УДК 519.624.3 DOI: 10.14529/mmp230210

АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

***С.И. Кадченко*[1], *Л.С. Рязанова*[1]**
[1]Магнитогорский государственный технический университет, г. Магнитогорск, Российская Федерация

Методы нахождения асимптотических формул собственных чисел дискретных полуограниченных операторов, определенных на компактных множествах, в каждом случае индивидуальны. Поэтому возникает необходимость разработать алгоритмы, позволяющие находить асимптотические формулы собственных значений любых дискретных полуограниченных операторов, определенных на компактных множествах. Это значительно упростит их нахождение и позволит написать программы для получения асимптотических формул. Данные алгоритмы помогут находить асимптотические формулы собственных значений вектор-операторов, заданных на конечных связанных графах.

В статье, на основе разработанных раннее методов создан алгоритм, позволяющий находить асимптотические формулы собственных чисел с любым порядковым номером дискретных полуограниченных операторов, определенных на компактных множествах. Приведены примеры сравнения асимптотических формул, найденных по разработанной методике и по известным формулам, полученных ранее другими авторами, которые хорошо согласуются между собой.

Ключевые слова: асимптотические формулы; собственные числа и собственные функции линейных операторов; дискретные полуограниченные операторы.

Введение

Методы, позволяющие находить приближенные значения собственных чисел линейных дифференциальных операторов, построены на сведении спектральных задач к дискретным моделям и вычислении собственных чисел соответствующих матриц операторов, порождающих эти задачи. При этом нахождение собственных чисел с большими порядковыми номерами приводит к большим объемам вычислений. В связи с этим задача нахождения всех точек спектра линейных полуограниченных дифференциальных операторов до сих пор не имела численного решения.

Ранее авторами статьи был разработан численный метод вычисления собственных чисел дискретных полуограниченных операторов, позволяющий находить приближенные собственные числа с любыми порядковыми номерами, используя спектральные характеристики соответствующих невозмущенных операторов [1]. При этом число вычислений по сравнению с классическими методами уменьшается. Разработанный метод позволяет находить собственные числа дифференциальных операторов, не используя собственные числа с меньшими порядковыми номерами. Это позволяет решать проблему вычисления всех необходимых точек спектра операторов.

Рассмотрим задачу нахождения собственных чисел краевой задачи:

$$Lu = \mu u, \quad Gu|_{\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Здесь L – дискретный полуограниченный дифференциальный оператор, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D_L \in H$; Γ – граница области D_L. Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность конечномерных пространств, которая полна в H. Если известны ортонормированные базисы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ пространств $H_n \subseteq H$, которые удовлетворяют граничным условиям (1), приближенное решение задачи (1) по Галеркину находятся в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n)\varphi_k. \tag{2}$$

Коэффициенты $a_k(n)$ вычисляются из условия так, чтобы невязки, получаемые при замене u на u_n, были бы ортонормированными к системе функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$.

В работе [2] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Метод Галеркина в применении к задаче нахождения собственных значений спектральной задачи* (1)*, построенный на системе функций* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$*, сходится.*

Теорема 2. *Приближенные собственные значения* $\widetilde{\mu}_n$ *спектральной задачи* (1) *находятся по линейным формулам*

$$\widetilde{\mu}_n(n) = (L\varphi_n, \varphi_n) + \widetilde{\delta}_n,\ n \in N, \tag{3}$$

где $\widetilde{\delta}_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\mu}_k(n-1) - \widetilde{\mu}_k(n)]$*,* $\widetilde{\mu}_k(n)$ *–* n*-е приближения по Галеркину к соответствующим собственным значением* μ_k *спектральной задачи* (1).

Там же, используя теоремы 1, 2, показано, что

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\delta}_n = 0. \tag{4}$$

Поэтому формулы (3) для очень больших номеров n определяют собственные числа, входящие в асимптотику спектра оператора L. Для проверки этого сравним известные асимптотические формулы для собственных чисел, полученные для некоторых краевых задач с формулами (3).

