УДК 517.9+681.2 DOI: 10.14529/mmp220302

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Е.В. Бычков[1]***, С.А. Загребина***[1]***, А.А. Замышляева***[1]***, А.В. Келлер***[1,2]***, Н.А. Манакова***[1]***, М.А. Сагадеева***[1]***, Г.А. Свиридюк***[1]

[1]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация,

[2]Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация

В работе представлен обзор результатов как аналитического исследования задач оптимального динамического измерения, так и результатов в области разработки алгоритмов численных методов для решения задач теории оптимальных динамических измерений. Основным положением теории оптимальных динамических измерений является моделирование искомого входящего сигнала как решения задачи оптимального управления с минимизацией функционал штрафа, в котором оценивается расхождение выходящих моделируемого и наблюдаемого сигналов. Данная теория появилась как новый подход для восстановления динамически искаженных сигналов. Математическая модель сложного измерительного устройства построена как система леонтьевского типа, начальное состояние которой отражает условие Шоуолтера – Сидорова. Первоначально математическая модель учитывала только инерционность устройства измерения, позже математическая модель стала учитывать возникающие в измерительном устройстве резонансы и деградацию устройства с течением времени. Последние результаты учитывают случайные помехи, и уже здесь сложилось несколько подходов: первый подход основан на производной Нельсона – Гликлиха, второй – на очищении наблюдаемого сигнала по методу Пытьева – Чуличкова, третий – на очищении наблюдаемого сигнала с использованием цифровых фильтров, например, Савицкого – Голея или одномерного фильтра Калмана.

Ключевые слова: математическая модель измерительного устройства; система леонтьевского типа; условия Шоуолтера – Сидорова; производная Нельсона – Гликлиха; Винеровский процесс; оптимальное динамическое измерение; наблюдение; метод Пытьева – Чуличкова.

Посвящается юбилею профессора А.Л. Шестакова

Введение

Теория оптимальных динамических измерений возникла на стыке оптимального управления и теории динамических измерений из сугубо прикладной задачи восстановления динамически искаженного сигнала [31]. Математические методы теории динамических измерений возникли и первоначально развивалась как ответвление теории некорректных задач [9]. Однако развитие техники и космонавтики потребовало создания иных подходов, дающих более точные решения задач динамических измерений, чем теория некорректных задач. Один из таких подходов, базирующихся на теории автоматического управления [4], был предложен в [27].

Для построения математической модели, ставшей основной в теории оптимальных динамических измерений, А.Л. Шестаков и Г.А. Свиридюк предложили использовать методы теории оптимального управления. Пусть $\mathfrak{X} = \{x \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)\}$ – пространство состояний, $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : x^{(p+1)} \in$

$L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)\}$ – пространство измерений, $\mathfrak{Y} = N[\mathfrak{X}]$ – пространство наблюдений. В качестве математической модели измерительного устройства (ИУ) берется модель

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Du(t), \quad y(t) = Nx(t), \tag{1}$$

с начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$[R^L_\mu(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0, \tag{2}$$

где $x = x(t)$ – вектор-функция состояния измерительного устройства, $u = u(t)$ и $y = y(t)$ – вектор-функции входа (измерения) и выхода (наблюдения), L и M – квадратные матрицы порядка n, представляющие собой взаимовлияние скоростей состояния и состояния измерительного устройства, соответственно, D и N – квадратные матрицы порядка n, характеризующие взаимовлияние параметров измерения и связь между состоянием системы и наблюдением, соответственно, $R^L_\mu(M)$ – правая L-резольвента матрицы M. Данная математическая модель ИУ оказалась удобной при измерении кратковременных импульсов, так как хорошо моделирует инерционность ИУ. Адекватность математической модели показана в работе [19]. Математическая основа предложенного подхода базируется на теории оптимального управления решениями систем леонтьевского типа [10, 11]. Поскольку искажение сигнала может быть не только вследствие инерционности ИУ [16, 30], но и вызвано помехами различной природы – резонансом [18], деградацией [35] и шумом [17], одной или несколькими сразу [35], математическая модель была усовершенствована

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t), \quad y(t) = b(t)Nx(t) + Fu(t), \tag{3}$$

с начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$\lim_{t\to 0+}[R^L_\mu(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0, \tag{4}$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ – вектор-функции деградации устройства при длительной эксплуатации, L, M, D, N, F – квадратные матрицы порядка n, описывающие конструкцию измерительного устройства.

Третьим компонентом задачи оптимального динамического измерения является минимизация функционала штрафа

$$J(v) = \min_{u\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{ad}}} J(u). \tag{5}$$

Функционал штрафа $J(u)$ состоит из двух слагаемых: первое слагаемое минимизирует расхождение значений входного сигнала и выходного сигнала модели датчика и их производных; второе – минимизирует воздействие резонанса.

$$J(u) = \beta\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \|y^{(q)}(t) - y_0^{(q)}(t)\|^2 dt + (1-\beta)\sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau < F_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) > dt, \tag{6}$$

где $F_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – самосопряженные положительно определенные матрицы, выполняющие роль фильтров, нивелирующих резонансные возмущения в ИУ, $y_0(t)$ – наблюдение, полученное в ходе натурного эксперимента, $\mathfrak{U}_{\mathfrak{ad}}$ – выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{U}$, называемое множеством допустимых управлений, $\beta \in [0,1]$ – весовой коэффициент. Отметим, что в работах, например [10, 14, 47], задействовано только первое слагаемое.

