

## НАПОРНОЕ ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ БРОУНОВСКОЙ СУСПЕНЗИИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

*А.В. Рязских*, Воронежский государственный технический университет,  
г. Воронеж, Российская Федерация

На основе двухжидкостных представлений о гидродинамике гетерогенных сред жидкость (газ) – твердые частицы без фазовых переходов и в отсутствии массовых сил с ньютоновским реологическим законом непрерывных несжимаемых компонент предложена модель напорного ламинарного течения броуновской суспензии, учитывающей давление частиц в уравнении для дисперсионной фазы. Давление частиц оценено через их энергию, затрачиваемой на сохранение стабильности гомогенности суспензии. Процедура линеаризации градиента давления в дисперсионной фазе проведена с введением параметра, означающего существование поперечной координаты, в которой скорости фаз равны. Сформулирована и аналитически решена в геометрическом формате 2-D, предполагая однонаправленность течения суспензии в плоском горизонтальном канале, система модельных дифференциальных уравнений с краевыми условиями «прилипания» фаз к стенкам канала и осевой симметрии поля скоростей. Установлено, что увеличение скорости потока приводит к большему опережению скорости частиц вблизи стенки и к большему отставанию в ядре потока, причем максимальная скорость фаз на оси канала больше скорости жидкости без дисперсионной фазы. Сравнительный анализ результатов расчета коэффициента сопротивления с известными экспериментальными данными подтвердили корректность предложенной модели и подтвердили снижение сопротивления течению броуновских суспензий по сравнению с гомогенной жидкой средой

*Ключевые слова:* броуновские суспензии; ламинарное течение; плоский канал; поля скоростей фаз.

### Введение

Броуновские суспензии относятся к коллоидным системам и наножидкостям [1], в которых частицы практически не седиментируют в осадок, т.к. броуновское движение препятствует этому и кроме того в них отсутствуют условия для коагуляции из-за их одинакового заряда. Гидродинамический анализ таких гетерогенных систем, как правило, осуществляется с позиций однофазного представления [2] с одновременным учетом внутренней структуры реологической формализацией. Тем не менее, двухфазность броуновских суспензий может проявляться неожиданным образом, например, добавление пыли к воздуху при турбулентном его движении по трубопроводу заметно снижает коэффициент сопротивления [3]. В [4] установлено, что при рассмотрении ламинарного течения Куэтта броуновской суспензии в плоском горизонтальном канале трение для дисперсионной и дисперсионной фаз уменьшается на обеих стенках канала. Это свидетельствует о том, что возможно возникновение гидродинамических неоднородностей таких как, например, в неброуновских суспензиях имеют место различающиеся по своей структуре поля скоростей фаз из-за миграционных эффектов. Для объяснения различия полей скоростей фаз при течении броуновских суспензий в [5] принимается допущение о седиментации твердых частиц.

В связи с этим необходимо исследовать поведение броуновских суспензий при их вынужденном ламинарном течении в плоском горизонтальном канале с целью идентификации закономерностей по влиянию дисперсионной среды на гидродинамические характеристики [6].

## 1. Математическая модель

Для анализа гидродинамических характеристик суспензий применяется двухфазный подход, основывающийся на траекторных и двухжидкостных модельных представлениях [7, 8], которые в современной интерпретации изложены в [9]. В траекторных моделях детали потока определяются либо путем отслеживания движения отдельных частиц, либо репрезентативного конгломерата дисперсной фазы [10]. В двухжидкостных моделях дисперсная фаза представляется другой непрерывной фазой, которая смешивается и взаимодействует со средой-носителем [11]. Для практических целей мониторинг отдельных частиц в потоке суспензии малоприменим при оценивании поведения гетерогенной системы в интегральном смысле, поэтому наиболее часто используется двухжидкостная модель [12, 13], которая для ламинарного потока броуновской суспензии без фазового перехода и осаждения частиц, в отсутствие массовых сил с ньютоновским реологическим законом непрерывных несжимаемых фаз трансформируется в уравнения [14–16]

$$\nabla \cdot \bar{u}_{f,s} = 0; \quad (1)$$

$$\alpha_{f,s} \rho_{f,s} \frac{\partial \bar{u}_{f,s}}{\partial t} + \alpha_k \rho_k (\bar{u}_{f,s} \cdot \nabla) \bar{u}_{f,s} = -\alpha_{f,s} \nabla p - \nabla p_c + \alpha_{f,s} \mu_{f,s} \nabla^2 \bar{u}_{f,s} + k (\bar{u}_{s,f} - \bar{u}_{f,s}), \quad (2)$$

где нижние индексы  $f$  и  $s$  относятся соответственно к дисперсионной и дисперсной фазам;  $t$  – время;  $\alpha_{f,s}$ ,  $\mu_{f,s}$ ,  $\rho_{f,s}$  – локальная объемная доля, динамическая вязкость и плотность фаз;  $\bar{u}_{f,s}$  – вектор скорости;  $p$ ,  $p_c$  – давление в несущей среде и частиц в уравнении для дисперсной фазы;  $k$  – коэффициент лобового сопротивления движения частиц; ( $\alpha_{f,s}$ ,  $\mu_{f,s}$ ,  $\rho_{f,s}$ ,  $k = \text{const}$ ).