1. Асимптотические формулы собственных чисел операторов Штурма – Лиувилля произвольного четного порядка

Изучим возможность применения формул (3) для нахождения асимптотических формул собственных чисел краевых задач, порожденных дифференциальными операторами произвольного четного порядка, заданные в $L_2[0,\pi]$, вида [3–5]

$$(T_m + P_m)u_m(s) = \mu_m u_m(s), \quad 0 < s < \pi, \tag{5}$$

$$u_m^{(2\nu-1)}(0) = u_m^{(2\nu-1)}(\pi) = 0, \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{6}$$

где $T_m u_m(s) = (-1)^m \dfrac{d^{2m}u_m(s)}{ds^{2m}}$, $P_m u_m(s) = \sum\limits_{k=0}^{m_v} p_{m_k}(s)\dfrac{d^k u_m(s)}{ds^k}$, $m \geq 2$, $m_v = \overline{0, 2m-1}$.

Для построения ортонормированной системы функций, являющейся базисом пространства $L_2[0,\pi]$ и удовлетворяющей граничным условиям (6), рассмотрим спектральные задачи

$$T_m v_m(s) = \lambda_m v_m(s), \quad 0 < s < \pi, \tag{7}$$

$$v_m^{(2\nu-1)}(0) = v_m^{(2\nu-1)}(\pi) = 0, \quad \nu = \overline{1,m}. \tag{8}$$

В работе [5] показано, что (7) и (8) являются самосопряженными задачами, собственные значения λ_{m_n} и ортонормированные собственные функции v_n которых будут

$$\lambda_{m_n} = n^{2m}, \quad v_n = \sigma_n \cos(ns), \quad \sigma_n = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\pi}}, & n = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, & n > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Известно, что система функций $\{\sigma_n \cos(ns)\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства $L_2[0,\pi]$ [6].

Запишем формулы (3) для вычисления собственных чисел спектральных задач (5), (6). Для этого воспользуемся собственными значениями λ_{m_n} и ортонормированными собственными функциями v_n из (9)

$$\begin{gathered} \widetilde{\mu}_{m_n}(n) = \lambda_{m_n} + (P_m v_n, v_n) + \widetilde{\delta}_{m_n} = n^{2m} + \\ + \sigma_n^2 \int\limits_0^\pi \cos(ns) \sum_{k=0}^{2m-1} p_{m_k}(s) \frac{d^k \cos(ns)}{ds^k} ds + \widetilde{\delta}_{m_n}. \end{gathered} \tag{10}$$

Если в уравнениях (5) принять $P_m = p_{m_0}(s)$, т. е. $p_{m_k}(s) = 0$ для $k = \overline{1, 2m-1}$, то для полученных дифференциальных уравнений

$$(T_m + p_{m_0}) u_m(s) = \mu_m u_m(s) \tag{11}$$

с краевыми условиями (6) справедлива следующая теорема [5].

Теорема 3. *Асимптотические формулы для собственных чисел μ_{m_n} краевых задач* (6), (11) *имеют вид*

$$\mu_{m_n} = n^{2m} + a_{m_0} + a_{m_{2n}} + O\Big(\frac{1}{n^{2m-1}}\Big), \quad n \to \infty, \tag{12}$$

где

$$a_{m_n} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi p_{m_0}(s) \cos(ns) ds, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{13}$$

Запишем формулы (10), которые получены на основе линейных формул (3), для случая, когда $P_m = p_{m_0}(s)$

$$\begin{gathered} \widetilde{\mu}_{m_n}(n) = \lambda_{m_n} + (P_m v_n, v_n) + \widetilde{\delta}_{m_n} = n^{2m} + \sigma_n^2 \int\limits_0^\pi \cos^2(ns) p_{m_0}(s) ds + \widetilde{\delta}_{m_n} = \\ = n^{2m} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi [1 + \cos(2ns)] p_{m_0}(s) ds + \widetilde{\delta}_{m_n}. \end{gathered}$$

