Russian)
2. Bloch Yu.I. *Teoreticheskie osnovy kompleksnoj magnitorazvedki* [Theoretical Foundations of Complex Magnetic Exploration]. Moscow, MGGA, 2012. (in Russian)
3. Jiles D.C., Atherton D.L. Theory of Ferromagnetic Hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1986, no. 61, pp. 48–60.
4. Denisov P. A. [Description of the Hysteresis Loop Using Explicit Expressions for the Jiles–Atherton Model of the Second Level]. *Izvestiya Vuzov. Elektromekhanika*, 2018, vol. 61, no. 1, pp. 6–12. (in Russian)
5. Cherkasova O.A. [Investigation of the Magnetic Field of a Permanent Magnet Using Computer Modeling]. *Geteromagnitnaya Mikroelektronika*, Saratov, Saratov Publishing House, 2014, no. 17, pp. 112–120. (in Russian)
6. Matyuk V.F., Churilo V.R., Strelyukhin A.B. [Numerical Simulation of the Magnetic State of a Ferromagnet in an Inhomogeneous Constant Field by the Method of Spatial Integral Equations]. *Defektoskopiya*, 2003, no. 8, pp. 71–84. (in Russian)
7. Ignat'ev V.K., Orlov A.A. [Inverse Magneto-Static Problem for a Ferromagnetic]. *Nauka i obrazovanie*, 2014, no. 1, pp. 300–324. (in Russian)
8. Pechenkov A.N. *Algorithms of Calculations and Modeling of Direct and Inverse Problems of Magnetostatic Flaw Detection and Devices of Technical Magnetostatics*. PhD thesis, Novocherkassk, 2007. (in Russian)
9. Dyakin V.V., Kudryashova O.V., Raevskii V.Y. On the Solution of the Magnetostatic Field Problem in the Case of Magnetic Permeability That is Dependent on Coordinates. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2015, vol. 51, no. 9, pp. 554–562.
10. Akishin P.G., Sapozhnikov A.A. The Method of Volumetric Integral Equations in Problems of Magnetostatics. *Vestnik RUDN. Mathematics, Computer Science, Physics*, 2014, no. 2, pp. 310–315. (in Russian)
11. Arutyunyan R.V., Nekrasov S.A., Seredina P.B. Identification of Permanent Magnet Magnetization Based on the Scalar Magnetic Potential Method. *Izvestia Vuzov. Electromechanics*, 2018, vol. 61, no. 6, pp. 19–25. (in Russian)
12. Petukhov I.S. [Model of Vector Hysteresis in a Periodic Electromagnetic Field]. *Tekhnika elektrodinamika*, 2014, no. 1, pp. 28–34. (in Russian)
13. *Vector Magnetic Hysteresis* [Electronic Resource]. Available at: <https://cae-club.ru/forum/vektornyymagnitnyy-gisterezis>
14. Podgorny D.E. *Modeling of Electromagnetic Fields and Processes in Current Transformers and Their Circuits*. PhD thesis, Novocherkassk, 1998. (in Russian)

Received October 10, 2021