Ввиду пренебрежимо малой инерции частиц в суспензиях, их перемещения определяются с точностью до флуктуаций, обусловленных броуновским движением, которые становятся значительными при малых размерах самих частиц. Таким образом, дисперсная фаза связана с давлением частиц, которое компенсирует движение частиц, приводящее к изменению их объемно доли. В [17] показано, что давление частиц  $p$  пропорционально их энергии  $E_s$ , которая характеризует стабильность гомогенности суспензии из-за локального изменения объемной доли дисперсного потока, вызванного его сжимаемостью, тогда

$$\nabla p_c \approx \alpha_s \rho_s \nabla E_s. \quad (3)$$

В [18] для разбавленных монодисперсных суспензий классифицированы следующие режимы на основе числа Стокса  $Stk = m |\bar{u}_s - \bar{u}_f| / (6\pi \mu_f r^2)$ , где  $m$  – масса частицы с радиусом  $r$ : распределение скоростей «массивных» частиц ( $Stk \gg \alpha_s^{-3/2}$ ) определяется их столкновениями и гидродинамическим взаимодействием; для «мелких» частиц ( $Stk \ll \alpha_s^{-3/2}$ ) столкновения частиц не играют никакой роли, и распределение их скоростей полностью определяется гидродинамическим взаимодействием. Для энергии «мелких» частиц зафиксирована неоднородность в распределении их скоростей с лимитированием энергии частиц в поперечном направлении потоку, поэтому

$$E_s = Stk^{-2/3} |\bar{u}_s - \bar{u}_f|^2 / (36\pi)^{1/3}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует соотношение для градиента давления частиц

$$\nabla p_c = \frac{\alpha_s \rho_s}{\sqrt[3]{\pi}} \left( \frac{9}{16} \frac{\mu_f}{\rho_s r} \right)^{2/3} \nabla |\bar{u}_s - \bar{u}_f|^{4/3},$$

которое после линеаризации  $\nabla |\bar{u}_s - \bar{u}_f|^{4/3}$  в среднеквадратичном приближении в предположении, что флуктуации скорости скольжения не превосходят  $\varepsilon u_0$ , где  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $u_0$  – средняя скорость суспензии, приобретает окончательный вид

$$\nabla p_c = \alpha_s \rho_s \sqrt[3]{\frac{\varepsilon u_0}{\pi}} \left( \frac{9}{16} \frac{\mu_f}{\rho_s r} \right)^{2/3} |\nabla \bar{u}_s - \nabla \bar{u}_f|. \quad (5)$$

Если к частицам не прикладывается внешний крутящий момент и рассматривается течение с низким числом Рейнольдса (ускорение и напряжения Рейнольдса незначительны), то в [19] показано, что для дисперсной фазы может быть выбрана структура реологического закона, аналогичного для ньютоновской жидкости, причем в этом случае разность относительных (приведенных к вязкости несущей среды) вязкостей суспензии и дисперсной фазы равна 1. Это позволяет определить вязкость дисперсной фазы через вязкость  $\mu_{sf}$  суспензии, т.е.  $\mu_s = \mu_{sf} - \mu_f$ .

В [20] экспериментально показано, что при вынужденном ламинарном течении наножидкости (вода и наночастицы  $\text{Al}_2\text{O}_3$  и (или)  $\text{CuO}$ ) с объемной долей частиц  $\alpha_s \leq 0.01$ , сопротивление потоку броуновской суспензии действительно уменьшается в сравнении с потоком «чистой» дисперсионной среды. При этом агрегативная и кинетическая устойчивость броуновской суспензии наблюдается при одновременном выполнении условий  $\alpha_s \leq 0,01$  и  $Pe = \frac{6\pi r^3 \mu_f \dot{\gamma}}{kT} \leq 10$  [21], где  $\mu_f$  – динамическая вязкость дисперсионной фазы;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура системы;  $\dot{\gamma}$  – скорость деформации движущейся среды.

Рассмотрим плоский полуограниченный канал высотой  $2h$ , по которому движется в ламинарном режиме агрегативно и кинетически устойчивая броуновская суспензия в декартовой  $2-D$  системе координат ( $x, y$  – продольная и поперечная координаты) с началом на входной кромке нижней стенки канала. Из предположения об однонаправленности течения суспензии и  $2-D$  геометрии, т.е.  $\bar{u}_{f,s} = (u_{f,s}, v_{f,s})$ , компоненты  $u_{f,s} = u_{f,s}(x, y, \tau)$ ,  $v_{f,s} = v_{f,s}(x, y, \tau)$  и кроме того расход суспензии через любое поперечное сечение постоянен, так что вместо независимой переменной правомерно использовать  $x = u_0 t$ , где  $u_0 = \text{const}$  скорость потока суспензии на входе в канал, тогда (1), (2) трансформируется в систему

$$\frac{\partial U_{f,s}}{\partial X} + \frac{\partial V_{f,s}}{\partial Y} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_{f,s}}{\partial X} = -\frac{\partial P_{f,s}}{\partial X} - A \left| \frac{\partial U_s}{\partial Y} - \frac{\partial U_f}{\partial Y} \right| + \frac{1}{Re_{f,s}} \frac{\partial^2 U_{f,s}}{\partial Y^2} + K_{f,s} (U_{s,f} - U_{f,s}); \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_{f,s}}{\partial Y} = 0; \quad (8)$$