Или используя обозначения (13), запишем

$$\widetilde{\mu}_{m_n}(n) = n^{2m} + a_{m_0} + a_{m_{2n}} + \widetilde{\delta}_{m_n}, \quad \forall n \in N. \tag{14}$$

Если сравнить асимптотические формулы (12) с формулами (14), то они отличаются только порядком погрешностей. Следовательно, результаты вычислений собственных значений задач (6), (11) по формулам (12) и (14) для любых порядковых номеров по этим формулам будут совпадать с хорошей точностью. При этом можно считать, что $\widetilde{\delta}_{m_n} = O\Big(\dfrac{1}{n^{2m-1}}\Big)$ при $n \to \infty$.

На основе вычислительных экспериментов выясним возможность использования формул (14) для вычисления собственных чисел при относительно небольших порядковых номерах спектральных задач (5), (6). Для этого сравним результаты вычислений собственных чисел по формулам (14) с их расчетами по методу Галеркина.

2. Вычислительный эксперимент

Используя математическую среду Maple, на основе приведенного в первом разделе теоретического материала были проведены вычислительные эксперименты по нахождению собственных чисел с первыми порядковыми номерами спектральных задач (5), (6). В нижеприведенных таблицах приближенные значения, вычисленные по формулам (14), обозначены через $\widetilde{\mu}_{m_n}$, а методом Галеркина – через $\widehat{\mu}_{m_n}$. Для задания функций $p_{m_k}(s)$, определяющих возмущающий оператор P_m, в уравнении (7) использовалась формула

$$p_{m_k}(s) = s^{st+2} - ks^{st+1} + 2m\sin((m_v+3)s) - m\cos(2(m_v+4)s) + e^{(st+1)s}, \quad st = \left\lceil \frac{m_v}{k+2} \right\rceil .$$

Здесь функция потолок $\lceil\cdot\rceil : x \longmapsto \lceil x \rceil$ определяется как наименьшее целое.

В табл. 1 приведены результаты вычисления собственных значений задач (6), (11), которые являются частными случаями задач (5), (6) при $m_v = 0$. Вычисления проводились при $m = \overline{1,11}$. Надо отметить, что если число $1,94 \cdot 10^5$ отличается от другого числа на величину $5,15 \cdot 10^{-4}$, то у них совпадают первые 8 значащих цифр.

Таблица 1

Результаты вычислений собственных чисел спектральных задач (5), (6) при $m = \overline{2,4}$