В работе [35], в отличие от предыдущих исследований задачи оптимального измерения [13, 23, 38, 41], предлагается более простой вид функционала штрафа, что, с одной стороны, позволяет найти решение, а с другой – упрощает численный метод нахождения этого решения.

$$J(u) = \beta \int_0^\tau \|y(t,u(t)) - y_0(t)\|^2 dt + (1-\beta) \int_0^\tau < Cx(t,u(t)), x(t,u(t)) > dt. \tag{7}$$

Здесь квадратная симметрическая матрица C порядка n характеризует влияние резонансов в цепи ИУ.

Для решения задачи оптимального динамического измерения при наличии случайных помех в виде «белого шума» исследования стали вестись по двум направлениям. К первому направлению относятся работы, например [24, 25, 44], использующие результаты теории стохастических уравнений соболевского типа [6, 7], в которых «белый шум» понимается в смысле симметрической производной в среднем или, другими словами, производной Нельсона – Гликлиха [8]. Во втором направлении белый шум понимается в классическом смысле, и оно использует различные численные методы предобработки наблюдаемого сигнала [14, 24, 29, 36, 39]. Таким образом, математической моделью ИУ является задача оптимального измерения, заключающаяся в нахождении v из условия (5). Согласно новой парадигме [40], исследование этой задачи можно представить тремя частями. В первой части создается математическая модель ИУ, ставится задача нахождения оптимального динамического измерения и приводятся условия, при которых существует единственное решение данной задачи. Именно такое решение называется точным оптимальным измерением. Во второй части конструируются алгоритмы построения приближений решения задачи оптимального динамического измерения и формулируются условия, при которых построенная последовательность приближений решения сходится к точному решению. И наконец, в третьей части исследования задачи оптимального динамического измерения на основе алгоритмов второй части создаются программы, проводятся процедуры проверки для отладки этих программ и ставятся вычислительные эксперименты по восстановлению искаженного измерения, полученного в ходе эксперимента.

Статья носит обзорный характер. Первая глава посвящена основным понятиям теорий систем леонтьевского типа и и теории «белого шума». Во второй главе приводятся результаты аналитического исследования некоторых математических моделей ИУ. Третья глава содержит основы разработанных численных методов.

1. Системы леонтьевского типа и «белый шум»

Математической основой теории оптимальных динамических измерений является теория систем леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y, \tag{8}$$

являющихся частным (конечномерным) случаем уравнения соболевского типа. Важным условием является (L,p)-регулярность матрицы M (существует $\mu \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\mu L - M) \neq 0$, $p \in 0 \cup \mathbb{N}$ – порядок полюса в точке ∞ матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$), вектор-функция $y : [0;\tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Системы вида (8) при условии $\det L = 0$ не имеют единого, принятого всеми названия, например, в [1] именуются дескрипторными системами, а в [2] – алгебро-дифференциальными. Здесь же имеется в виду балансовая модель В. Леонтьева с учетом запасов [11].

Особое значение в развитии теории оптимальных динамических измерений имеют результаты по исследованию задач оптимального управления [11, 12, 23, 43, 46].

Впервые для уравнения соболевского типа задача оптимального управления была поставлена Г.А. Свиридюком и А.А. Ефремовым [45], в этой же работе были получены условия существования и единственности ее решения.

Другим мощным толчком развития теории оптимальных динамических измерений послужило введение понятия «белого шума», как производной Нельсона – Гликлиха винеровского процесса [8, 20] для учета влияния белого шума на измерительное устройство [6, 7, 32, 34, 37]. Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство. *Случайной величиной* будем называть измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образуют гильбертово пространство $\mathbf{L}_2$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$. Тот факт, что случайные величины $\xi \in \mathbf{L}_2$ имеют нормальное (гауссово) распределение, будем обозначать $\xi \sim N(0, \sigma^2)$, где $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$.

Отображение $\eta : \mathfrak{I} \subset \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ будем называть (*одномерным*) *стохастическим процессом*. Значение стохастического процесса $\eta = \eta(t, \cdot)$ при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{I}$ является случайной величиной, т.е. $\eta(t, \cdot) \in \mathbf{L}_2$, которую мы будем называть *сечением стохастического процесса*, а значение стохастического процесса $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ называется (*выборочной*) *траекторией*. Непрерывный стохастический процесс, чьи (независимые) сечения гауссовы, называется *гауссовым*.

Важнейшим примером непрерывного гауссова стохастического процесса служит винеровский процесс $\beta = \beta(t)$, моделирующий броуновское движение на прямой в теории Эйнштейна – Смолуховского [5], представленный формулой

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin \frac{\pi}{2}(2k+1)t, \tag{9}$$

где $\xi_k \sim N(0, [\frac{\pi}{2}(2k+1)]^{-2})$ – независимые нормально распределенные величины. Сечения стохастического процесса β являются нормально распределенными случайными величинами с $\mathbf{E}\beta(t)=0$ и $\mathbf{D}\beta(t) = \sigma^2 t$ при некотором $\sigma > 0$. Стохастический процесс β, представленный с помощью (9), назовем *одномерным броуновским движением.*

Сечения стохастического процесса $\overset{\circ}{\beta}$ распределены по нормальному закону с параметрами $(0, \frac{\sigma^2}{4t})$, то есть $\overset{\circ}{\beta}(t) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{4t})$. В силу чего производную Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\beta}$ броуновского движения β из (9) будем называть *одномерным «белым шумом».*