$$\int_0^1 U_{f,s} dY = \frac{1}{2}; \quad (9)$$

$$U_{f,s}(0, Y) = 1; \quad (10)$$

$$U_{f,s}(X, 0) = \frac{\partial U_{f,s}(X, 1)}{\partial Y} = 0, \quad (11)$$

где  $X = x/h$ ;  $Y = y/h$ ;  $U_{f,s} = u_{f,s}/u_0$ ;  $V_{f,s} = v_{f,s}/u_0$ ;  $P_{f,s} = p/(\rho_{f,s} u_0^2)$ ;  $A = \frac{\alpha_s \rho_s}{\alpha_f \rho_f} \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{\pi u_0^2}} \left( \frac{9}{16} \frac{\mu_f}{\rho_s r} \right)^{2/3}$ ;  $Re_{f,s} = u_0 \rho_{f,s} h / \mu_{f,s}$ ;  $K_{f,s} = kh / (\alpha_{f,s} \rho_{f,s} u_0)$ .

Пусть  $\partial U_{f,s}/\partial X \equiv 0$ , тогда  $\partial P_{f,s}/\partial X = \partial P_{f,s}/\partial X = C_{f,s}$  и из (6) – (11) получим:

$$\frac{1}{\text{Re}_f} \frac{d^2 U_f}{dY^2} - A \left| \frac{\partial U_s}{\partial Y} - \frac{\partial U_f}{\partial Y} \right| + K_f (U_s - U_f) - C_f = 0; \quad (12)$$

$$\frac{1}{\text{Re}_s} \frac{d^2 U_s}{dY^2} + K_s (U_f - U_s) - C_s = 0; \quad (13)$$

$$U_{f,s}(0) = \frac{dU_{f,s}(1)}{dY} = 0 \quad (14)$$

с сохранением балансового соотношения фаз (9). В [22] экспериментально обнаружено, что скорость дисперсной фазы в ядре потока неброуновских суспензий опережает дисперсионную, а вблизи стенок плоского канала наоборот из-за миграционного эффекта, что предполагает наличие локализаций равенства скоростей. В связи с этим сопряженная нелинейная система (12) – (14) представлена эквивалентной линейной системой уравнений через аксиальную плоскость отсутствия скольжения фаз, с координатой  $Y_0$ , которая является, по-существу, параметром модели

$$\frac{1}{\text{Re}_f} \frac{d^2 W_f^{(1)}}{dY^2} + A \left[ \rho \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial Y} - \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial Y} \right] + K_f [\rho W_s^{(1)} - W_f^{(1)}] - 1 = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\rho}{\text{Re}_s} \frac{d^2 W_s^{(1)}}{dY^2} + K_s [W_f^{(1)} - \rho W_s^{(1)}] - \rho = 0; \quad (16)$$

$$\frac{1}{\text{Re}_f} \frac{d^2 W_f^{(2)}}{dY^2} - A \left[ \rho \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial Y} - \frac{\partial W_f^{(2)}}{\partial Y} \right] + K_f [\rho W_s^{(2)} - W_f^{(2)}] - 1 = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\rho}{\text{Re}_s} \frac{d^2 W_s^{(2)}}{dY^2} + K_s [W_f^{(2)} - \rho W_s^{(2)}] - \rho = 0; \quad (18)$$

$$W_f^{(1)}(0) = W_s^{(1)}(0) = \frac{dW_f^{(2)}(1)}{dY} = \frac{dW_s^{(2)}(1)}{dY} = 0; \quad (19)$$

$$W_f^{(1)}(Y_0) = W_f^{(2)}(Y_0), W_s^{(1)}(Y_0) = W_s^{(2)}(Y_0); \quad (20)$$

$$\frac{dW_f^{(1)}(Y_0)}{dY} = \frac{dW_f^{(2)}(Y_0)}{dY}, \frac{dW_s^{(1)}(Y_0)}{dY} = \frac{dW_s^{(2)}(Y_0)}{dY}, \quad (21)$$

где  $W_{f,s}^{(1,2)} = U_{f,s}^{(1,2)} / C_{f,s}$ ;  $\rho = \rho_f / \rho_s$ ;  $W_{f,s}^{(1)}, W_{f,s}^{(2)}$  - определены на  $Y \in [0, Y_0)$  и  $Y \in [Y_0, 1]$  соответственно;

$$\int_0^{Y_0} [W_f^{(1)} - W_s^{(1)}] dY = \int_{Y_0}^1 [W_f^{(2)} - W_s^{(2)}] dY. \quad (22)$$

## 2. Решение

Выразив из (16) и (18)  $W_f^{(1,2)}$

$$W_f^{(1,2)} = \rho \left[ \frac{1}{K_s} + W_s^{(1,2)} - \frac{1}{\operatorname{Re}_s K_s} \frac{d^2 W_s^{(1,2)}}{dY^2} \right] \quad (23)$$

