

УПРАВЛЕНИЕ В БИНАРНЫХ МОДЕЛЯХ С РАЗЛАДКОЙ

*Г.И. Белявский¹, Н.В. Данилова¹*¹Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

В статье рассматривается задача динамического управления портфелем для бинарной модели с разладкой. Рассматривается апостериорный подход, то есть в процессе решения задачи производится обнаружение разладки с последующей кластеризацией вершин дерева. На основе этой кластеризации выстраивается алгоритм вычисления оптимального динамического портфеля, применимый для бинарных моделей с разладкой. Используются как симметричный, так и несимметричный штрафы за недостижение поставленной цели управления. Далее анализируется возможность использования бинарной модели в качестве средства приближения непрерывной модели Блэка – Шоулса с разладкой, причем исследуется возможность редукции NP -полной задачи к P -полной задаче с потерей информации.

Ключевые слова: разладка; риск; момент остановки; мартингал.

Введение

Процессы со сменой режимов находятся в сфере постоянных интересов исследователей. Специальный класс этих процессов называют процессами с разладкой. В этой связи, следует отметить работы Ширяева и его учеников [1–5], в которых изучается задача быстрого обнаружения разладки. В [6] процессы с разладкой применялись как средство аппроксимации решения стохастического дифференциального уравнения. В [6] разладки совпадали с моментами достижений случайными процессами определенных уровней, то есть являлись моментами остановки.

Число работ, посвященных обнаружению разладки, с каждым годом растет. Поиск по базе данных arXiv.org показывает больше ста работ за 2021 год, так или иначе связанных с проблемой обнаружения разладки в случайном процессе. Несомненно, существует потребность в алгоритмах решения задач оптимального управления для процессов с разладкой. Работ, связанных с оптимальным управлением процессами с разладкой, по-видимому, значительно меньше. В этой же базе данных не удалось обнаружить ни одной.

В работе [7] рассматривались задачи управления в моделях со сменой режимов в случайные моменты времени, которые были моментами остановки.

В статье рассматривается бинарная аппроксимация модели Блэка – Шоулса с разладкой, поскольку, на наш взгляд, бинарная модель с разладкой – единственная модель, которая предоставляет возможность получения вычислительного результата при вычислении оптимального управления для этой модели.

В большом количестве работ изучают бинарную аппроксимацию диффузионных процессов. В основном эти работы посвящены сходимости биномиальной цены финансового обязательства к цене Блэка – Шоулса. Первое доказательство сходимости биномиальной цены опциона к цене Блэка–Шоулса было дано в работе Кокса, Росса и Рубинштейна [8]. Более общее доказательство сходимости было приведено в работе Hsia [9]. Первая оценка разницы между биномиальной ценой и ценой Блэка – Шоулса

была дана в работе Nестon and Zhou [10]. Эта оценка была порядка $1/\sqrt{n}$. Для финансовых обязательств опционов европейского типа эта оценка имеет порядок $1/n$. Эту оценку можно найти в работах [11–13]. Заметим лишь, что для специальных случаев были получены оценки более высоких порядков, см., например, работы [14, 15].

Для получения бинарной аппроксимации диффузии мы используем результаты работы [16]. Остановимся на этой работе. В работе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение: $dY_t = \mu(Y_t, t) dt + \sigma(Y_t, t) dW_t$, с начальным значением Y_0 . В уравнении W_t – стандартный винеровский процесс. Предлагаемая бинарная аппроксимация \bar{Y} является процессом с кусочно-постоянными траекториями, скачки траекторий происходят в фиксированные моменты времени, которые находятся на расстоянии h друг от друга. Размер скачков вверх или скачков вниз, а также вероятности вверх или вниз определяются тремя функциями: $U(y, t, h) = \sqrt{h} \sigma(y, t)$, $D(y, t, h) = -\sqrt{h} \sigma(y, t)$ и $q(y, t, h)$. Таким образом, $Y_t^h = Y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta Y_{ih}^h I_{\{ih \leq t\}}$. Условная вероятность $P(\Delta Y_{ih}^h = C/Y_{(i-1)h}^h) = q(Y_{(i-1)h}^h, (i-1)h, h) I_{\{C=U(Y_{(i-1)h}^h, (i-1)h, h)\}} + (1 - q(Y_{(i-1)h}^h, (i-1)h, h)) I_{\{C=D(Y_{(i-1)h}^h, (i-1)h, h)\}}$. Вероятность q выбирается из условия: $E(\Delta \bar{Y}_{ih} / \bar{Y}_{(i-1)h}) = \mu(\bar{Y}_{(i-1)h}, (i-1)h)h$. Отсюда $q(y, t, h) = \frac{1}{2} + \frac{\mu(y, t)\sqrt{y}}{2\sigma(y, t)}$, с естественным ограничением на параметры в виде неравенства: $|\mu(y, t)|\sqrt{h} < \sigma(y, t)$.

В работе [16] гарантируется слабая сходимость кусочно-постоянных случайных траекторий к решению стохастического дифференциального уравнения при выполнении следующих условий:

1) уравнение имеет единственное сильное решение $Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu(Y_s, s) ds + \int_0^t \sigma(Y_s, s) dW_s$;

2) функции $\mu(y, t)$, $\sigma(y, t)$ – непрерывные функции, функция $\sigma(y, t)$ – неотрицательная ограниченная функция.

Из слабой сходимости кусочно-постоянных траекторий следует сходимость средних от функционалов на кусочно-постоянных траекториях, и скорость сходимости, как отмечалось выше, имеет порядок $1/n$.

В качестве примера управления случайным процессом с разладкой в работе рассматривается динамическая задача управления портфелем. Динамическая задача управления портфелем инвестиций относится к задачам оптимального управления случайными процессами.

Несмотря на очевидную значимость динамической задачи, основные результаты получены для одношаговой модели. Для одношаговой модели задача впервые рассмотрена Марковицем [17]. С момента ее публикации на эту работу насчитывается более 25 000 ссылок, однако, качественно отличающиеся от диверсификации по Марковицу результаты были получены в конце 90-х. В связи с этим отметим работу Рокфеллера и Урясева [18]. В нашей работе использованы критерий из работы Марковица и критерий из работы Рокафеллера и Урясева, а также несимметричный критерий качества портфеля, заимствованный из машинного обучения [19].

Работы по динамическому управлению портфелем в основном связаны с машинным обучением, применяемом для построения стационарного портфеля. Поскольку машинное обучение не связано с темой данной работы, приведем лишь одну из монографий, посвященных машинному обучению в связи с оптимальными инвестициями [20]. Данная монография наиболее полно излагает методы машинного обучения, которые используются для вычисления оптимального портфеля.

Структура работы такова. Второй раздел посвящен разладке в бинарной последовательности. Основным результатом заключается в сопоставлении разладки с кластеризацией вершин дерева на два класса. К первому классу относятся вершины, в которых происходит разладка. Сначала вершины бинарного дерева разделяются на два класса моментом остановки, оценивающим разладку, затем излагается нечеткая кластеризация. Для четкой кластеризации, бинарная последовательность рассматривается как случайное блуждание по вершинам дерева, и оценкой разладки является минимальный момент времени, в который случайное блуждание оказывается в вершине первого класса при четкой кластеризации. При нечеткой кластеризации используется схема Монте-Карло.