2. Аналитическое построение приближенного оптимального измерения

Пространство $\mathfrak{U}$ представим в виде $\mathfrak{U} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_j$, где $\mathfrak{U}_j = \{u^j \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}) : (u^j)^{(p)} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R})\}$. По построению пространство $\mathfrak{U}_j$ – гильбертово и сепарабельно, $j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $\{\varphi_i\}$ ортонормированную последовательность базисных векторов. Понятно, что эта последовательность может быть выбрана в каждом $\mathfrak{U}_j$ одинаковой. Построим конечномерный линеал $\mathfrak{U}_j^k = \operatorname{span}\{\varphi_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$ и подпространство $\mathfrak{U}^k = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_j^k$. Найдем подмножество $\mathfrak{U}_\partial^k = \mathfrak{U}^k \cap \mathfrak{U}_\partial$. Подмножество $\mathfrak{U}_\partial^k \subset \mathfrak{U}_\partial$ может оказаться пустым, однако в любом случае оно замкнуто и выпукло. Понятно, что все члены последовательности $\{\mathfrak{U}_\partial^k\}$ не могут оказаться пустыми множествами из-за очевидной монотонности этой последовательности и того, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{U}_\partial^k = \mathfrak{U}_\partial.$$

Возьмем вектор $u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k$ и построим вектор-функцию

$$x_k(t) = \int\limits_0^t X(t,s) L_1^{-1} Q u_k(s) ds + \sum_{q=0}^{p} H^q M^{-1}(Q - \mathbb{I}_n) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{D u_k(t)}{a(t)}, \tag{10}$$

$$y_k(t) = b(t) N x_k(t) + F u_k(t). \tag{11}$$

Теперь подставим x_k и y_k в функционал штрафа J и найдем его минимум

$$J(v_k) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J(u_k). \tag{12}$$

Если $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$, то такой вектор v_k существует и единственен в силу теоремы 3. Вектор $v_k \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *первым приближением оптимального динамического измерения.*

Лемма 1. [35] *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ и $\det M \neq 0$. Пусть $0 \in \mathfrak{U}_\partial$, вектор-функция $\widetilde{y} \in \mathfrak{Y}$, функции $a \in C([0,\tau]; \mathbb{R}_+) \cap C^p((0,\tau); \mathbb{R}_+)$ и $b \in C([0,\tau]; \mathbb{R}_+)$, а вектор $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = v$.*

Начнем построение следующего приближения решения. В условиях леммы 1 можем написать

$$P = \lim_{l\to\infty} (l(lL - M)^{-1} L)^l, \qquad Q = \lim_{l\to\infty} (lL(lL - M)^{-1})^l,$$

$$L_1^{-1} = \lim_{l\to\infty} \left(L - \frac{1}{l} M \right)^{-1} Q, \qquad H = M^{-1} L (\mathbb{I}_n - P).$$

Отсюда

$$\begin{gathered} x_{kl}(t) = \int\limits_0^t \left(\left(\left(L - \frac{1}{l} \int_s^t a(r) dr M \right)^{-1} L \right)^l \left(L - \frac{1}{l} M \right)^{-1} (lL(lL- \right. \\ \left. -M)^{-1})^l u_k(s) ds + \sum_{q=0}^{p} H^q M^{-1} ((lL(lL-M)^{-1})^l - \mathbb{I}_n) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{D u_k(t)}{a(t)}, \end{gathered} \tag{13}$$

$$y_{kl}(t) = b(t) N x_{kl}(t) + F u_k(t). \tag{14}$$

Подставив (13) и (14) в функционал штрафа (6), построим функционал $J_l(u_k)$. Минимизируя этот функционал на множестве $\mathfrak{U}_\partial^k$, получим

$$J(v_{kl}) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J_l(u_k).$$

Вектор $v_{kl} \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *вторым приближением оптимального динамического измерения.*

Лемма 2. [35] *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда $\lim\limits_{l\to\infty} v_{kl} = v_k$.*

В заключительной части для построения третьего приближения оптимального динамического измерения опишем способы вычисления первого слагаемого в (13) (интеграла) и второго слагаемого (суммы производных). Для вычисления интеграла воспользуемся схемой Гаусса, поделив отрезок $[0, \tau]$ на m частей. При этом не исключается возможность найти интеграл в явном виде. Во втором слагаемом заменим производные разностными формулами, причем не исключается возможность, что производные посчитаются в явном виде. После чего вместо формул (13) и (14) получаем приближенные значения векторов $x_{klm} = x_{klm}(t)$ и $y_{klm} = y_{klm}(t)$. Подставив их в функционал штрафа и минимизируя его на множестве $\mathfrak{U}_\partial^k$, получим

$$J(v_{klm}) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J_{lm}(u_k). \tag{15}$$

Вектор $v_{klm} \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *третьим приближением оптимального измерения.*

Лемма 3. [35] *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда* $\lim\limits_{m\to\infty} v_{klm} = v_{kl}$.

Наконец, из лемм 1, 2 и 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. [35] *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty} v_{klm} = v.$$

3. Численные методы

Конструктивное доказательство теоремы 1 представляет собой численный метод решения задачи оптимального динамического измерения. Подробно он описан в работе [35] и реализован в программе для ЭВМ, а его применение к реальным задачам представлена в работе [36]. Однако он требует больших вычислительных мощностей и времени [13], даже при реализации параллельного вычисления [18].

