УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp240204

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ ХОФФА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

М.А. Сагадеева[1]***, С.А. Загребина***[1]
[1]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,
Российская Федерация
E-mail: sagadeevama@susu.ru, zagrebinasa@susu.ru

Статья посвящена исследованию устойчивости стационарного решения для неавтономной линеаризованной модели Хоффа на геометрическом графе. Такая модель позволяет описывать конструкцию из двутавровых балок, находящуюся под внешним давлением и воздействием высоких температур. Используя условия устойчивости стационарного решения для такой модели, можно описать условия стабильности конструкции, описываемой данной моделью на геометрическом графе. Отметим, что для линеаризованной модели Хоффа нельзя применить метод экспоненциальных дихотомий, так как относительный спектр оператора уравнения может пересекаться с мнимой осью. Поэтому для исследования устойчивости мы будем применять второй метод Ляпунова. Статья кроме введения и списка литературы содержит две части. В первой из них приводятся условия разрешимости неавтономной линеаризованной модели Хоффа на геометрическом графе, а во второй исследуется устойчивость стационарного решения этой модели.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; относительно ограниченный оператор; устойчивость по Ляпунову; локальный поток операторов; асимптотическая устойчивость.

Введение

Рассмотрим уравнение Хоффа [1]

$$(\lambda - \lambda_0 + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3 + f, \tag{1}$$

которое вкупе с граничными условиями позволяет смоделировать выпучивание двутавровой балки, которая оказывается под воздействием постоянной нагрузки, а также высокой температуры. Задаваемые параметры α, $\beta \in \mathbb{R}$ отражают характеристики свойств материала балки, тогда как параметры $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ выступают характеристикой самой нагрузки. Функция $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, помогает построить и описать отклонение балки от вертикали $(u = 0)$, в которой $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, – является ограниченной областью в границах $\partial\Omega$ класса C^∞. Отметим, что выражение при производной по времени в уравнении (1) может быть нулевым и поэтому (1) нельзя разрешить относительно производной по времени. Такие уравнения будем называть уравнениями соболевского типа [2–6].

Динамику конструкции из двутавровых балок моделируют уравнения Хоффа

$$(\lambda_j - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha_j u_j + \beta_j u_j^3 + f_j \tag{2}$$

заданные на конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер. Каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$; $u_j = u_j(x,t)$, $(x,t) \in (0, l_j) \times \mathbb{R}$, характеризует отклонение j-той балки от положения равновесия; параметры $\lambda_0, \lambda_j \in \mathbb{R}_+$

выступают характеристиками нагрузки на эту балку, а параметры $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала j-й балки, а $f_j \equiv f_j(x,t)$ отвечает внешней нагрузке на неё.

Обозначим через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ множество ребер с началом (концом) в вершине V_i, $t \in \mathbb{R}_+$, и зададим в вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ условия «непрерывности»,

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i). \end{gathered} \tag{3}$$

Для уравнений (2) условия (3) требуют непрерывности решений $u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots)$ в вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ и означают, что балки жестко закреплены в узлах. Кроме этого, зададим условие «баланса потока» в вершинах – аналог условий Кирхгофа для электрических цепей –

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{4}$$

Отметим, что условия (4) для уравнений (2) означают, что узлы конструкции неподвижны.

Если граф состоит из одного нециклического ребра (т.е. вершин у графа две), то условие (3) отсутствует, а условие (4) превращается в условие Неймана. Если же ребро циклическое (т.е. вершина у графа одна), то условия (3), (4) превращаются в условия согласования. Заметим еще, что в контексте условий (3), (4) «отсутствовать» не значит «быть равным нулю». Например, если в вершину V_i все ребра «входят», то первые два равенства в (3) и уменьшаемое в (4) именно «отсутствуют», а не равны нулю. Следуя терминологии Ю.В. Покорного [7], будем граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$, обладающий вышеперечисленными свойствами, в дальнейшем называть *геометрическим графом.*

Уравнения соболевского типа на геометрических графах впервые рассматривались в [8]. Разрешимость модели Хоффа с постоянными коэффициентами на графе в рамках теории уравнений соболевского исследовалась в работах [9, 10]. Задача оптимального управления для таких моделей рассматривается, например в [11]. Устойчивость решений уравнений соболевского типа с постоянными коэффициентами была исследована во многих работах (более подробно см. в [12]). Отметим, что при анализе устойчивости зачастую используют и информацию о расположении относительного спектра задачи. Устойчивость стационарных решений линеаризованной модели Хоффа с постоянными коэффициентами на графах исследована в [13].

Современная математическая наука зачастую обращается к линейной модели Хоффа, которая используется многими исследователями

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + f,$$

данная модель рассматривалась в приложении ко множествам различной геометрической структуры. Рассмотрим на геометрическом графе $\mathbf{G}$ неавтономные линеаризованные уравнения Хоффа

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jxxt} = \alpha(t)u_j \text{ для всех } x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

с условиями (3), (4), моделирующие выпучивание двутавровых балок в конструкции в линейном приближении с учетом изменения во времени свойств материала, которое описывается скалярной функцией $\alpha(t)$.

Основной целью данной работы является исследование устойчивости нулевого решения нестационарных линеризованных уравнений Хоффа (5) на графе с условиями (3), (4). Отметим, что используя условия устойчивости стационарного решения для такой модели, можно описать условия стабильности конструкции, описываемой данной моделью на геометрическом графе.