n	$m=2$ $\widetilde{\mu}_{m_n}$	$\lvert\widetilde{\mu}_{m_n} - \widehat{\mu}_{m_n}\rvert$	$m=3$ $\widetilde{\mu}_{m_n}$	$\widetilde{\mu}_{m_n} - \widehat{\mu}_{m_n}\rvert$	$m=4$ $\widetilde{\mu}_{m_n}$	$\lvert\widetilde{\mu}_{m_n} - \widehat{\mu}_{m_n}\rvert$
1	$9,34 \cdot 10^0$	$1,34 \cdot 10^0$	$7,39 \cdot 10^0$	$1,29 \cdot 10^{-1}$	$5,43 \cdot 10^0$	$7,24 \cdot 10^{-3}$
2	$2,04 \cdot 10^1$	$9,70 \cdot 10^{-1}$	$6,51 \cdot 10^1$	$1,53 \cdot 10^{-1}$	$2,54 \cdot 10^2$	$5,07 \cdot 10^{-3}$
3	$8,59 \cdot 10^1$	$2,31 \cdot 10^{-1}$	$7,31 \cdot 10^2$	$1,91 \cdot 10^{-2}$	$6,56 \cdot 10^3$	$1,79 \cdot 10^{-3}$
4	$2,60 \cdot 10^2$	$7,94 \cdot 10^{-2}$	$4,10 \cdot 10^3$	$4,73 \cdot 10^{-3}$	$6,55 \cdot 10^4$	$3,31 \cdot 10^{-4}$
5	$6,30 \cdot 10^2$	$2,00 \cdot 10^{-2}$	$1,56 \cdot 10^4$	$6,66 \cdot 10^{-4}$	$3,91 \cdot 10^5$	$2,83 \cdot 10^{-5}$
6	$1,30 \cdot 10^3$	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$4,67 \cdot 10^4$	$5,66 \cdot 10^{-4}$	$1,68 \cdot 10^6$	$2,22 \cdot 10^{-5}$
7	$2,41 \cdot 10^3$	$8,17 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^5$	$1,99 \cdot 10^{-4}$	$5,76 \cdot 10^6$	$5,53 \cdot 10^{-6}$
8	$4,10 \cdot 10^3$	$4,48 \cdot 10^{-3}$	$2,62 \cdot 10^5$	$7,71 \cdot 10^{-5}$	$1,68 \cdot 10^7$	$1,54 \cdot 10^{-6}$
9	$6,57 \cdot 10^3$	$2,92 \cdot 10^{-3}$	$5,31 \cdot 10^5$	$4,26 \cdot 10^{-5}$	$4,30 \cdot 10^7$	$7,08 \cdot 10^{-6}$
10	$1,00 \cdot 10^4$	$1,90 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^6$	$2,25 \cdot 10^{-5}$	$1,00 \cdot 10^8$	$3,02 \cdot 10^{-7}$
11	$1,46 \cdot 10^4$	$1,29 \cdot 10^{-3}$	$1,77 \cdot 10^6$	$1,26 \cdot 10^{-5}$	$2,14 \cdot 10^8$	$1,40 \cdot 10^{-7}$
12	$2,07 \cdot 10^4$	$9,10 \cdot 10^{-4}$	$2,99 \cdot 10^6$	$7,44 \cdot 10^{-6}$	$4,30 \cdot 10^8$	$6,95 \cdot 10^{-8}$
13	$2,86 \cdot 10^4$	$6,59 \cdot 10^{-4}$	$4,83 \cdot 10^6$	$4,49 \cdot 10^{-6}$	$8,16 \cdot 10^8$	$3,65 \cdot 10^{-8}$
14	$3,84 \cdot 10^4$	$4,94 \cdot 10^{-4}$	$7,53 \cdot 10^6$	$2,96 \cdot 10^{-6}$	$1,48 \cdot 10^9$	$2,02 \cdot 10^{-8}$
15	$5,06 \cdot 10^4$	$3,74 \cdot 10^{-4}$	$1,14 \cdot 10^7$	$1,95 \cdot 10^{-6}$	$2,56 \cdot 10^9$	$1,16 \cdot 10^{-8}$
16	$6,55 \cdot 10^4$	$2,09 \cdot 10^{-4}$	$1,68 \cdot 10^7$	$1,32 \cdot 10^{-6}$	$4,29 \cdot 10^9$	$6,92 \cdot 10^{-8}$
17	$8,35 \cdot 10^4$	$2,27 \cdot 10^{-4}$	$2,41 \cdot 10^7$	$9,21 \cdot 10^{-7}$	$6,98 \cdot 10^9$	$4,25 \cdot 10^{-9}$
18	$1,05 \cdot 10^5$	$1,83 \cdot 10^{-4}$	$3,40 \cdot 10^7$	$6,69 \cdot 10^{-7}$	$1,10 \cdot 10^{10}$	$2,75 \cdot 10^{-9}$
19	$1,30 \cdot 10^5$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$4,70 \cdot 10^7$	$1,26 \cdot 10^{-5}$	$1,70 \cdot 10^{10}$	$1,79 \cdot 10^{-9}$
20	$1,60 \cdot 10^5$	$2,04 \cdot 10^{-4}$	$6,40 \cdot 10^7$	$7,18 \cdot 10^{-7}$	$2,56 \cdot 10^{10}$	$2,03 \cdot 10^{-9}$
21	$1,94 \cdot 10^5$	$5,15 \cdot 10^{-4}$	$8,58 \cdot 10^7$	$7,02 \cdot 10^{-7}$	$3,78 \cdot 10^{10}$	$1,45 \cdot 10^{-9}$