3.1. Сплайн-метод и цифровые фильтры

В данном параграфе рассматривается математическая модель оптимального динамического измерения с учетом белого шума. Для простоты систему (1) запишем в виде

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Du(t), \quad y(t) = Nx(t) + \eta, \tag{16}$$

где η – белый шум, сопровождающий выходной сигнал. Для детерминированного случая была доказана

Теорема 2. [31] *Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n, матрица M (L,p)-регулярна, а* $\det M \neq 0$. *Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $v \in \mathfrak{U}_{ad}$ задачи (1), (2), (5) являющееся оптимальным динамическим измерением, такое, что $x(v) \in \mathfrak{X}$ удовлетворяет системе (1) и начальному условию (2) и имеет вид*

$$
\begin{gathered}
x(t)=\lim_{k\to\infty}x_k(t)=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}\left(kl_k^l(M)\right)^{p+1}-\mathbb{I}_nL\right)\times\right.\\
\times M^{-1}\left(\mathbb{I}_n-\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1}\right)(Du)^{(q)}+\left((L-\mathfrak{t}kM)^{-1}L\right)^k x_0+\\
\left.+\int_0^t\left(\left(L-\frac{t-s}{k}M\right)^{-1}L\right)^k\left(L-\frac{t-s}{k}M\right)^{-1}\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1}Du(s)ds\right],
\end{gathered}
\tag{17}
$$

где $\lim\limits_{k\to\infty}\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1}$ – проектор, $L_k^L(M)$ – левая L-резольвента M.

Оптимальное динамическое измерение будем искать в виде

$$
u^l=col\left(\sum_{j=1}^{l}a_{1j}t^j;\sum_{j=1}^{l}a_{2j}t^j;\ldots;\sum_{j=1}^{l}a_{nj}t^j\right)
\tag{18}
$$

и с учетом (17) получим

$$
J_k(v_k^l)=\min J_k(u_l)=\min\sum_{q=0}^{1}\int_0^T\|x_k^{(q)}(u^l,t)-y_0^{(q)}(t)\|^2dt.
\tag{19}
$$

Следовательно, пара $(v_k^l;{}_k^l)=(v_k^l;x_k(v^l))$ обозначает приближенное решение задачи оптимального динамического измерения, если в дополнение к оптимальному динамическому измерению также ищем приближенное состояние системы. Считая, что начальные значения коэффициентов a_{ij} равны нулю, и используя метод покоординатного спуска с памятью, найдем все a_{ij}, которые обеспечивают минимум штрафного функционала. Сходимость приближенного решения к точному следует из следующей теоремы, доказанной в [46].

Теорема 3. [14] *Пусть матрица M (L,p)-регулярна и* $\det M\neq 0$, $p\in 0\cup\mathbb{N}$, *функционал (5) – сильно выпуклая функция на компактном и выпуклом множестве $\mathfrak{U}_{ad}\subset\mathfrak{U}$. Тогда $J_k(v_k^l)\to J(v)$, $v_k^l\to v$ для $k>K$ $l>p$ и существует* $T>0$ *такое, что выполняется следующее неравенство:*

$$
\|v_k^l-v\|^2\leq J_k(v_k^l)-J(v).
$$

Был предложен сплайн-метод [15] для нахождения оптимального динамического измерения, а для сглаживания наблюдения было предложено использовать цифровой фильтр Савицкого – Голея. Итак, опишем алгоритм численного решения задачи оптимального динамического измерения (4), (6) – (8), (14) с комбинированным использованием цифрового фильтра Савицкого – Голея и сплайн-метода.

Предположим, что даны следующие компоненты: матрицы, входящие в систему (5); начальное значение $x_0\in\mathbb{R}^n$; массив наблюдаемых значений Y_{0i} в узловых точках $t_i=0,1,\ldots,n$ выходного сигнала, и $t_{i+1}-t_i=\delta$, $t_0=0$, $t_n=\tau$. Для сглаживания выходного сигнала воспользуемся цифровым фильтром Савицкого – Голея [26], который представляет собой метод фильтрации шума, основанный на методе наименьших квадратов. Идея состоит в том, чтобы построить полином s-й степени, приближающийся к $2\mu+1$ равноудаленным точкам, и использовать значение полинома в $(\mu+1)$-й точке в качестве сглаженного значения.

Шаг 0. Определить параметры μ и s цифрового фильтра Савицкого – Голея и применить фильтр к массиву значений Y_{0i}. В результате получатся сглаженные значения y_{0i}, $i = 0, 1, \dots, n$.

Предполагая, что влияние шума на выходе устраняется сглаживанием по фильтру, переходим к реализации сплайн-метода решения задачи (4) – (8), взяв в качестве массива наблюдений сглаженные значения y_{0i}.

Шаг 1. Разделить отрезок $[0, \tau]$ на H промежутков $[\tau_{h-1}, \tau_h]$, где $h = 1, 2, \dots, H$, $t_0 = \tau_0 = 0$, $t_n = \tau_H = \tau$.

Шаг 2. На каждом промежутке $[\tau_{h-1}, \tau_h]$ построить интерполяционную функцию $y^l_{0h}(t)$ в виде многочлена степени $l \leq (n-1)/M$.