и подставив полученные выражения соответственно в (15) и (17), получим вместо системы (15) – (21) следующую систему относительно  $W_s^{(1,2)}$ :

$$\frac{d^4 W_s^{(1,2)}}{dY^4} \mp A \operatorname{Re}_f \frac{d^3 W_s^{(1,2)}}{dY^3} - (\operatorname{Re}_s K_s + \operatorname{Re}_f K_f) \frac{d^2 W_s^{(1,2)}}{dY^2} = -\operatorname{Re}_f \operatorname{Re}_s (K_f + \rho^{-1}); \quad (24)$$

$$W_s^{(1)}(0) = \frac{dW_s^{(2)}(0)}{dY} = 0; \quad (25)$$

$$W_s^{(1)}(Y_0) = W_s^{(2)}(Y_0); \quad (26)$$

$$\frac{dW_s^{(1)}(Y_0)}{dY} = \frac{dW_s^{(2)}(Y_0)}{dY}; \quad (27)$$

с дополнительными краевыми условиями

$$\frac{d^2 W_s^{(1)}(0)}{dY^2} = \operatorname{Re}_s; \quad (28)$$

$$\frac{d^3 W_s^{(2)}(1)}{dY^3} = 0; \quad (29)$$

$$\frac{d^3 W_s^{(1)}(Y_0)}{dY^3} = \frac{d^3 W_s^{(2)}(Y_0)}{dY^3}; \quad (30)$$

$$\frac{d^2 \tilde{U}_s^{(1)}(Y_0)}{dY^2} = \frac{d^2 \tilde{U}_s^{(2)}(Y_0)}{dY^2}, \quad (31)$$

при безусловном выполнении (22). Решение системы (24) – (31):

$$\tilde{U}_s^{(1,2)} = C_1^{(1,2)} + C_2^{(1,2)} Y + C_3^{(1,2)} \exp(\pm r_2 Y) + C_4^{(1,2)} \exp(\pm r_3 Y) + \xi Y^2, \quad (32)$$

где  $r_{2,3} = (a \pm \sqrt{a^2 + 4b}) / 2$ ;  $a = A \operatorname{Re}_f$ ;  $b = \operatorname{Re}_s K_s + \operatorname{Re}_f K_f$ ;

$$\xi = [\operatorname{Re}_f \operatorname{Re}_s (K_f + \rho^{-1})] / [2(\operatorname{Re}_s K_s + \operatorname{Re}_f K_f)];$$

$$C_4^{(1)} = \frac{d[r_2(f_1 - f_2) - (-r_2 f_1 + r_3 f_2)]}{(f_1 - f_2)(r_3 e_1 - r_2 e_2) - (e_1 - e_2)(-r_2 f_1 + r_3 f_2)};$$

$$C_4^{(2)} = \frac{d e_1 (r_3 - r_2)}{(f_1 - f_2)(r_3 e_1 - r_2 e_2) - (e_1 - e_2)(-r_2 f_1 + r_3 f_2)};$$

$$e_1 = r_3^2 \exp(r_3 Y_0), e_2 = r_2^2 \exp(r_2 Y_0);$$

$$f_1 = r_3^3 \exp(-r_3) \exp(-r_2 Y_0) / [r_2 \exp(-r_2)], f_2 = r_2^3 \exp(-r_2) \exp(-r_3 Y_0); d = (2\xi - \operatorname{Re}_s) \exp(r_2 Y_0);$$

$$C_3^{(1)} = -r_3^2 / r_2^2 C_4^{(1)} - 2\xi / r_2^2 + \operatorname{Re}_s / r_2^2; C_3^{(2)} = \{-r_3^3 \exp(-r_3) / [r_2^3 \exp(-r_2)]\} C_4^{(2)};$$

$$\begin{aligned}
 C_1^{(1)} &= -C_3^{(1)} - C_4^{(1)}; \\
 C_1^{(2)} &= [\exp(r_2 Y_0)(1 - r_2 Y_0) - 1] C_3^{(1)} + [\exp(r_3 Y_0)(1 - r_3 Y_0) - 1] C_4^{(1)} - \\
 &\quad - [\exp(-r_2 Y_0)(1 + r_2 Y_0)] C_3^{(2)} - [\exp(-r_3 Y_0)(1 + r_3 Y_0)] C_4^{(2)}; \\
 C_2^{(1)} &= -C_3^{(1)} r_2 \exp(r_2 Y_0) - C_4^{(1)} r_3 \exp(r_3 Y_0) + [-r_2 \exp(-r_2 Y_0) + \\
 &\quad + r_2 \exp(-r_2)] C_3^{(2)} + [-r_3 \exp(-r_3 Y_0) + r_3 \exp(-r_3)] C_4^{(2)} - 2\xi; \\
 C_2^{(2)} &= r_2 C_3^{(2)} \exp(-r_2) + r_3 C_4^{(2)} \exp(-r_3) - 2\xi,
 \end{aligned}$$

а из (23) и (32) следует

$$\begin{aligned}
 W_f^{(1,2)} &= \rho/K_s - 2\rho\xi/\text{Re}_s K_s + \rho C_1^{(1,2)} + \rho C_2^{(1,2)} Y + \\
 &\quad + \rho [1 - r_2^2 / (\text{Re}_s K_s)] C_3^{(1,2)} \exp(\pm r_2 Y) + \\
 &\quad + \rho (1 - r_3^2 / \text{Re}_s K_s) C_4^{(1,2)} \exp(\pm r_3 Y) + \rho \xi Y^2.
 \end{aligned} \tag{33}$$