В третьем разделе рассматривается популярная в финансовой математике модель Кокса – Росса – Рубинштейна с добавлением разладки. В этом же разделе решается одна из задач оптимального управления, которая относится к динамическому управлению портфелем инвестиций.

Четвертый раздел посвящен вычислительным примерам, в задачу которых входит в основном иллюстрация предложенных методов.

1. Оценка разладки

Стохастическая модель разладки. Рассмотрим бинарный случайный процесс X_t со значениями $X_t \in \{0, 1\}$ и дискретным временем $t \in \{1, \dots, n, \dots\}$ на естественном стохастическом базисе $\langle \Omega, (F_n)_{n \geq 1}, F, P \rangle$. В базисе пространство элементарных случайных событий Ω – множество бинарных последовательностей $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots)$, элементы фильтрации σ -подалгебры $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, σ -алгебра $F = \cup_{n \geq 1} F_n$, P – вероятность. Рассмотрим случайную величину $\theta \in \{1, \dots, n, \dots\}$, которую будем называть разладкой. Для любой последовательности ω определена условная элементарная вероятность $p(\omega/\theta = n)$, и определено распределение вероятностей для случайной величины $\theta - p(n)$. Элементарная вероятность вычисляется по формуле полной вероятности $p(\omega) = \sum_{n \geq 1} p(\omega/\theta = n) p(n)$.

Будем считать, что определены два типа элементарных вероятностей $p_0(\omega)$ и $p_\infty(\omega)$. В этих элементарных вероятностях содержатся два крайних случая: разладка наступила с самого начала и разладка не наступила.

Для условной вероятности будем использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned} p(\omega/\theta = n) &= p_\infty(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) p_0(\omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_m, \dots), \\ p(\omega/\theta = 1) &= p_0(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \dots). \end{aligned} \quad (1)$$

То есть последовательность ω составляется из двух независимых подпоследовательностей. Кроме этого, $p_\infty(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} p_\infty(\omega_i)$, $p_0(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \prod_{i \geq n} p_0(\omega_i)$. Для каждого фактора в этих формулах справедливо выражение:

$$p_0(\omega_i) = q_0^{\omega_i} (1 - q_0)^{1 - \omega_i}, \quad p_\infty(\omega_i) = q_\infty^{\omega_i} (1 - q_\infty)^{1 - \omega_i}. \quad (2)$$

Информационное дерево и моменты остановки. В связи с бинарной последовательностью рассмотрим бинарное дерево с набором вершин $[(A_i^j)_{j=0}^{2^i-1}]_{i=0}^N$ в котором $A_i^j \rightarrow \{A_{i+1}^{2j}, A_{i+1}^{2j+1}\}$. Нетрудно установить изоморфизм между отрезками бинарной последовательности ω и вершинами дерева A_i^j . Этот изоморфизм задается стандартным образом: отрезок бинарной последовательности ω изоморфен вершине A_i^j тогда и только тогда, когда $j = \sum_{k=1}^i 2^{i-k} \omega_k$.

Рассмотрим произвольный момент остановки τ . Момент остановки разделяет вершины дерева на два класса в соответствии с правилом: вершина A_i^j относится к первому классу (H_1) вершин, если $\tau(A_i^j) = i$; если A_i^j относится к первому классу, то вершины A_{i+1}^{2j} и A_{i+1}^{2j+1} также относятся к первому классу, естественно $\tau(A_{i+1}^{2j}) = \tau(A_{i+1}^{2j+1}) = i$. Остальные вершины дерева относятся ко второму классу (H_2). Теперь последовательность ω можно рассматривать как случайное блуждание по бинарному дереву, если блуждание в некоторый момент времени оказывается в вершине первого класса, то оставшаяся часть блуждания будет происходить по вершинам этого класса.

Задача оценки разладки. Задача обнаружения разладки заключается в вычислении момента остановки τ_* , расположенного как можно ближе к случайной величине θ . В упомянутых ранее работах задача обнаружения разладки рассматривается как задача оптимальной остановки марковского процесса [14]. Линейный критерий в задаче об оптимальной остановке имеет вид: $P(\theta > \tau) + \alpha E(\tau - \theta)^+$. Первое слагаемое – вероятность «ложной тревоги», второе – среднее запаздывание. Стандартным образом показывается [8], что задача об оптимальной остановке для дискретного времени и конечным горизонтом с приведенным критерием сводится к следующей задаче оптимальной остановки:

$$V = \min_{0 \leq \tau \leq T} E[1 - \varphi_\tau + \alpha \sum_{i=1}^{\tau-1} \varphi_i]. \quad (3)$$

В (3) $\varphi_n = P(\theta \leq n/F_n)$ – последовательность апостериорных вероятностей. По формуле Байеса:

$$\varphi_n = \frac{\sum_{j=1}^n p(X_1, X_2, \dots, X_n / \theta = j) P(\theta = j)}{p(X_1, \dots, X_n)}.$$

Одновременно с этой последовательностью рассмотрим последовательность отношений правдоподобия:

$$\psi_n = \frac{\varphi_n}{1 - \varphi_n} = \frac{\sum_{j=0}^n p(X_1, \dots, X_n / \theta = j) P(\theta = j)}{p_\infty(X_1, \dots, X_n) P(\theta > n)}.$$

Задача (3) выражается в терминах этой последовательности следующим образом:

$$V = \min_{1 \leq \tau \leq T} E \left[\frac{1}{1 + \psi_\tau} + \alpha \sum_{i=1}^{\tau-1} \frac{\psi_i}{\psi_i + 1} \right]. \quad (4)$$

Последовательность отношений правдоподобия является достаточной статистикой для оценки разладки и может быть использована непосредственно для оценки разладки, например, следующим образом:

$$\tau = \inf\{n: \psi_n \geq a\}.$$

Порог a может быть выбран, исходя из разных соображений. Например, исходя из ограничения: $E\left(\frac{\tau}{\theta} = \infty\right) \geq T$, где T – параметр, принимающий большое значение. Смысл ограничения заключается в следующем. Среднее время неправильного обнаружения разладки (ложной тревоги) должно быть большим.