Шаг 3. Для $h = 1, 2, \dots, H$ на $[\tau_{h-1}, \tau_h]$, последовательно решая задачу оптимального динамического измерения (4) – (8) при $u \in \mathfrak{U}_{ad_h}$, где $\mathfrak{U}_{ad_h} \subset \mathfrak{U}_{ad}$ – замкнутое выпуклое подмножество, методом, описанным в [31], найти приближенное значение оптимального измерения. При этом найденные полиномы $v^l_{km}(t)$ степени l удовлетворяют условию непрерывности

$$v^l_{kh}\tau_h = v^l_{k,h+1}(\tau_h). \tag{20}$$

Шаг 4. В результате получаем сплайн-функцию

$$\tilde{v}^l_{kh}(t) = \bigcup_h v^l_{kh}(t),$$

непрерывную на $[0, \tau]$.

В работе [28] для решения задачи оптимального динамического измерения (2), (5), (14) было предложено использовать дискретный одномерный фильтр Калмана для данных наблюдаемого выходного сигнала Y_{0i}. Отметим, что данные о выходном сигнале Y_{0i} получаем дискретно в моменты времени $t_i = 0, 1, \dots, n$ через равные промежутки $t_{i+1} - t_i = \delta$, причем $t_0 = 0$ и $t_n = \tau$. Полагаем, что Y_{0i} и Y_i связаны следующим образом:

$$Y_{0i} = Y_i + \xi_i,$$

где $\xi_i \sim N(0, \sigma^2_\xi)$ – нормально распределенная случайная величина. При использовании фильтра Калмана оптимальная оценка на момент времени t вычисляется в два шага: 1) прогноз по модели процесса; 2) коррекция по данным наблюдений. Обозначим через $\hat{Y}_i$ – прогноз выходного сигнала на момент t_i по оценке в момент времени t_{i+1}. Для первых $N+1$ наблюдений будем считать, что $Y_i = Y_{0i}$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Все последующие рассуждения проведем для $i = N+1, N+2, \dots, n$. Будем считать, что рассматриваем выходной сигнал вне его физической модели, в этом случае прогноз $\hat{Y}_i$ задается уравнением

$$\hat{Y}_i = Y_{i-1}. \tag{21}$$

Для получения наилучшего приближения к искомому значению Y_i находится средневзвешенное между наблюдением Y_{0i} и прогнозом $\hat{Y}_i$ на момент t_i, где весами являются значения K_i и $1 - K_i$, где K_i – коэффициент Калмана:

$$Y_i = K_i Y_{0i} + (1 - K_i)\hat{Y}_i \quad \text{или} \quad Y_i = \hat{Y}_i + K_i(Y_{0i} - \hat{Y}_i).$$

Коэффициент Калмана рассчитывается по формуле:

$$K_i = \frac{\hat{P}_i}{\hat{P}_i + \sigma^2_\xi},$$

где $\hat{P}_i$ – оценка дисперсии ошибки прогноза

$$\hat{P}_i = P_{i-1} + w_i, \quad P_N = \text{const}\,,$$

$$w_i = \frac{1}{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\left((Y_{0,i-m} - Y_{i-m-1}) - \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}(Y_{0,i-m} - Y_{i-m-1})\right)^2.$$

Значение параметра N подбирается опытным путем. Для следующего прогноза оценку дисперсии ошибки прогноза необходимо пересчитать по формуле

$$P_i = (1 - K_i)\hat{P}_i.$$

Полученные результаты фильтрации Y_i позволяют нам перейти к решению задачи (2) – (6) и найти ее решение с использованием одного из известных численных алгоритмов [42], аналогично [7, 8].

3.2. Метод Пытьева – Чуличкова построения полезной части наблюдения при наличии многомерного «белого шума»

В данном пункте изложены результаты адаптации метода Пытьева – Чуличкова к решению задач оптимального динамического измерения [22, 24, 25].

Пусть в результате эксперимента одновременно наблюдаются через равные промежутки в моменты времени $\{t_j : \ j \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I} = \{0, 1, \ldots, N\}$ несколько величин, характеризующих наблюдаемый процесс, т.е. наблюдение в каждый конкретный момент времени – это n-мерный вектор $\{\eta^1(t), \eta^2(t), ..., \eta^n(t)\}$. В результате таких наблюдений получены $\eta^i(t_j)$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{0,N})$. Дополнительно известна априорная информация о полезной части каждой из наблюдаемых величин $\eta^i(t)$, а именно об экстремуме и характере выпуклости полезной части. Однако в силу воздействия случайных помех наблюдаемые величины $\{\eta^i(t_j)\}_{j=0}^N$ $(i = \overline{1,n})$ не обладают этими свойствами. Будем считать, что наблюдаемые величины представимы в виде

$$\eta(t) = \widetilde{y}(t) + \overset{\circ}{W}_n(t),$$

где $\widetilde{y} : [t_0; t_N] \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция полезной части наблюдения, а $\overset{\circ}{W}_n(t)$ – часть, вносящая помехи в измерения, многомерный «белый шум».

Так как модель ИУ (3) линейна, то ясно, что построение значений наблюдения по данным, искаженным многомерным «белым шумом», можно проводить для каждой координате по отдельности. То есть для каждой составляющей наблюдения имеет место представление

$$\eta^i(t) = \widetilde{y}_i(t) + \overset{\circ}{\beta}_i(t), \qquad i = \overline{1,n}.$$

Здесь $\widetilde{y}_i(t)$ – полезная часть, соответствующая i-й координате наблюдения, а $\overset{\circ}{\beta}_i(t)$ – часть, вносящая помехи в соответствующую координату, – «белый шум», сечения которого имеют распределение $N(0, \dfrac{\sigma^2}{4t})$.