### 3. Анализ

Для примера рассмотрена изотермическая броуновская суспензия при температуре  $293^\circ K$ , движущаяся в плоском канале высотой  $h=0,1$  м со средней скоростью  $u_0=10^{-3}$  м/с, в которой вода с плотностью  $\rho_f=1000$  кг/м<sup>3</sup> и динамической вязкостью  $\mu_f=1,003 \cdot 10^{-3}$  Па·с является дисперсионной средой, а частицы песка плотностью  $\rho_s=2400$  кг/м<sup>3</sup>, со среднечисленным радиусом  $r=10^{-5}$  м и объемной долей  $\alpha_s=0,01$  образуют дисперсную фазу. Из-за незначительности концентрации частиц их столкновением можно пренебречь и поэтому гидродинамическая обстановка около какой-либо частицы не влияет на другие и тогда справедливо соотношение [23]

$$\mu_{sf} = \mu_f (1 - \alpha_s / \alpha_m)^{-1.82},$$

которое коррелирует с уравнением Эйнштейна [24] для свободнодисперсных систем при малых  $\alpha_s$ , где  $\alpha_m=0,68$  – объемная доля частиц в осадке,

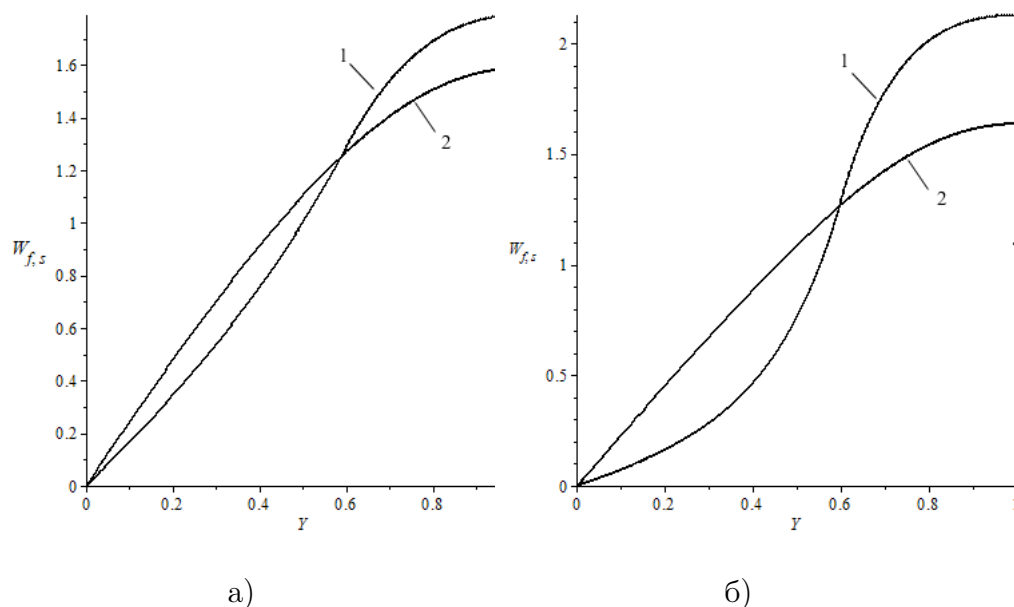
$$\mu_{sf} = \mu_f (1 + 2,5\alpha_s).$$

Коэффициент лобового сопротивления определен формулой Стокса [25]