С помощью последовательности отношений правдоподобия можно реализовать нечеткую кластеризацию вершин дерева. Будем считать, что принадлежность вершины A_n^i к первому классу является случайным событием, вероятность которого

$$P(A_n^i \in H_1) = \frac{\psi_n(A_n^i)}{1 + \psi_n(A_n^i)}.$$

При нечеткой кластеризации может быть использована схема Монте-Карло. В этой схеме одновременно с вычислением отношений правдоподобия генерируется последовательность независимых равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$ случайных величин ν_n , и оценка разладки вычисляется следующим образом:

$$\tau = \inf \left\{ n : \nu_n \leq \frac{\psi_n}{1 + \psi_n} \right\}.$$

Последовательность отношений правдоподобия. Для кластеризации вершин дерева необходимо вычислить значение последовательности отношений правдоподобия ψ_n в каждой вершине дерева. При независимости и одинаковой распределенности нужные вероятности имеют следующий вид:

$$p_\infty(X_1, \dots, X_{k-1}) = (1 - q_\infty)^{k-1} \left(\frac{q_\infty}{1 - q_\infty} \right)^{\sum_{i=1}^{k-1} X_i},$$

$$p_0(X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) = (1 - q_0)^{n-k-1} \left(\frac{q_0}{1 - q_0} \right)^{\sum_{i=k}^n X_i}.$$

Отсюда

$$\psi_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{P(\theta > n)} \sum_{k=1}^n L^{n-k+1} R^{\sum_{i=k}^n X_i} P(\theta = k), \quad (5)$$

$L = \frac{1-q_0}{1-q_\infty}$, $R = \frac{q_0(1-q_\infty)}{q_\infty(1-q_0)}$. Для вывода рекуррентного уравнения рассмотрим

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \frac{P(\theta > n)}{P(\theta > n+1)} \left[\frac{LR^{X_{n+1}}}{P(\theta > n)} \sum_{k=1}^{n+1} L^{n-k+1} R^{\sum_{i=k}^n X_i} P(\theta = k) \right] = \\ &= \frac{P(\theta > n)}{p(\theta > n+1)} \left[LR^{X_{n+1}} \left(\psi_n(X_1, \dots, X_n) + \frac{P(\theta = n+1)}{P(\theta > n)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Данное рекуррентное уравнение можно связать с вершинами дерева:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(A_{n+1}^{2i+1}) &= \frac{P(\theta > n)}{p(\theta > n+1)} \left[LR \left(\psi_n(A_n^i) + \frac{P(\theta = n+1)}{P(\theta > n)} \right) \right], \quad (6) \\ \psi_{n+1}(A_{n+1}^{2i}) &= \frac{P(\theta > n)}{p(\theta > n+1)} \left[L \left(\psi_n(A_n^i) + \frac{P(\theta = n+1)}{P(\theta > n)} \right) \right], \\ \psi_1(A_1^1) &= LR \frac{P(\theta = 1)}{P(\theta > 1)}, \quad \psi_1(A_1^0) = L \frac{P(\theta = 1)}{P(\theta > 1)}. \end{aligned}$$

Уравнение (6) позволяет вычислить отношение правдоподобия для всех вершин дерева.

Рассмотрим пример с геометрическим законом распределения разладки $P(\theta = j) = (1 - \lambda)\lambda^{j-1}$, $j = 1, \dots$. Необходимые для расчетов отношения: $\frac{P(\theta > n)}{p(\theta > n+1)} = \frac{1}{\lambda}$, $\frac{P(\theta = n+1)}{P(\theta > n)} = 1 - \lambda$, являются постоянными, что позволяет записать равенство (5) следующим образом:

$$\psi_n(X_1, \dots, X_n) = (1 - \lambda) \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda}{L} \right)^k R^{\sum_{i=k}^n X_i}.$$

2. Оценка разладки

Оптимальный портфель для бинарной модели. В работе [22] исследована задача:

$$\min_{\beta_{Y/X}, y_0} E(\Phi(Y(T), \xi)),$$

при ограничениях

$$Y(t) = y_0 + \int_0^t \beta_{Y/X}(s) dX_s, \quad t \in [0, T], \quad X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha_X(s) ds + \int_0^t \beta_X(s) dW_s,$$

$$y_0 \leq \alpha,$$

и предложен метод ее решения. Функция $\Phi(x, y)$ – выпуклая по первому аргументу функция при любом значении второго аргумента. Естественным дискретным, бинарным аналогом данной задачи является задача следующего вида:

$$\min_{\beta_{Y/X}, y_0} E(\Phi(Y_N, \xi)) \quad (7)$$

при ограничениях:

$$Y_n = y_0 + \sum_{i=1}^n \beta_{Y/U}(i) \Delta U_i, \quad n \in \{1, \dots, N\},$$

$$\Delta U_n = \varphi(U_{n-1}) a_n \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{X_n}, \quad X_n \in \{0, 1\},$$

$$y_0 \leq \alpha.$$

Уравнение (9) рассматривается на естественном стохастическом базисе: $\langle \Omega, (F)_n, F, P \rangle$, $F_0 = \sigma\{\emptyset, \Omega\}$, $F_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$. Для этого базиса случайные величины $a_n, b_n, \beta_{Y/X}(n)$ – предсказуемы ($a_n, b_n, \beta_{Y/X}(n) \in F_{n-1}$). Условная вероятность $P(X_n = 1 | F_{n-1}) = p_n$, p_n – предсказуемая случайная величина. Предположим, что существует единственная мартингальная мера P^* : $E^*(\Delta U_n | F_{n-1}) = 0$, и задача $\min_{\eta} E(\Phi(\eta, \xi))$ при условии $E^* \eta \leq a$ имеет решение – η^* , то решение задачи (7) имеет решение, которое получается следующим образом:

- 1) вычисляется мартингал $U_n = E^*(\eta^* | F_n)$;
- 2) вычисляется разложение мартингала Y по мартингалу U : $Y_n = y_0 + \sum_{i=1}^n \beta_{Y/U}(i) \Delta U_i$. Существование разложения следует из единственности мартингальной меры. Подробнее см. [21].

Таким образом, для решения задачи мартингальным методом требуется существование и единственность мартингальной меры. Для вычисления мартингальной меры необходимым и достаточным условием является равенство: $E^*(\Delta U_n | F_{n-1}) = 0$ или $b_n p_n^* + a_n(1 - p_n^*) = 0$. Решением этого уравнения является величина $p_n^* = \frac{-a_n}{b_n - a_n}$. Поскольку p_n^* – вероятность, то должно выполняться неравенство: $0 < \frac{-a_n}{b_n - a_n} < 1$. Это двойное неравенство будет выполняться, если $a_n < 0 < b_n$. Таким образом, единственная мартингальная мера существует, если выполняется данное двойное неравенство для параметров модели.