Приведенные в табл. 1 результаты вычислений собственных значений при $m = \overline{2,4}$ показывают, что величины $\widetilde{\mu}_{m_n}$ и $\widehat{\mu}_{m_n}$ начиная с номера $n = 4$ хорошо согласуются. Та же тенденция сохраняется при $m \geq 5$. Например, при $m = 11$ $\widetilde{\mu}_{11_4} = 1,76 \cdot 10^{13}$, $|\widetilde{\mu}_{11_4} - \widehat{\mu}_{11_4}| = 8,49 \cdot 10^{-12}$, а $\widetilde{\mu}_{11_{21}} = 1,23 \cdot 10^{25}$, $|\widetilde{\mu}_{11_{21}} - \widehat{\mu}_{11_{21}}| = 2,37 \cdot 10^{-27}$.

Представляет интерес сравнение результатов вычисления собственных чисел спектральных задач (5), (6), когда сумма, определяющая возмущающий оператор P_m, состоит из различного количества членов вплоть до числа $m_v = 2m-1$. В табл. 2 приведены результаты таких вычислений для $m = 5$. Результаты вычислений собственных значений при $m = 5$, приведенные в табл. 2, показывают, что величины $\widetilde{\mu}_{m_n}$ и $\widehat{\mu}_{m_n}$ начиная с номера $n = 4$ хорошо согласуются.

Таблица 2

Результаты вычислений собственных чисел спектральных задач (5), (6) при $m_v = 4, 6, 8$