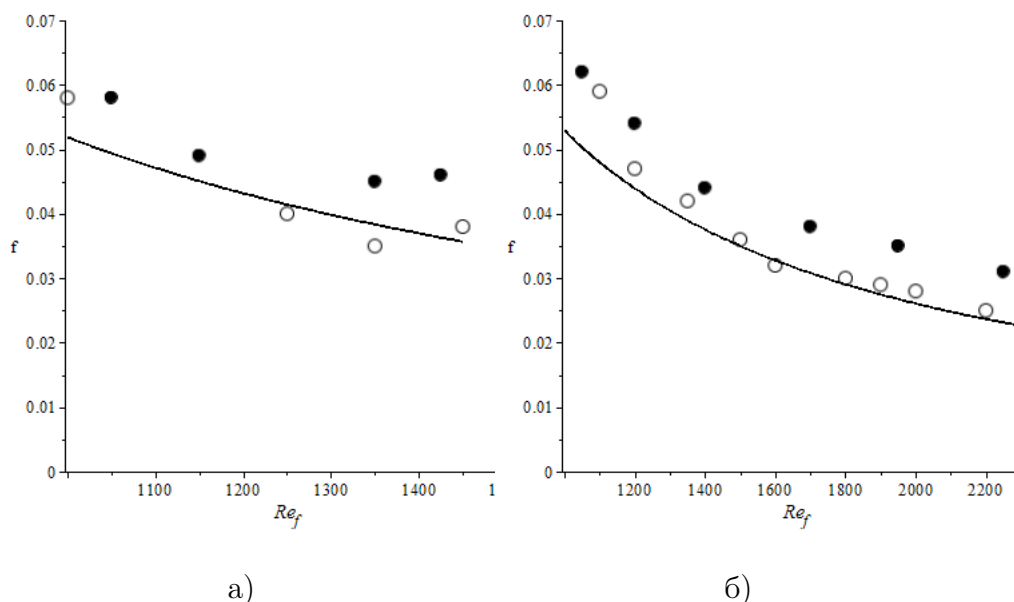
$$k = 6\pi r \mu_f.$$

Для нахождения параметра модели  $Y_0$  был принят следующий алгоритм: задавались  $Y_0$  из  $Y_0 \in [0, 1; 0, 9]$  с шагом 0.1; считая профиль скорости  $W_f^{(1,2)}(Y)$  реперным, где  $Y \in [0, 1]$ , определяли нормирующий коэффициент для  $W_s^{(1,2)}(Y)$  из условия сохранения постоянства расхода суспензии через поперечное сечение канала; вычисляли относительную ошибку выполнения условия (30) для каждого  $Y_0$ , аппроксимируя значения точности параболической зависимостью, коэффициенты которой идентифицировали методом наименьших квадратов; после чего по найденной таким образом зависимостям рассчитывали  $Y_0$ , соответствующий минимуму отклонения.

Вычислительными экспериментами установлено, что зависимость  $Y_0$  от  $u_0 \in [10^{-6}; 10^{-2}]$  незначительна, причем  $Y_0 \approx 0,6$ . Отметим также, что величина  $Y_0$  коррелирует с экспериментальными данными из [22, 26]. Аналогичный вывод сделан и при изменении  $r \in [10^{-5}; 10^{-4}]$ , а также для  $h \in [0,01; 0,2]$ , что согласуется с выводами в [27] для неброуновских суспензий. Несмотря на то, что дрейф  $Y_0$  отсутствует, уве-



**Рис. 1.** Профили скорости дисперсионной  $W_f$  (1) и дисперсной  $W_s$  фаз (2) суспензии вода-монодисперсные частицы кварца при различных скоростях  $u_0$ , м/с: а –  $10^{-4}$ ; б –  $10^{-3}$



**Рис. 2.** Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для различных наножидкостей: а –  $\text{H}_2\text{O}/\text{Al}_2\text{O}_3$ ; б –  $\text{H}_2\text{O}/\text{CuO}$  (о – эксперимент; сплошная линия – расчет; ● –  $\text{H}_2\text{O}$ )

личение скорости потока приводит к большему опережению скорости частиц вблизи стенки и к большему их отставанию в ядре потока (рис. 1), причем максимальная скорость фаз на оси канала больше скорости жидкости без дисперсионной фазы, равной 1,5. Рис. 2 иллюстрирует согласование результатов расчетов с известными экспериментальными данными [20] по коэффициенту сопротивления  $f = \tau_w / (0,5\rho_f u_0^2)$  ( $\tau_w$  – касательное напряжение на стенке) при напорном ламинарном течении наножидкостей в горизонтальных каналах, которые подтверждают корректность предложенной

модели и предсказывает снижение сопротивления течению броуновских суспензий по сравнению с гомогенной жидкой средой.

## Заключение

Учет давления частиц в уравнении для дисперсионной фазы объясняет наличие разных локальных скоростей частиц и жидкости. Линеаризация давления частиц в среднеквадратичном приближении позволила получить точное аналитическое решение уравнений двухжидкостной модели путем введения параметра  $Y_0$ , являющегося координатой аксиальной плоскости, в которой скорости фаз равны. Расчетный анализ подтвердил правомерность такого подхода и показал существование локального различия профилей скоростей частиц и несущей среды, аналогичное как для неброуновских суспензий.

## Литература

1. Hosokawa, M. Nanoparticle Technology Handbook / M. Hosokawa, K. Nogi, M. Naito, T. Yokoyama. – New York: Elsevier, 2008.
2. Thomas, S. Rheology of Polymer Blends and Nanocomposites. Theory, Modeling and Applications / S. Thomas, C. Sarathchandran, N. Chandran. – New-York: Elsevier, 2020.
3. Saffman, P.G. On the Stability of Laminar Flow of Dusty Gas / P.G. Saffman // Journal of Fluid Mechanics. – 1962. – V. 13, № 1. – P. 120–128.
4. Jha, B.K. Unsteady Two-Phase Couette Flow of Fluid-Particle Suspension / B.K. Jha, C.A. Apere // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – V. 37, № 4. – P. 1920–1931.
5. Yiantsios, S.G. Plane Poiseuille Flow of a Sedimenting Suspension of Brownian Hard-Sphere Particle: Hydrodynamic Stability and Direct Numerical Simulations / S.G. Yiantsios // Physics of Fluids. – 2006. – V. 18. – Article ID: 054103. – 13 p.
6. Haque, M.E. Laminar Forced Convection Heat Transfer of Nanofluids Inside Non-Circular Ducts: A Review / M.E. Haque, M.S. Hossain, H.M. Ali // Powder Technology. – 2021. – V. 378. – P. 808–830.
7. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978.
8. Фортъе, А. Механика суспензий / А. Фортъе. – М.: Мир, 1971.
9. Morel, C. Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows / C. Morel. – Cham: Springer International Publishing Switzerland, 2015.
10. Khawaja, H. Multiphysics Modeling of Fluid-Particulate System / H. Khawaja, M. Moatamedi. – New York: Academic Press, 2020.
11. Ishii, M. Thermo-Fluid Dynamics of Two phase Flow / M. Ishii, T. Hibiki. – New York: Springer, 2006.
12. Peker, S.M. Solid-Liquid Two Phase Flow / S.M. Pekar. – New York: Elsevier Science, 2008.
13. Невский, Ю.А. Моделирование гравитационной конвекции суспензий / Ю.А. Невский, А.Н. Осипцев // Письма в журнал технической физики. – 2009. – Т. 35, № 7. – С. 98–105.
14. Guan Heng Yeoh. Computational Techniques for Multiphase Flows / Guan Heng Yeoh, Jiyuan Tu. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2019.
15. Municchi, F. A Two-Model for Numerical Simulation of Shear-Dominated Suspension Flows / F. Municchi, P. Negrani, I.C. Christov // International Journal of Multiphase Flow. – 2019. – V. 120. – Article ID: 103079. – 23 p.
16. Drew, D.A. Mathematical Modeling of Two-Phase Flow / D.A. Drew // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1983. – V. 15. – P. 261–291.