Модель с разладкой. Рассмотрим следующую модель:

$$\Delta U_n = \varphi(U_{n-1})a_n \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{X_n}, \quad X_n \in \{0, 1\}, \quad P(X_n = 1/n < \theta) = q_\infty, \quad (8)$$

$$P(X_n = 1/n \geq \theta) = q_0.$$

Бинарной последовательности X соответствует информационное дерево. Применяя методы, изложенные в предыдущем разделе, вычисляем момент остановки, оценивающий разладку, который разделяет вершины дерева на два класса – H_1, H_2 . В соответствии с классификацией вершин бинарного дерева определяются параметры модели: $a_n = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} a(A_{n-1}^i)I(A_{n-1}^i)$, $a(A_{n-1}^i) = \begin{cases} \mu_1, & A_{n-1}^i \in H_2 \\ \mu_2, & A_{n-1}^i \in H_1 \end{cases}$, $b_n = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} b(A_{n-1}^i)I(A_{n-1}^i)$, $b(A_{n-1}^i) = \begin{cases} \nu_1, & A_{n-1}^i \in H_2 \\ \nu_2, & A_{n-1}^i \in H_1 \end{cases}$. Исходная мера в данной модели вычисляется с помощью рекуррентных уравнений:

$$P(A_n^{2i+1}) = \begin{cases} q_0 P(A_{n-1}^i), & A_{n-1}^i \in H_1 \\ q_\infty P(A_{n-1}^i), & A_{n-1}^i \in H_2 \end{cases}, \quad P(A_n^{2i}) = \begin{cases} (1 - q_0) P(A_{n-1}^i), & A_{n-1}^i \in H_1 \\ (1 - q_\infty) P(A_{n-1}^i), & A_{n-1}^i \in H_2 \end{cases},$$

$$P(A_0^0) = 1.$$

Мартингальная мера в данной модели вычисляется следующим образом:

$$P^*(A_n^{2i+1}) = q(A_{n-1}^i)P^*(A_{n-1}^i), \quad P^*(A_n^{2i}) = (1 - q(A_{n-1}^i))P^*(A_{n-1}^i), \quad (9)$$

$$q(A_{n-1}^i) = \begin{cases} \frac{-\mu_1}{\nu_1 - \mu_1}, & A_{n-1}^i \in H_2 \\ \frac{-\mu_2}{\nu_2 - \mu_2}, & A_{n-1}^i \in H_1 \end{cases}, \quad P^*(A_0^0) = 1.$$

Для существования и единственности мартингальной меры достаточным условием является выполнение неравенств: $\mu_1 < 0 < \nu_1, \mu_2 < 0 < \nu_2$.

Оптимальное управление портфелем. Далее мы будем рассматривать задачу оптимального управления динамическим портфелем для уравнения Кокса–Росса–Рубинштейна (КРР) с разладкой. Задача заключается в выборе оптимальной стратегии инвестиций γ в рисковый актив, стоимость которого S подчиняется КРР уравнению:

$$\Delta S_n = S_{n-1}a_n \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{X_n}, \quad X_n \in \{0, 1\}, \quad P(X_n = 1/n < \theta) = q_\infty, \quad (10)$$

$$P(X_n = 1/n \geq \theta) = q_0.$$

Уравнение (10) является частным случаем уравнения (8). Эффект от динамического портфеля $\pi = (\gamma, \beta)$ – выражается в капитале Y . Капитал $Y_n = \gamma_n S_n + \beta_n B_n$, в этом равенстве B_n – стоимость безрискового актива, например, стоимость банковского счета. Безрисковость второго актива, входящего в портфель, означает, что стоимости B_n являются константами. Не нарушая общности, можно считать, что $B_n = 1$. Портфель называется самофинансируемым если: $\Delta Y_n = \gamma_n \Delta S_n$. Качество портфеля определяется доходностью портфеля в некий финальный момент времени N : $R_N = \frac{Y_N}{Y_0}$. Будем считать, опять же не нарушая общности, что $Y_0 = 1$, и известна цель – целевая

доходность, выраженная случайной величиной ξ , которая предполагается неотрицательной и ограниченной. При этом штраф взимается, если капитал не совпадает с целью. Средний квадратический штраф, штраф по Марковицу [17] приводит к задаче

$$\min_{\gamma} E(\xi - Y_N)^2, \quad \Delta Y_n = \gamma_n \Delta S_n, E^* Y_N = 1, \quad Y_N \geq 0 \quad (11)$$

ΔS_n удовлетворяет уравнению (9). Последнее неравенство означает, что рассматриваются допустимые портфели, капитал, которых неотрицателен.

Решение задачи (11) начнем с предложения, утверждающего, что все участвующие в задаче (11) случайные величины интегрируемы с квадратом.

Действительно, во-первых, для конечного пространства элементарных случайных событий свойство интегрируемости с квадратом эквивалентно свойству ограниченности, при условии, что все атомы нагружены, во-вторых, цель ξ и стоимости рискового актива S_n – ограниченные случайные величины по естественным причинам. Отсюда непосредственно следует ограниченность случайных величин Y_n .

Следуя схеме, изложенной ранее, для решения задачи (11) следует решить задачу:

$$\min_{\eta} E(\xi - \eta)^2, \quad E^* \eta = 1, \quad \eta \geq 0. \quad (12)$$

Без последнего ограничения решение задачи (12) можно найти с помощью функции Лагранжа. Решение задачи будет иметь вид:

$$\eta^* = \xi + \frac{1 - E^* \xi}{E^* Z} z.$$

В этой формуле значение случайной величины z в вершине A_N^i : $Z(A_N^i) = \frac{P^*(A_N^i)}{P(A_N^i)}$. Для того, чтобы портфель был допустимым, должно выполняться неравенство: $\xi + \frac{1 - E^* \xi}{E^* Z} z \geq 0$.

Далее применяется схема вычисления портфеля, приведенная выше.

Приведем пример, использования среднего квадратического портфеля. Допустим, мы хотим выяснить, возможно ли получить доходность выше доходности рискового актива, используя средний квадратический портфель или портфель оптимальный по Марковицу. Ответ заключается в следующем. Это можно сделать тогда и только тогда, когда $S_0 > E^* S_N$. Действительно, в качестве цели определим доходность $\xi = \alpha \frac{S_N}{S_0}$, $\alpha > 1$ и подставим ее в формулу для доходности оптимального портфеля, в результате получим $\eta^* = \alpha \frac{S_N}{S_0} + \frac{1 - \frac{\alpha}{S_0} E^* S_N}{E^* z} z$. Необходимым и достаточным

условием выполнения неравенства $\eta^* > \xi$ является неравенство $\alpha < \frac{S_0}{E^* S_N}$. Отсюда непосредственно следует приведенное утверждение.

Недостатком среднего квадратического штрафа является его симметричности. В качестве несимметричного штрафа можно предложить следующий штраф: $f(x, y) = \max\{y - x, 0\}$, который применяется машинном обучении [19]. С таким штрафом вспомогательная задача об оптимальном портфеле будет иметь вид:

$$\min_{\eta} E \max\{\xi + 1 - \eta, 0\}, \quad E^* \eta = 1, \quad \eta \geq 0. \quad (13)$$

Является справедливым неравенство $I_{\{\eta \leq \xi\}} \leq \max\{\xi + 1 - \eta, 0\}$, поэтому $P(\eta \leq \xi) \leq E \max\{\xi + 1 - \eta, 0\}$.

Анализ задачи. В задаче (13) целевая функция является выпуклой, единственное ограничение линейное, поэтому можно использовать сильную двойственность [23]. Двойственная задача выглядит следующим образом

$$\max_{\mu} \left[\min_{\eta \geq 0} (E \max\{\xi + 1 - \eta, 0\} + \mu(E^* \eta - 1)) \right].$$

Легко проверяется следующее утверждение.