Для описания статистического критерия определения положения точки экстремума при дополнительном предположении о единственности точки экстремума и выпуклости вверх полезной части наблюдения вводится класс функций V_k, выпуклых вверх, с единственной точкой максимума t_k на равномерной сетке $\{t_j : \ j \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I} = \{0, 1, \ldots, N\}$.

Зафиксируем координату наблюдения $i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n$. Пусть в точке $k_0 \in \mathcal{I}$ равномерной сетки полезная составляющая часть сигнала $\widetilde{y}_i(t)$ имеет максимум, т.е. $\widetilde{y}_i \in V_{k_0}$. Необходимо оценить параметр k_0 по значениям $\{\eta^i(t_j)\}_{j=0}^N$. То есть с заданной вероятностью γ оценить параметр k_0 по данным наблюдения

$$\eta^i(t) = \widetilde{y}_i(t) + \overset{\circ}{\beta}_i(t), \quad \widetilde{y}_i \in V_{k_0}, \quad \overset{\circ}{\beta}_i(t) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{4t}). \tag{22}$$

На основе результатов [3, 21] для оценки параметра $k_0 \in \mathcal{I}$ для i-й координаты наблюдения будем применять статистику вида

$$\tau_k(i) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{N} (\eta^i(t_j)\sqrt{t_j} - P_k(\eta^i(t_j)\sqrt{t_j}))^2}{\sum\limits_{j=0}^{N} (\overline{\eta^i} - P_k(\eta^i(t_j)\sqrt{t_j}))^2}, \tag{23}$$

где $\overline{\eta^i} = \frac{1}{N+1} \sum\limits_{j=0}^{N} \eta^i(t_j)\sqrt{t_j}$, а $P_k(\eta^i(t)\sqrt{t})$ – проекция $\eta^i(t)\sqrt{t}$ на множество V_k, существование которой показано в [3], а ее построение описано в [24]. Найденная статистика $\tau_k(i)$ используется для нахождения значения параметра k, при котором полезная часть сигнала $\eta^i(t)\sqrt{t}$ наиболее близка по форме с $P_k(\eta^i(t)\sqrt{t})$.

Задачу построения значений одной координаты наблюдений на равномерной сетке $\{t_j\}_{j=0}^N$ будем рассматривать как задачу наилучшего приближения $\widetilde{y}_i(t)\sqrt{t}$ элементами множества V_k, то есть поиска функции $P_k(\eta^i(t)\sqrt{t}) \in V_k$, такой, что $\|P_k(\eta^i(t)\sqrt{t}) - (\eta^i(t)\sqrt{t})\|^2 = \inf\limits_{f_i \in V_k} \|f_i - \eta^i(t)\sqrt{t}\|^2$. Алгоритм построения значений полезной части одной координаты наблюдения $P_k(\eta^i(t)\sqrt{t})$ приведен в работе [24].

Представим алгоритм построения полезной части одной координаты наблюдения, искаженного «белым шумом», при дополнительном предположении о единственности ее точки экстремума и выпуклости вверх. Опишем этапы этого алгоритма. В качестве входных данных вводятся значения: длина отрезка времени τ, частота дискретизации этого отрезка N, значения $\{\eta^i(t_j)\}_{j=0}^N$, искаженные «белым шумом», и вероятность принятия решения о нахождении точки максимума γ.

Пусть $k \in \mathcal{I}$ – номер точки равномерной сетки, в которой полезная часть сигнала $\widetilde{y}_i(t)$ имеет максимум, т.е. $\widetilde{y}_i \in V_k$. Положим $k = 1$.

Шаг 1. Построение $P_k(\eta^i(t)\sqrt{t})$ – проекции $\eta^i(t)\sqrt{t}$ на множество V_k по алгоритму, описанному в работе [24].

Шаг 2. Вычисление статистики (23).

Шаг 3. Вычисление надежности $\alpha(k) = \int\limits_{\tau_k(x) \ge \tau_k(i)} p_{N(0,\sigma)}(x)dx$. Так как значение α не зависит от $\sigma > 0$, то ее значение можно найти методом Монте-Карло, разыгрывая реализации $N + 1$ нормально распределенных случайных величин $x_k \sim N(0, 1)$ и подсчета частоты реализаций, для которых $\tau_k(x) \ge \tau_k(i)$.

Шаг 4. Увеличение k на 1. Если $k > N$, то перейти к шагу 5, иначе – к шагу 1.

Шаг 5. Определение k, для которых $\alpha(k) \ge \gamma$. В качестве искомого k_0 берется среднее значение среди этих k.

Шаг 6. Применение этого алгоритма к координате наблюдения $\eta^i(t)\sqrt{t}$ будет давать значения $\widetilde{y}_i(t_j)\sqrt{t_j}$, и точка максимума $\widetilde{y}_i(t)\sqrt{t}$ с вероятностью γ находится в точке k_0. Значение полезной части наблюдения будет иметь вид $\widetilde{y}_i(t_j)$. Если равномерная сетка $\{t_j\}_{j=0}^N$ содержит точку $t = 0$, то это значение вместе с точками некоторой окрестности этой точки убираем из массива значений. Количество таких точек зависит от интервалов сетки N и длины временного промежутка τ, на котором решается задача (3) – (5).

Применяя описанную процедуру к каждой из координат, получим значения вектор-функции наблюдения $\widetilde{y}(t)$, на основе которой производится поиск решения задачи оптимального динамического измерения (3) – (5).

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).