17. Lun, C.K. The Effects of an Impact Velocity Depended Coefficient of Restitution on Stresses Developed by Sheared Granular Materials / C.K. Lun, S.B. Savage // *Acta Mechanica*. – 1986. – V. 63. – P. 15–44.
18. Koch, D.L. Kinetic Theory for a Monodisperse Gas-Solid Suspension / D.L. Koch // *Physics of Fluids A*. – 1990. – V. 2, № 10. – P. 1711–1723.
19. Brady, J.F. The Rheological Behavior of Concentrated Colloidal Dispersions / J.F. Brady // *Journal of Chemical Physics*. – 1993. – V. 99. – P. 567–581.
20. Heris, S.Z. Pressure Drop and Performance Characteristics of Water-Based Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и CuO Nanofluids in a Triangular Duct / S.Z. Heris, F. Ahmadi, O. Mahian // *Journal of Dispersion Science and Technology*. – 2013. – V. 34. – P. 1368–1375.
21. Lorenzo, T. Brownian Dynamic Simulations of Shear-Induced Aggregation of Charged Colloidal Particles in the Presence of Hydrodynamic Interactions / T. Lorenzo, L. Marco // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 2022. – V. 624. – P. 637–649.
22. Lyon, M.K. An Experimental Study of the Motion of Concentrated Suspensions in Two-Dimensional Channel Flow. Part 1. Monodisperse Systems / M.K. Lyon, L.G. Leal // *Journal Fluid Mechanics*. – 1998. – V. 363. – P. 25–56.
23. Phillips, R.J. A Constitutive Equation for Concentrated Suspensions that Accounts for Shear-Induced Particle Migration / R.J. Phillips, R.C. Armstrong, R.A. Brown // *Physics of Fluids A*. – 1992. – V. 4. – P. 30–40.
24. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988.
25. Gidaspow, D. Multiphase Flow and Fluidization / D. Gidaspow. – New York: Academic Press, 1994.
26. Morris, J.F. Pressure-Driven Flow of a Suspensions: Buoyancy Effects / J.F. Morris, J.F. Brady // *International Journal of Multiphase Flow*. – 1998. – V. 24, № 1. – P. 105–130.
27. Koh, C.J. An Experimental Investigation of Concentrated Suspension Flows in a Rectangular Channel / C.J. Koh, P. Hookham // *Journal Fluid Mechanics*. – 1994. – V. 226. – P. 1–32.

Александр Викторович Ряжских, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Прикладная математика и механика», Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж, Российская Федерация), ryazhskihav@bk.ru.

*Received April 23, 2024*

---

MSC 35K60

DOI: 10.14529/mmp240203

## PRESSURE LAMINAR FLOW OF A BROWNIAN SUSPENSION IN A FLAT CHANNEL

*A. V. Ryazhskih*, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, ryazhskihav@bk.ru

Based on two-fluid concepts of the hydrodynamics of heterogeneous media, liquid (gas)-solid particles without phase transitions and in the absence of mass forces with the

Newtonian rheological law of continuous incompressible components, a model of pressure laminar flow of a Brownian suspension is proposed, taking into account the pressure of particles in the equation for the dispersion phase. The pressure of particles is estimated through their energy expended to maintain the stability of the homogeneity of the suspension. The procedure for linearizing the pressure gradient in the dispersed phase was carried out with the introduction of a parameter indicating the existence of a transverse coordinate in which the phase velocities are equal. A system of model differential equations with boundary conditions for “sticking” of phases to the channel walls and axial symmetry of the velocity field is formulated and analytically solved in a 2-D geometric format, assuming unidirectional suspension flow in a flat horizontal channel. It has been established that an increase in the flow velocity leads to a greater advance of the particle velocity near the wall and a greater lag in the flow core, and the maximum phase velocity on the channel axis is greater than the velocity of the liquid without a dispersive phase. A comparative analysis of the results of calculating the resistance coefficient with known experimental data confirmed the correctness of the proposed model and confirmed the decrease in the resistance to flow of Brownian suspensions compared to a homogeneous liquid medium.