Утверждение 1. *Оптимальное значение μ больше либо равно нулю.*

Пусть $F(\mu) = \min_{\eta \geq 0} (E \max\{\xi + 1 - \eta, 0\} + \mu(E^* \eta - 1))$. Упорядочим по возрастанию последовательность отношений $Z_{(i)} = \frac{P(A_N^i)}{P^*(A_N^i)}$, и рассмотрим разбиение положительной полуоси R_+ точками $Z_{(i)}$. Непосредственным вычислением доказывается справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. *Функция $F(\mu)$ – вогнутая кусочно-линейная функция, определяемая равенством $F(\mu) = \sum_{i=0}^j p_{(i)}(\xi_i + 1) + \mu \left(\sum_{i=j+1}^{2^N-1} p_{(i)}^*(\xi_i + 1) - 1 \right)$, $Z_{(j)} < \mu \leq Z_{(j+1)}$. В этом равенстве $p_{(i)} = P(A_N^{(i)})$, $p_{(i)}^* = P^*(A_N^{(i)})$.*

Пусть $k^* = \min\{j: \sum_{i=j+1}^{2^N-1} p_{(i)}^*(\xi_i + 1) \leq 1\}$. Используя утверждение (2), получим решение задачи (13). Это решение имеет следующий вид:

$$\eta_{(i)}^* = \begin{cases} 0, & i < k^*, \\ \frac{\left(1 - \sum_{i=k^*+1}^{2^N-1} p_{(i)}^*(\xi_i + 1)\right)}{p_{(k^*)}^*}, & i = k^*, \\ \xi_{(i)} + 1, & i > k^*. \end{cases}$$

При этом оптимальное значение $\mu^* = Z_{(k^*)}$.

После того как найдено η^* , вычисляется оптимальный портфель.

Оптимальный портфель для модели Блэка – Шоулса с разладкой. В модели Блэка – Шоулса с разладкой эволюция стоимости рискового актива описывается с помощью уравнения:

$$dS_t = S_t \left((m_1 I(t < \theta) + m_2 I(t \geq \theta)) dt + \sigma dW_t \right), \quad (14)$$

с заданным начальным значением S_0 . В (14) W_t – винеровский процесс.

Для приближения модели (14) бинарной моделью, моделью КРР, используем результаты уже упомянутой работы [16]. Интервал $[0, T]$ разбивается на N частей с шагом $h = T/N$. Бинарное приближение имеет вид:

$$S_t^h = S_0 + \sum_{i=1}^N \Delta S_{ih}^h I_{\{ih \leq t\}}, \quad \Delta S_{ih}^h = S_{(i-1)h}^h \sigma \sqrt{h} (-1)^{X_i+1}, \quad (15)$$

с условными вероятностями $q_\infty = P(X_i = 1/i < \theta) = \frac{1}{2} + \frac{\mu_1 \sqrt{h}}{2\sigma}$, $q_0 = P(X_i = 1/i \geq \theta) = \frac{1}{2} + \frac{\mu_2 \sqrt{h}}{2\sigma}$. Все остальные вычисления производятся также, как и в предыдущем разделе.

Редукция NP-полной задачи к P-полной задаче. Рассматриваемые задачи являются NP-полными, однако формулы (15), с помощью которых вычисляется стоимость рискованного актива, позволяют редуцировать NP-полную задачу к P-полной задаче. Для этого рассмотрим случайное блуждание: $\zeta_0 = 0$, $\zeta_n = \zeta_{n-1} + X_n$, которое образует марковскую цепь. Рассмотрим дерево с вершинами $\{A_n^i\}_{i=0}^n$, $n = 1, 2, \dots, N$, и дугами $A_n^i \rightarrow A_{n+1}^i$, $A_n^i \rightarrow A_{n+1}^{i+1}$, которое соответствует этому случайному блужданию. Стоимость актива в точках разбиения выражается через случайное блуждание следующим образом: $S_{nh}^h = S_0^h(1 + \sigma\sqrt{h})^{\zeta_n}(1 - \sigma\sqrt{h})^{n-\zeta_n}$, и поэтому связана с вершинами дерева. Для управления процессами с разладкой требуется классификация вершин дерева с использованием двух классов. Для данного дерева мы используем нечеткую классификацию. Мы будем рассматривать принадлежность вершины классу как случайное событие, которое наступает с апостериорной вероятностью $P(A_n^i \in H_1) = p_{n,i}$. Далее мы будем считать, что случайная величина ξ в целевом функционале задачи (11) будет функцией от стоимости рискованного актива $\xi(S_N)$. Для решения задачи (11) нам потребуется вычислить вероятности, связанные с вершинами последнего слоя – $P(A_N^k)$. Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, вычисления производятся с помощью рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} P(A_0^0) &= 1, & P(A_n^0) &= P(A_{n-1}^0)((1 - q_0)p_{n-1,0} + (1 - q_\infty)(1 - p_{n-1,0})), \\ P(A_n^n) &= P(A_{n-1}^{n-1})(q_0p_{n-1,n} + q_\infty(1 - p_{n-1,n})), \\ P(A_n^i) &= P(A_{n-1}^i)((1 - q_0)p_{n-1,i} + (1 - q_\infty)(1 - p_{n-1,i})) + \\ &+ P(A_{n-1}^{i-1})(q_0p_{n-1,i} + q_\infty(1 - p_{n-1,i})), \quad i \neq 0, \quad i \neq n. \end{aligned} \tag{16}$$

Мартингальная мера вычисляется аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Для мартингальной меры вероятности, связанные с вершинами последнего слоя $P^*(A_N^k) = C_N^k \left(\frac{1}{2}\right)^N$. Дальнейшие расчеты приведены в предыдущем разделе. Отметим, что порядок числа необходимых вычислений сократился с 2^{N+1} до N^2 .

Вероятности $p_{n,i}$. Для расчетов по формулам (16) требуются вероятности $p_{n,i}$. Рассмотрим $\zeta_n(i) = \sum_{j=1}^n P(\zeta_n = i/\theta = j)P(\theta = j)$, $i = 0, 1, \dots, n$; и рекуррентное уравнение, связывающее $\zeta_n(i)$ и $\zeta_{n+1}(i)$. Сперва приведем формулу для $\zeta_{n+1}(0) = (1 - q_0)(\zeta_n(0) + (1 - q_\infty)^n P(\theta = n + 1))$, затем для $\zeta_{n+1}(n + 1) = q_0(\zeta_n(n) + q_\infty^n P(\theta = n + 1))$, и наконец $\zeta_{n+1}(i) = q_0(\zeta_n(i - 1) + C_n^{i-1} q_\infty^{i-1} (1 - q_\infty)^{n-i+1} P(\theta = n + 1)) + (1 - q_0)(\zeta_n(i) + C_n^i q_\infty^i (1 - q_\infty)^{n-i} P(\theta = n + 1))$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для начальных значений справедливы равенства: $\zeta_1(0) = P(X_1 = 0/\theta = 1) = 1 - q_0$, $\zeta_1(1) = P(X_1 = 1/\theta = 1) = q_0$. Величины $\zeta_n(i)$ позволяют вычислить отношения правдоподобия $\psi_n(i) = \frac{P(\theta \leq n/\zeta_n=i)}{P(\theta > n/\zeta_n=i)} = \frac{\zeta_n(i)P(\theta \leq n)}{C_n^i q_\infty^i (1 - q_\infty)^{n-i} P(\theta > n)}$, а отношения правдоподобия, в свою очередь, позволяют вычислить вероятности $p_{n,i} = \frac{\psi_n(i)}{1 + \psi_n(i)}$. Последние равенства завершают необходимые для расчетов формулы.