n	$m_v = 4$ $\widetilde{\mu}_{m_n}$	$\lvert\widetilde{\mu}_{m_n} - \widehat{\mu}_{m_n}\rvert$	$m_v = 6$ $\widetilde{\mu}_{m_n}$	$\widetilde{\mu}_{m_n} - \widehat{\mu}_{m_n}\rvert$	$m_v = 8$ $\widetilde{\mu}_{m_n}$	$\lvert\widetilde{\mu}_{m_n} - \widehat{\mu}_{m_n}\rvert$
1	$-4,46 \cdot 10^0$	$3,86 \cdot 10^{-1}$	$-4,66 \cdot 10^0$	$2,08 \cdot 10^{-1}$	$-4,78 \cdot 10^0$	$9,13 \cdot 10^0$
2	$-5,61 \cdot 10^{-1}$	$1,17 \cdot 10^{-1}$	$3,90 \cdot 10^{-1}$	$7,94 \cdot 10^{-1}$	$-1,28 \cdot 10^0$	$1,01 \cdot 10^0$
3	$9,91 \cdot 10^2$	$1,44 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^3$	$3,79 \cdot 10^0$	$2,95 \cdot 10^2$	$1,71 \cdot 10^2$
4	$5,90 \cdot 10^4$	$5,50 \cdot 10^{-2}$	$6,11 \cdot 10^4$	$3,80 \cdot 10^1$	$3,71 \cdot 10^4$	$6,96 \cdot 10^3$
5	$1,05 \cdot 10^6$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$1,05 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^1$	$8,37 \cdot 10^5$	$8,52 \cdot 10^4$
6	$9,67 \cdot 10^6$	$3,84 \cdot 10^{-2}$	$9,88 \cdot 10^6$	$1,43 \cdot 10^1$	$9,25 \cdot 10^6$	$7,61 \cdot 10^4$
7	$6,05 \cdot 10^7$	$2,19 \cdot 10^{-2}$	$6,07 \cdot 10^7$	$7,24 \cdot 10^1$	$4,78 \cdot 10^7$	$2,13 \cdot 10^5$
8	$2,82 \cdot 10^8$	$1,64 \cdot 10^{-2}$	$2,84 \cdot 10^8$	$1,43 \cdot 10^2$	$2,50 \cdot 10^8$	$5,89 \cdot 10^5$
9	$1,07 \cdot 10^9$	$6,29 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^9$	$2,21 \cdot 10^2$	$9,87 \cdot 10^8$	$2,13 \cdot 10^6$
10	$3,49 \cdot 10^9$	$4,40 \cdot 10^{-2}$	$3,49 \cdot 10^9$	$7,71 \cdot 10^2$	$3,27 \cdot 10^9$	$4,21 \cdot 10^6$
11	$1,00 \cdot 10^{10}$	$8,23 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{10}$	$4,07 \cdot 10^2$	$9,50 \cdot 10^9$	$8,67 \cdot 10^6$
12	$2,59 \cdot 10^{10}$	$7,10 \cdot 10^{-3}$	$2,59 \cdot 10^{10}$	$7,66 \cdot 10^2$	$2,49 \cdot 10^{10}$	$1,61 \cdot 10^6$
13	$6,19 \cdot 10^{10}$	$4,40 \cdot 10^{-5}$	$6,19 \cdot 10^{10}$	$6,42 \cdot 10^2$	$5,87 \cdot 10^{10}$	$1,59 \cdot 10^7$
14	$1,38 \cdot 10^{11}$	$2,42 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{11}$	$5,04 \cdot 10^2$	$1,34 \cdot 10^{11}$	$1,48 \cdot 10^7$
15	$2,89 \cdot 10^{11}$	$3,29 \cdot 10^{-3}$	$2,89 \cdot 10^{11}$	$6,01 \cdot 10^2$	$2,82 \cdot 10^{11}$	$4,07 \cdot 10^7$
16	$5,77 \cdot 10^{11}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$	$5,77 \cdot 10^{11}$	$5,38 \cdot 10^2$	$5,64 \cdot 10^{11}$	$5,73 \cdot 10^7$
17	$1,10 \cdot 10^{12}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$1,10 \cdot 10^{12}$	$5,96 \cdot 10^2$	$1,08 \cdot 10^{12}$	$8,56 \cdot 10^7$
18	$2,02 \cdot 10^{12}$	$1,68 \cdot 10^{-2}$	$2,02 \cdot 10^{12}$	$3,37 \cdot 10^2$	$1,98 \cdot 10^{12}$	$1,01 \cdot 10^8$
19	$3,57 \cdot 10^{12}$	$1,70 \cdot 10^{-2}$	$3,57 \cdot 10^{12}$	$3,37 \cdot 10^2$	$1,98 \cdot 10^{12}$	$1,38 \cdot 10^8$
20	$6,13 \cdot 10^{12}$	$3,67 \cdot 10^{-2}$	$2,31 \cdot 10^{12}$	$2,31 \cdot 10^3$	$6,05 \cdot 10^{12}$	$1,38 \cdot 10^8$
21	$1,02 \cdot 10^{13}$	$3,68 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{13}$	$3,01 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^{13}$	$3,08 \cdot 10^8$

Заключение

На примере спектральных задач (5), (6) исследована возможность применения линейных формул (3) для нахождения собственных значений с большими порядковыми номерами. Сравнение формул (14) с известными асимптотическими формулами (12) показало, что они отличаются друг от друга только порядком погрешностей.

Полученный результат подтверждает, что формулы (3) можно использовать для вычисления собственных чисел с большими порядковыми номерами для любых дискретных полуограниченных операторов. При этом они аналогичны асимптотическим формулам и отличаются от них только порядком погрешностей. Поэтому формулы (3) для очень больших номеров n определяют собственные чисел, входящие в асимптотику спектра оператора L.