*Keywords: Brownian suspensions; laminar flow; flat channel; phase velocity fields.*

## References

1. Hosokawa M., Nogi K., Naito M., Yokoyama T. *Nanoparticle Technology Handbook*. New York, Elsevier, 2008.
2. Thomas S., Sarathchandran C., Chandran N. *Rheology of Polymer Blends and Nanocomposites. Theory, Modeling and Applications*. New York, Elsevier, 2020.
3. Saffman P.G. On the Stability of Laminar Flow of Dusty Gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, vol. 13, no. 1, pp. 120–128. DOI: 10.1017/S0022112062000555
4. Jha B.K., Apere C.A. Unsteady Two-Phase Couette Flow of Fluid-Partical Suspension. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 4, pp. 1920–1931. DOI: 10.1016/j.apm.2012.04.056
5. Yiantsios S.G. Plane Poiseuille Flow of a Sedimenting Suspension of Brownian Hard-Sphere Particle: Hydrodynamic Stability and Direct Numerical Simulations. *Physics of Fluids*, 2006, vol. 18, article ID: 054103, 13 p. DOI: 10.1063/1.2199493
6. Haque M.E., Hossain M.S., Ali H.M. Laminar Forced Convection Heat Transfer of Nanofluids Inside Non-Circular Ducts: A Review. *Powder Technology*, 2021, vol. 378, pp. 808–830. DOI: 10.1016/j.powtec.2020.10.042
7. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media]. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)
8. Fortier A. *Mekhanika suspenziy* [Suspension Mechanics]. Moscow, Mir, 1971. (in Russian)
9. Morel C. *Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows*. Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2015.
10. Khawaja H., Moatamed M. *Multiphysics Modeling of Fluid-Particulate System*. New York, Academic Press, 2020.
11. Ishii M., Hibiki T. *Thermo-Fluid Dynamics of Two Phase Flow*. New York, Springer, 2006.
12. Peker S.M. *Solid-Liquid Two Phase Flow*. New York, Elsevier Science, 2008.
13. Nevskii Yu.A., Osipov A.N. Modeling Gravitational Convection in Suspensions. *Technical Physics Letters*, 2009, vol. 35, no. 4, pp. 340–343. DOI: 10.1134/S1063785009040154
14. Yeoh Guan Heng, Tu Jiyuan. *Computational Techniques for Multiphase Flows*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2019.
15. Municchi F., Nagrani P., Christov I.C. A Two-Model for Numerical Simulation of Shear-Dominated Suspension Flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 2019, vol. 120, article ID: 103079, 23 p. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.07.015
16. Drew D.A. Mathematical Modeling of Two-Phase Flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 15, pp. 261–291. DOI: 10.1146/annurev.fl.15.010183.001401

17. Lun C.K., Savage S.B. The Effects of an Impact Velocity Depended Coefficient of Restitution on Stresses Developed by Sheared Granular Materials. *Acta Mechanica*, 1986, vol. 63, pp. 15–44. DOI: 10.3390/condmat9010018
18. Koch D.L. Kinetic Theory for a Monodisperse Gas-Solid Suspension. *Physics of Fluids A*, 1990, vol. 2, no. 10, pp. 171–1723. DOI: 10.1063/1.857698
19. Brady J.F. The Rheological Behavior of Concentrated Colloidal Dispersions. *Journal of Chemical Physics*, 1993, vol. 99, pp. 567–581. DOI: 10.1063/1.465782
20. Heris S.Z., Ahmadi F., Mahian O. Pressure Drop and Performance Characteristics of Water-Based  $\text{Al}_2\text{O}_3$  и  $\text{CuO}$  Nanofluids in a Triangular Duct. *Journal of Dispersion Science and Technology*, 2013, vol. 34, pp. 1368–1375. DOI: 10.1080/01932691.2012.745795
21. Lorenzo T., Marco L. Brownian Dynamic Simulations of Shear-Induced Aggregation of Charged Colloidal Particles in the Presence of Hydrodynamic Interactions. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2022, vol. 624, pp. 637–649. DOI: 10.1016/j.jcis.2022.05.047
22. Lyon M.K., Leal L.G. An Experimental Study of the Motion of Concentrated Suspensions in Two-Dimensional Channel Flow. Part 1. Monodisperse Systems. *Journal Fluid Mechanics*, 1998, vol. 363, pp. 25–56. DOI: 10.1017/S0022112098008817
23. Phillips R.J., Armstrong R.C., Brown R.A. A Constitutive Equation for Concentrated Suspensions that Accounts for Shear-Induced Particle Migration. *Physics of Fluids A*, 1992, vol. 4, pp. 30–40. DOI: 10.1063/1.858498
24. Landau L.D., Lifshits Ye.M. *Teoreticheskaya fizika. Gidrodinamika* [Theoretical Physics. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)
25. Gidaspow D. *Multiphase Flow and Fluidization*. New York, Academic Press, 1994.
26. Morris J.F., Brady J.F. Pressure-Driven Flow of a Suspensions: Buoyancy Effects. *International Journal of Multiphase Flow*, 1998, vol. 24, no. 1, pp. 105–130. DOI: 10.1016/S0301-9322(97)00035-9
27. Koh C.J., Hookham P. An Experimental Investigation of Concentrated Suspension Flows in a Rectangular Channel. *Journal Fluid Mechanics*, 1994, vol. 226, pp. 1–32. DOI: 10.1017/S0022112094000911

Поступила в редакцию 23 апреля 2024 г.