3. Вычислительные примеры

Обнаружение разладки. Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение с разладкой:

$$dY_t = (m_1 I\{t < \theta\} + m_2 I\{t \geq \theta\}) dt + \sigma dW_t,$$

в котором W_t – стандартный винеровский процесс, случайная величина θ распределена по показательному закону распределения с плотностью $p_\theta(x) = \mu e^{-\mu t}$. Одновременно с этим уравнением рассматривается соответствующее дискретное уравнение:

$$\Delta Y_i = (m_1 I\{i < \theta\} + m_2 I\{i \geq \theta\})h + \sigma \sqrt{h} \varepsilon_i,$$

в котором h – шаг разбиения оси времени, θ – случайная величина с геометрическим распределением вероятностей $P(\theta = j) = (1 - \lambda)\lambda^{j-1}$, $j \geq 1$, ε_i – независимые стандартные нормальные случайные величины. Параметр $\lambda = e^{-\mu h}$. Последовательность Y_i приближается бинарной последовательностью \bar{Y}_i следующим образом $\bar{Y}_i = \bar{Y}_{i-1} + (-\sigma\sqrt{h})^{1+X_i}$, в которой $X_i = \begin{cases} 1, & Y_i - \bar{Y}_{i-1} > 0 \\ 0, & Y_i - \bar{Y}_{i-1} \leq 0 \end{cases}$. При таком приближении условные вероятности $q_\infty = P(X_i = 1/i < \theta) = \frac{1}{2} + \frac{m_1\sqrt{h}}{2\sigma}$, $q_0 = P(X_i = 1/i < \theta) = \frac{1}{2} + \frac{m_2\sqrt{h}}{2\sigma}$. Задача о разладке рассматривается на интервале $[0, 1]$ с начальным значением $Y_0 = 0$, параметр μ выбирается из условия $P(\theta > 1) \leq \alpha$, то есть $\mu = \ln \frac{1}{\alpha}$.

Было проведено значительное число экспериментов с разными значениями параметров, результаты одного из них приведены ниже. Определим значения параметров. Пусть

$$\alpha = 0,0005, \quad m_1 = 0,5, \quad m_2 = 1,5, \quad \sigma = 0,2, \quad N = 100, \quad h = 0,01, \quad M = 1000,$$

$$a = \sigma\sqrt{h} = 0,02, \quad \mu = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx 7,6, \quad \lambda = \exp(-\mu h) \approx 0,93,$$

тогда

$$q_0 = 0,5 + \frac{\mu_2\sqrt{h}}{2\sigma} = 0,875, \quad q_\infty = 0,5 + \frac{\mu_1\sqrt{h}}{2\sigma} = 0,625.$$

Вычисляем значения процесса $(Y_i)_{i=0}^N$ по формуле:

$$Y_0 = 0, \quad Y_i = Y_{i-1} + \mu_1 I(i < \theta)h + \mu_2 I(i \geq \theta)h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_i.$$

Напомним, что θ распределено по геометрическому закону распределения. Последовательность случайных величин $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^N$ может иметь три разных распределения.

Случай 1. Стандартное нормальное распределение (как и предполагается в модели).

Случай 2. Равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$.

Случай 3. Радемахеровское распределение.

В случаях 2 и 3 мы использовали распределения, которые отличаются от модельного.

Проведено M экспериментов. В каждом эксперименте генерировалась значение случайной величины θ , имеющей геометрическое распределение с параметром λ .

Величина ошибки аппроксимации вычисляется по формуле

$$\text{mis} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} (Y_i^j - \bar{Y}_i^j)^2},$$

процессы $(Y_i^j)_{i=0}^N$, $(\bar{Y}_i^j)_{i=0}^N$ соответствуют эксперименту с номером j .

Экспериментальные вероятности $q_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{k_0^{1,j}}{\tau^{j-1}}$, $q_\infty = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{k_\infty^{1,j}}{N - \tau^j}$, τ^j – значение момента остановки в эксперименте с номером j , $k_0^{1,j}$ – число $X_i^j = 1$, $i = 1, \dots, \tau^j - 1$,

$k_{\infty}^{1,j}$ – число $X_i^j = 1, i = \tau^j, \dots, N$. Процесс $(X_i^j)_{i=0}^N$ соответствует эксперименту с номером j .

Результаты эксперимента приведены в табл. 1. В первой строке приведены эмпирические вероятности q_0, q_{∞} для каждого рассматриваемого случая. Нетрудно заметить, что эти вероятности приблизительно совпадают с расчетными для данной модели. Напомним, что эти вероятности таковы: $q_0 = 0,875, q_{\infty} = 0,625$. Во второй строке приведена средняя квадратическая ошибка аппроксимации. Видно, что самая маленькая ошибка получилась во втором случае. Это произошло потому, что, во-первых, значение стандартной нормальной случайной величины концентрируется в окрестности нуля в то время, как значения равномерной случайной величины распределены по всему интервалу $[-1, 1]$. Во-вторых, в третьем случае случайная величина принимает только два значения, 1 и -1 , что, естественно, сказывается на величине ошибки. В третьей строке приведена средняя абсолютная ошибка обнаружения разладки, вычисленная с помощью отношения правдоподобия. В четвёртой строке приведена средняя абсолютная ошибка обнаружения разладки, вычисленная с помощью метода Монте-Карло с апостериорной вероятностью обнаружения разладки. Сопоставление третьей и четвёртой строки говорит о том, что для первого случая ошибка метода Монте-Карло существенно меньше ошибки, полученной в результате использования апостериорного отношения правдоподобия. Во втором и третьем случае наоборот. Этому есть естественное объяснение. Метод Монте-Карло зависит от распределения вероятностей и не обладает робастным свойством.

Таблица 1

Результаты эксперимента

	Случай 1	Случай 2	Случай 3
Эмпирические вероятности q_0, q_{∞}	$q_0 \approx 0,865$ $q_{\infty} \approx 0,641$	$q_0 \approx 0,874$ $q_{\infty} \approx 0,647$	$q_0 \approx 0,868$ $q_{\infty} \approx 0,62$
Величина ошибки аппроксимации	0,038	0,017	0,038
Величина ошибки при вычислении разладки детерминированным методом	0,08169	0,07345	0,08658
Величина ошибки при вычислении разладки методом Монте-Карло	0,010139	0,09418	0,10735

На рисунке приведена иллюстрация аппроксимации процесса Y процессом \bar{Y} . Непрерывная кривая соответствует процессу Y . Прерывистая кривая соответствует процессу \bar{Y} . Из рисунка можно сделать о хорошем качестве аппроксимации.