Литература / References

1. Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P. *Control of Discrete-Time Descriptor Systems.* Cham, Springer, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-78479-3
2. Boyarintsev Yu.E., Chistyakov V.F. *Algebro-differencial'nye sistemy: metody resheniya i issledovaniya* [Differential-Algebraic Systems: Methods of Solution and Research]. Novosibirsk, Nauka, 1998. (in Russian)
3. Demin D.S., Chulichkov A.I. Filtering of Monotonic Convex Noise-Distorted Signals and Estimates of Positions of Special Points. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 2009, vol. 15, no. 6, pp. 15–31. (in Russian)
4. DeRusso P.M., Roy R.J., Close C.M. *State Variables for Engineers.* New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley & Sons, 1997.
5. Einstein A., Smoluchowski M. *Brounovskoe dvizhenie [Brownian Motion].* Moscow, Fizmatlit, 1936. (in Russian)
6. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of «Noises». *Abstract and Applied Analysis*, 2016, vol. 13, pp. 1–8. DOI: 10.1155/2015/697410
7. Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of «Noises». *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, vol. 13, no. 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x
8. Gliklikh Yu.E., Makarova A.V. On Existence of Solutions to Stochastic Differential Inclusions with Current Velocities II. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 48–60. DOI: 10.14529/jcem160106
9. Granovskii V.A. *Dinamicheskie izmereniya. Osnovy metrologicheskogo obespecheniya* [Dynamic Measurements. Fundamentals of Metrology Provision]. Leningrad, Energoatomizdat, 1984. (in Russian)
10. Keller A.V. [Leontief Type Systems: Classes of Problems with Showalter–Sidorov Initial Condition and Numerical Solutions]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 30–43. (in Russian)
11. Keller A.V. Leontief-type Systems and Applied Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 1. pp. 23–42. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp220102
12. Keller A.V. Numerical Solution of the Optimal Control Problem for Degenerate Linear System of Equations with Showalter–Sidorov Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27 (127), issue 2, pp. 50–56.
13. Keller A.V. On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 39–59. DOI: 10.14529/jcem150205
14. Keller A.V. Optimal Dynamic Measurement Method Using the Savitsky–Golay Digital Filter. *Differential Equations and Control Processes*, 2021, no. 1, pp. 1–15.
15. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Convergence of the Spline Method for Solving the Optimal Dynamic Measurement Problem. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, article ID: 012074. DOI: 10.1088/1742-6596/1864/1/012074

16. Keller A.V., Sagadeeva M.A. The Optimal Measurement Problem for the Measurement Transducer Model with a Deterministic Multiplicative Effect and Inertia. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software,* 2014, vol. 7, no. 1, pp. 134–138. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp140111

17. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 183–195. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_11

18. Khudyakov Y.V. Parallelization of Algorithms for the Solution of Optimal Measurements in View of Resonances. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 122–127. (in Russian)

19. Khudyakov Yu.V. On Adequacy of the Mathematical Model of the Optimal Dynamic Measurement. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2017, vol. 4, no. 2, pp. 14–25. DOI: 10.14529/jcem170202

20. Nelson E. *Dynamical Theory of Brownian Motion.* Princeton, Princeton University Press, 1967.

21. Pyt'ev Yu.P., Chulichkov A.I. *Metody morfologicheskogo analiza izobrazheniy* [Methods of Morphological Analysis of Pictures]. Moscow, FizMatLit, 2010. (in Russian)

22. Sagadeeva M.A. Construction an Observation in the Shestakov–Sviridyuk Model in Terms of Multidimensional ≪White Noises≫ Distortion. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 41–50. (in Russian) DOI: 10.14529/mmph200405

23. Sagadeeva M.A. Mathematical Bases of Optimal Measurements Theory in Nonstationary Case. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, vol. 3, no. 3, pp. 19–32. DOI: 10.14529/jcem160303

24. Sagadeeva M.A. Reconstruction of Observation from Distorted Data for the Optimal Dynamic Measurement Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 82–96. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp190207

25. Sagadeeva M.A., Bychkov E.V., Tsyplenkova O.N. The Pyt'ev–Chulichkov Method for Constructing a Measurement in the Shestakov-Sviridyuk Model. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, vol. 13, no. 4, pp. 81–93. DOI: 10.14529/mmp200407

26. Savitzky A., Golay M.J.E. Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures. *Analytical Chemistry*, 1964, vol. 36, no. 8, pp. 1627–1639. DOI: 10.1021/ac60214a047

27. Shestakov A.L. [Dynamic Precision of the Measuring Transducer with a Corrector in the Form of Sensor Model]. *Metrologiya* [Metrology], 1987, no. 2, pp. 26–34. (in Russian)

28. Shestakov A.L., Keller A.V. One-Dimensional Kalman Filter in Algorithms for Numerical Solution of the Problem of Optimal Dynamic Measurement. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 120–125. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp210411

29. Shestakov A.L., Keller A.V. Optimal Dynamic Measurement Method Using Digital Moving Average Filter. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1864, article ID: 012073. DOI: 10.1088/1742-6596/1864/1/012073

30. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control,* 2012, vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079

31. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measurement Dynamically Perturbed Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling and Programming*, 2010, no. 16 (192), pp. 116–120. (in Russian)

32. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the Measurement of the ≪White Noise≫. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 27 (286), issue 13, pp. 99–108. (in Russian)
33. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Optimal Measurements. *XXI IMEKO World Congress ≪Measurement in Research and Industry≫*, 2015, pp. 2072–2076.
34. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyukov Y.V. Dinamic Measurement in Spaces of ≪Noise≫. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies. Automatic Control. Radioelectronics*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 4–11. (in Russian)
35. Shestakov A.L., Zagrebina S.A., Manakova N.A., Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. Numerical Optimal Measurement Algorithm under Distortions Caused by Inertia, Resonances, and Sensor Degradation. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 1, pp. 41–50. DOI: 10.1134/S0005117921010021
36. Shestakov A.L., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal Based on the Theory of Optimal Dynamic Measurements. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 12, pp. 2143—2154. DOI: 10.1134/S0005117921120067
37. Shestakov A.L., Sagadeeva M.A., Manakova N.A., Keller A.V., Zagrebina S.A., Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A. Optimal Dynamic Measurements in Presence of the Random Interference. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1065, no. 21, article ID: 212012. DOI: 10.1088/1742-6596/1065/21/212012
38. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, no. 17 (234), pp. 70–75.
39. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Tsyplenkova O.N., Gavrilova O.V., Perevozchikova K.V. Restoration of Dynamically Distorted Signal Using the Theory of Optimal Dynamic Measurements and Digital Filtering. *Measurement: Sensors*, 2021, vol. 18, article ID: 100178. DOI: 10.1016/j.measen.2021.100178
40. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2020, vol. 7, no. 1, pp. 3–23. DOI: 10.14529/jcem200101
41. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. The Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 3–15.
42. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Khudyakov Y.V. Numerical Investigation of Optimal Dynamic Measurements. *Acta IMEKO*, 2018, vol. 7, no. 2, pp. 65–72. DOI: 10.21014/acta_imeko.v7i2.529
43. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. Dynamical Measurements in the View of the Group Operators Theory. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 273–286. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_17
44. Shestakov A.L., Zagrebina S.A., Sagadeeva M.A., Bychkov E.V., Solovyova N.N., Goncharov N.S., Sviridyuk G.A. A New Method for Studying the Problem of Optimal Dynamic Measurement in the Presence of Observation Interference. *Measurement: Sensors*, 2021, vol. 18, article ID: 100266. DOI: 10.1016/j.measen.2021.100266
45. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control for a Class of Degenerate Linear Equations. *Doklady Akademii nauk*, 1999, vol. 364, no. 3, pp. 323–325.
46. Sviridyuk G.A., Keller A.V. On the the Numerical Solution Convergence of Optimal Control Problems for Leontief Type System. *Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2011, no. 2 (23), pp. 24–33. (in Russian)
47. Zamyshlyaeva A.A., Keller A.V., Syropiatov M.B. Stochastic Model of Optimal Dynamic Measurements. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 147–153. DOI: 10.14529/mmp180212

Евгений Викторович Бычков, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), bychkovev@susu.ru.

Софья Александровна Загребина, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математическое и компьютерное моделирование», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zagrebinasa@susu.ru.

Алена Александровна Замышляева, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и программирование», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zamyshliaevaaa@susu.ru.

Алевтина Викторовна Келлер, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация); научно-исследовательская лаборатория «Неклассические уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alevtinak@inbox.ru.

Наталья Александровна Манакова, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), manakovana@susu.ru.

Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математическое и компьютерное моделирование», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sagadeevama@susu.ru.

Георгий Анатольевич Свиридюк, доктор физико-математических наук, профессор, научно-исследовательская лаборатория «Неклассические уравнения математической физики»; кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), svirdiukga@susu.ru.

Поступила в редакцию 28 марта 2022 г.

MSC 49J15, 93E10 **DOI: 10.14529/mmp220302**

DEVELOPMENT OF THE THEORY OF OPTIMAL DYNAMIC MEASUREMENTS

E.V. Bychkov[1]***, S.A. Zagrebina***[1]***, A.A. Zamyshlyaeva***[1]***, A.V. Keller***[1,2]***, N.A. Manakova***[1]***, M.A. Sagadeeva***[1]***, G.A. Sviridyuk***[1]

[1]South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,
[2]Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: bychkovev@susu.ru, zagrebinasa@susu.ru, zamyshliaevaaa@susu.ru, alevtinak@inbox.ru, manakovana@susu.ru, sagadeevama@susu.ru, svirdiukga@susu.ru

The paper presents an overview of the results of both an analytical study of optimal dynamic measurement problems and results in the development of algorithms for numerical methods for solving problems of the theory of optimal dynamic measurements. The main position of the theory of optimal dynamic measurements is the modelling of the desired input signal as a solution to the optimal control problem with minimization of the penalty functional, in which the discrepancy between the output simulated and observed signals is estimated. This theory emerged as a new approach for restoring dynamically distorted signals. The mathematical model of a complex measuring device is constructed as a Leontief-type system, the initial state of which reflects the Showalter–Sidorov condition. Initially, the mathematical model took into account only the inertia of the measuring device, later the mathematical model began to take into account the resonances that arise in the measuring device and the degradation of the device over time. The latest results take into account random noise and several approaches were developed here: the first approach is based on the Nelson–Gliklikh derivative, the second one is based on the purification of the observed signal using the Pytiev–Chulichkov method, the third one uses the purification of the observed signal by digital filters, for example, Savitsky–Golay or one-dimensional Kalman filter.

Keywords: mathematical model of the measuring transducer; Leontief type system; Showalter–Sidorov conditions; Nelson–Gliklikh derivative; Wiener process; optimal dynamic measurement; observation; Pytiev–Chulichkov method.

Received March 28, 2022