Результаты вычислений собственных чисел с небольшими порядковыми номерами по формулам (3) и по методу Галеркина для задач (5), (6) показали, что они хорошо согласуются. Поэтому формулы (3) можно использовать для вычисления собственных чисел спектральных задач (5), (6) во всем диапазоне изменения их порядковых номеров.

Литература

1. Кадченко, С.И. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17. – С. 46–51.
2. Kadchenko, S.I. Calculation of Eigenvalues of Discrete Semibounded Differential Operators / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – V. 4, № 1. – P. 38–47.
3. Левитан, Б.М. Введение в спектральную теорию / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. – М.: Наука, 1970.
4. Borg, G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Elgenvertaufgabe / G. Borg // Acta Mathematica. – 1946. – V. 78, № 2. – P. 1–96.
5. Бехири, С.Э. Асимптотическая формула для собственных значений регулярного двухчленного дифференциального оператора произвольного четного порядка / С.Э. Бехири, А.Р. Казарян, И.Г. Хачатрян // Ученые записки Ереванского государственного университета. Серия: Естественные науки. – 1994. – № 1. – С. 3–18.
6. Михайлов, В.П. О базисах Рисса в $L^2(0,1)$ / В.П. Михайлов // Доклады Академии наук. – 1962. – Т. 144, № 5. – С. 981–984.

Сергей Иванович Кадченко, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика», Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация), sikadchenko@mail.ru.

Любовь Сергеевна Рязанова, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика», Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация), ryazanovals23@gmail.com.

Поступила в редакцию 18 января 2023 г.

MSC 47A10 **DOI: 10.14529/mmp230210**

ALGORITHMS INVENIRE ASYMPTOTIC FORMULAS EIGENVALUES DISCRETA SEMI-TERMINUS OPERATORS

S.I. Kadchenko[1]**, *L.S. Ryazanova***[1]
[1]Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation
E-mail: sikadchenko@mail.ru, ryazanovals23@gmail.com

Methods for finding asymptotic formulas for eigenvalues of discrete semibounded operators given on compact sets are individual in each case. Therefore, it becomes necessary to develop algorithms that allow one to find asymptotic formulas for the eigenvalues of any discrete semi-bounded operators given on compact sets. This will greatly simplify their finding and allow you to write programs to obtain asymptotic formulas. These algorithms will help to find asymptotic formulas for eigenvalues of vector operators given on finite connected graphs.

In the article, based on the methods developed earlier, an algorithm is created that allows finding asymptotic formulas for eigenvalues with any ordinal number for discrete semi-bounded operators given on compact sets. Examples are given of comparing asymptotic formulas found by the developed method and known formulas previously obtained by other authors, which are in good agreement with each other

Keywords: asymptotic formulas; eigenvalues and eigenfunctions of linear operators; discrete semibounded operators.

References

1. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Numeric Method of Finding the Eigenvalues for the Discrete Lower Semibounded Operators. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, no. 17 (234), pp. 46–51. (in Russian)
2. Kadchenko S.I., Zakirova G.A. Calculation of Eigenvalues of Discrete Semibounded Differential Operators. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 38–47. DOI: 10.14529/jcem170104
3. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu* [Introduction to Spectral Theory]. Moscow, Nauka, 1970. (in Russian)
4. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Elgenvertaufgabe. *Acta Mathematica*, 1946, vol. 78, no. 2, pp. 1–96. (in German) DOI: 10.1007/BF02421600
5. Behiri S.E., Kazaryan A.R., Khachatryan I.G. [Asymptotic Formula for Eigenvalues of a Regular Two-Term Differential Operator of Arbitrary Even Order]. *Scientific Notes of the Yerevan State University. Series: Natural Sciences*, 1994, no. 1, pp. 3–18. (in Russian)
6. Mikhaylov V.P. [About Riesz bases in $L^2(0,1)$]. *Academy of Sciences of USSR Reports*, 1962, vol. 144, no. 5, pp. 981–984. (in Russian)

Received January 18, 2023