Минимизация риска. Рассматривается следующее уравнение: $\Delta S_n = S_{n-1}(-a)^{X_n}, S_0 = 1, P(X_n = 1/n < \theta) = q_{\infty}, P(X_n = 1/n \geq \theta) = q_0, P(\theta = j) = (1 - \lambda)\lambda^{j-1}, j = 1, \dots$

Используются следующие значения параметров: $q_{\infty} = 0,8; q_0 \in \{0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}; \lambda = 0,5; N = 10$.

Результаты приведены в табл. 2. Во второй строке таблицы приведены оптимальные значения критерия задачи (13) для различных значений q_0 . В задаче (13) целью является случайная величина $\xi = \frac{S_N}{S_0} + 0,01$, то есть мы хотим добиться большего по сравнению со стратегией: «В начале купить, в конце продать».

Приведем интерпретацию полученных результатов. Как уже отмечалось ранее числа, приведенные во второй строке являются оценками сверху вероятностей недостижения цели. Первые два столбца соответствуют ситуации: рост–падение. Падение стоимости акции наступает в момент разладки. Оптимальное поведение в этом случае заключается в покупке акции вначале и продаже ее в момент разладки. Сложность

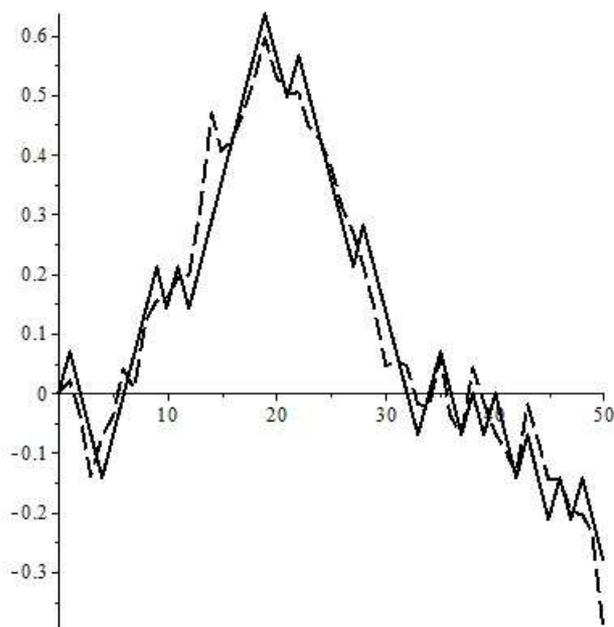
Аппроксимация процесса Y процессом \bar{Y}

Таблица 2

q_0	0,2	0,3	0,4	0,5
Значение критерия	0,0139	0,1213	0,5306	0,9876

реализации такой стратегии заключается в обнаружении разладки. Поскольку предлагаемый в статье метод связан с обнаружением разладки, то вероятности превзойти стратегию «вначале купи, в конце продай» на один процент равны в первом случае: 0,9782, во втором случае: 0,6876, что тоже неплохо. В третьем и четвертом вариантах тренд стоимости акции после разладки приблизительно равен нулю, поэтому оптимальному портфелю добиться однопроцентного преимущества значительно сложнее.

Заключение

Рассмотрение процессов с разладкой в задачах управления обусловлено воздействием на управляемую систему внешних случайных факторов, изменяющих внутреннюю случайную структуру объекта управления. С такими явлениями приходится считаться в условиях нестабильности, чтобы придать устойчивость развитию объекта управления. Предложенное решение «встроить» разладку в модель с применением апостериорного подхода, на наш взгляд, является оправданным, по крайней мере, имеет право на существование. В работе рассматриваются бинарные модели управляемых процессов.

Для процессов диффузии естественным способом реализации вычислительного метода является бинарная аппроксимация управляемого процесса. Даже при таком упрощенном способе аппроксимации задача управления становится NP -полной и рассчитывать приходится на специальные методы ее решения, например, на параллельные вычислительные процессы. Дополнительно к распараллеливанию можно использовать автомодельность броуновского движения и рассматривать задачу управления на фиксированном интервале.

Тем не менее может возникнуть ситуация, когда количество вычислений зашкаливает. В этом случае, при определенных ограничениях на модель возможна редукция

NP -полной задачи к P -полной с потерей информации, необходимой для обнаружения разладки. Один из таких способов предложен в работе, однако, для определения насколько потеря информации сказывается на качестве управления требует дополнительного исследования.

Вычислительные примеры являются иллюстрацией работы предложенного метода, их не следует рассматривать как доказательства чего-либо. Все доводы в пользу предлагаемого метода приведены в остальной части статьи. Экспериментов было проведено достаточное количество с качественно не отличающимися результатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01038).

Литература

1. Житлухин, М.В. Задачи об оптимальной остановке для броуновского движения с разладкой на отрезке / М.В. Житлухин, А.Н. Ширяев // Теория вероятностей и ее применения. – 2013. – Т. 58, № 1. – С. 164–171.
2. Shiryaev, A.N. On the Linear and Nonlinear Generalized Bayesian Disorder Problem (Discrete Time Case) / A.N. Shiryaev, P.Y. Zryumov // Optimality and Risk– Modern Trends in Mathematical Finance. – 2010. – P. 227–236.
3. Poor, H.V. Quickest Detection / H.V. Poor, O. Hadjiladis. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
4. Peskir, G. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems / G. Peskir, A. Shiryaev. – Basel: Birkha user Basel, 2006.
5. Ширяев, А.Н. Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени / А.Н. Ширяев // Успехи математических наук. – 1996. – Т. 51, № 4 (310). – С. 173–174.
6. Belyavsky, G. The Combined Monte–Carlo Method to Calculate the Capital of the Optimal Portfolio in Nonlinear of Financial Idexes / G. Belyavsky, N. Danilova // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2014. – № 11. – P. 1021–1024.
7. Belyavsky, G. Optimal Control Problem with Disorder / G. Belyavsky, N. Danilova, I. Zemlyakova // Automatics and Remote Control. – 2019. – № 80 (8). – P. 1419–1427.
8. Cox, J. Option Pricing: a Simplified Approach / J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein // Journal of Financial Economics. – 1979. – № 7. – P. 229–263.
9. Hsia, C. On Binomial Option Pricing / C. Hsia // Journal of Financial Research. – 1983. – № 6. – P. 41–50.
10. Heston, S. On the Rate of Convergence of Discrete-Time Contingent Claims / S. Heston, G. Zhou // Mathematical Finance. – 2000. – № 10. – P. 53–75.
11. Leisen, D. Binomial Models for Option Valuation – Examining and Improving Convergence / D. Leisen, M. Reimer // Applied Mathematical Finance. – 1996. – № 3. – P. 319–346.
12. Jarrow, R. Option Pricing / R. Jarrow, A. Rudd. – Irwin: Homewood, 1983.
13. Tian, Y. A Modified Lattice Approach to Option Pricing / Y. Tian // Journal of Futures Markets. – 1993. – № 13. – P. 563–577.
14. Joshi, M. Achieving Higher Order Convergence for the Prices of European Options in Binomial Trees / M. Joshi // Mathematical Finance. – 2010. – № 20. – P. 89–103.
15. Xiaoyong Xiao. Improving Speed of Convergence for the Prices of European Options in Binomial Trees with Even Numbers of Steps / Xiaoyong Xiao. // Applied Mathematics and Computation. – 2010. – № 216. – P. 2659–2670.
16. Nelson, D. Binomial Processes as Diffusion Approximation in Financial Models / D. Nelson // The Review of Financial Studies. – 1990. – V. 3, № 3. – P. 393–430.

17. Markowitz, H. Portfolio Selection / H. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – V. 7, № 1. – P. 77–91.
18. Rockafellar, R. Optimization of Conditional Value–At–Risk / R. Rockafellar, S. Uryasev // Journal of Risk. – 2000. – № 2. – P. 21–42.
19. Shalev-Shvartz, S. Understanding Machine Learning / S. Shalev-Shvartz, S. Ben-David. – Cambridge university press, 2016.
20. Dixon, M. Machine Learning and Finance / M. Dixon, I. Halperin, I. Bilokon. – Springer, 2020.
21. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики / А.Н. Ширяев. – М: МЦНМО, 2016.
22. Beliaevsky, G.H. Optimal Control Problems with Disorder / G. Beliaevsky, N. Danilova, I. Zemlyakova // Automation and Remote Control. – 2019. – V. 80, № 8. – P. 1407–1415.
23. Boyd, S. Convex Optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. – Cambridge University Press, 1983.

Григорий Исаакович Белявский, доктор технических наук, профессор, кафедра высшей математики и исследования операций, Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация), beliaevsky@hotmail.com.

Наталья Викторовна Данилова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики и исследования операций, Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация), danilova198686@mail.ru.

Received January 17, 2022

MSC 90C25

DOI: 10.14529/mmp220305

CONTROL IN BINARY MODELS WITH DISORDER

G.I. Beliaevsky¹, N.V. Danilova¹

¹South Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
E-mail: beliaevsky@hotmail.com, danilova198686@mail.ru

The paper considers the problem of dynamic control to a portfolio for a binary model with disorder. The a posteriori approach is considered, that is a disorder is detected with the subsequent clustering of the tree nodes in the process of solving the problem. On the basis of this clustering, we construct an algorithm for calculating the optimal dynamic portfolio, which is applicable for binary models with disorder. We use both symmetric and asymmetric penalties for not achieving the set control goal. Further, we analyze the possibility of using a binary model to approximate the Black–Scholes model with disorder, and investigate the possibility of reducing an NP -complete problem to P -complete problem with loss of information.

Keywords: disorder; risk; stopping time; martingale.

References

1. Zhitlukhin M.V., Shiryaev A.N. Optimal Stopping Problems for a Brownian Motion with Disorder on a Segment. *Theory of Probability and its Applications*, 2014, vol. 58, no. 1, pp. 164–171.
2. Shiryaev A.N., Zryumov P.Y. On the Linear and Nonlinear Generalized Bayesian Disorder Problem (Discrete Time Case). *Optimality and Risk–Modern Trends in Mathematical Finance*. Berlin, Springer, 2009, pp. 227–235. DOI: 10.1007/978-3-642-02608-9-12.

3. Poor H.V., Hadjiliadis O. *Quickest Detection*. Cambridge University Press, 2009.
4. Peskir G., Shiryaev A. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Basel, Birkhäuser, 2006.
5. Shiryaev A.N. Minimax Optimality of the Method of Cumulative Sums (Cusum) in the Case of Continuous Time. *Russian Mathematical Surveys*, 1996, vol. 51, no. 4 (310), pp. 750–751. DOI: 10.4213/rm1010.
6. Beliaevsky G., Danilova N. The Combined Monte–Carlo Method to Calculate the Capital of the Optimal Portfolio in Nonlinear of Financial Indexes. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, no. 11, pp. 1021–1024.
7. Belyavskii G., Danilova N., Zemlyakova I. Optimal Control Problem with Disorder. *Automatics and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 8, pp. 1419–1427. DOI: 10.1134/S0005117919080046.
8. Cox J., Ross S.A., Rubinstein M. Option Pricing: a Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 1979, no. 7, pp. 229–263.
9. Hsia C.C. On Binomial Option Pricing. *Journal of Financial Research*, 1983, no. 6, pp. 41–50. DOI: 10.1111/j.1475-6803.1983.tb00310.x.
10. Heston S., Zhou G. On the Rate of Convergence of Discrete-Time Contingent Claims. *Mathematical Finance*, 2000, no. 10, pp. 53–75.
11. Leisen D.P.J., Reimer M. Binomial Models for Option Valuation—Examining and Improving Convergence. *Applied Mathematical Finance*, 1996, no. 3, pp. 319–346. DOI: 10.1080/13504869600000015.
12. Jarrow R., Rudd A. *Option Pricing*. Homewood, Irwin, 1983.
13. Tian Y.S. A Modified Lattice Approach to Option Pricing. *Journal of Futures Markets*, 1993, no. 13, pp. 563–577. DOI: 10.1002/fut.3990130509.
14. Joshi M. Achieving Higher Order Convergence for the Prices of European Options in Binomial Trees. *Mathematical Finance*, 2010, no. 20, pp. 89–103. DOI: 10.1111/j.1467-9965.2009.00390.x.
15. Xiaoyong Xiao. Improving Speed of Convergence for the Prices of European Options in Binomial Trees with Even Numbers of Steps. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, no. 216, pp. 2659–2670. DOI: 10.1016/j.amc.2010.03.111.
16. Nelson D., Ramaswami K. Binomial Processes as Diffusion Approximation in Financial Models. *The Review of Financial Studies*, 1990, vol. 3, no. 3, pp. 393–430.
17. Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1952, vol. 7, no. 1, pp. 77–91.
18. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-At-Risk. *Journal of Risk*, 2000, no. 2, pp. 21–42. DOI: 10.21314/JOR.2000.038.
19. Shalev-Shvartz S., Ben-David S. *Understanding Machine Learning*. Cambridge University Press, 2016.
20. Dixon M., Halperin I., Bilokon I. *Machine Learning and Finance*. Springer, 2020.
21. Shiryaev A.N. *Osnovy stokhasticheskoy finansovoy matematiki* [Basics of Stochastic Financial Mathematics]. Moscow, MCNMO, 2016. (in Russian)
22. Beliaevsky G., Danilova N., Zemlyakova I. Optimal Control Problems with Disorder. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 8, pp. 1407–1415.
23. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

Поступила в редакцию 17 января 2022 г.