Разрешимость неавтономных уравнений соболевского типа впервые рассмотрена в [14]. Используя предложенные методы, были исследованы различные задачи [15,16], в том числе в работе [17] была исследована неавтономная линеаризованная модель Осколкова на геометрическом графе. При построении решения невтономного уравнения мы используем методику предложенную в [17, 18]. Разрешимость неавтономной линеаризованной модели Хоффа была исследована в [19].

Отметим, что для линеаризованной модели Хоффа нельзя применить метод экспоненциальных дихотомий [12], так как относительный спектр оператора уравнения может пересекаться с мнимой осью. Поэтому для исследования устойчивости мы будем применять второй метод Ляпунова [13]. Данная работа является логическим продолжением статьи [20], в которой приведены условия устойчивости стационарного решения неавтономного линейного уравнения соболевского типа.

1. Разрешимость неавтономной линеаризованной модели Хоффа на геометрическом графе

При построении решения будем опираться на теорию уравнений соболевского типа. Итак, пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ банаховы пространства, а операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейный и непрерывный) и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейный, замкнутый и плотно определенный в пространстве $\mathfrak{U}$). Оператор M называют *спектрально ограниченным относительно оператора* L (или просто (L,σ)-*ограниченным*), если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)),$$

где $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ – L-резольвентное множество, дополнение к нему $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ назовем *L-спектром* оператора M ([3], п. 2.1).

Ясно, что оператор $(\mu L - M)^{-1}$ голоморфен относительно переменной μ на множестве $\rho^L(M)$. Тогда можно определить операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ по формулам

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L d\mu \qquad \text{и} \qquad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L(\mu L - M)^{-1} d\mu,$$

где замкнутая кривая $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и интегралы понимаются как интегралы Римана. При условии (L,σ)-ограниченности оператора M эти операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ являются проекторами.

Определим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q$. Сужение действия оператора L на подпространство $\mathfrak{U}^k$ обозначим через L_k, и аналогично сужение действия оператора M на множество $\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$ $(k = 0, 1)$ – через M_k. И полученные множества $\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$ плотны в подпространствах $\mathfrak{U}^k$ $(k = 0, 1)$ соответственно.

Теорема 1. [2] **(Теорема Свиридюка о расщеплении)**
Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда
(i) *операторы* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$;
(ii) *операторы* $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$;
(iii) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ *и* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Обозначим $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Определение 1. (L,σ)-ограниченный оператор M назовем (L,p)-*ограниченным* при $p \in \{0\} \cup \mathbb{N} \equiv \mathbb{N}_0$, где p – это *порядок полюса* бесконечно удаленной точки оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$ переменной $\mu \in \mathbb{C}$ при $|\mu| > a$, а именно:

1) $p = 0$, если $H = \mathbb{O}$;
2) $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$ и $H^{p+1} = \mathbb{O}$;
3) $p = \infty$, если $H^p \neq \mathbb{O}$ для всех $p \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь на интервале $\mathfrak{J} \subset \mathbb{R}$ задачу Коши ($t_0 \in \mathfrak{J}$)

$$u(t_0) = u_0, \tag{6}$$

для однородного неавтономного уравнения

$$L\dot{u}(t) = \alpha(t)Mu(t), \tag{7}$$

где функция $\alpha : \mathfrak{J} \to \mathbb{R}_+$ подлежит дальнейшему определению.

Решением уравнения (7) будем называть вектор-функцию $u \in C^1(\mathfrak{J};\mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению на $\mathfrak{J}$. Решение уравнения (7) будем называть *решением задачи Коши* (6), (7), если она дополнительно удовлетворяет условию (6).

Определение 2. [19] Замкнутое множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (7), если

(i) любое решение $u(t)$ уравнения (7) лежит в $\mathfrak{P}$ (поточечно);

(ii) для любого u_0 из $\mathfrak{P}$, существует единственное решение задачи Коши (6) для уравнения (7).

Теорема 2. [19] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен ($p \in \mathbb{N}_0$) и функция $\alpha \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$. Тогда фазовым пространством уравнения* (7) *является множество* $\mathfrak{U}^1$.

Рассмотрим задачу Коши

$$u_j(x,0) = u_{j0}(x), \tag{8}$$

для линейных нестационарных уравнений Хоффа

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha(t)u_j, \tag{9}$$

заданных на геометрическом графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V},\mathfrak{E})$ с условиями

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{10}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{11}$$

Редуцируем задачу (9) – (11) к абстрактному уравнению (7). Для этого введем в рассмотрение множество

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots g_j, \ldots) : g_j \in L_2(0,l_j)\},$$

которое станет гильбертовым пространством, если ввести скалярное произведение $\langle \cdot,\cdot \rangle$ и норму $\|\cdot\|$ следующим образом:

$$\langle g,h \rangle = \sum_{j:E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx \text{ и } \|g\|^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j^2 dx.$$

Введем еще банахово пространство

$$\mathfrak{U} = \left\{ u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(0, l_j), \text{ причем выполнено (11)} \right\}$$

с нормой $\quad ||u||_{\mathfrak{U}}^2 = \sum\limits_{j:E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$

В силу теорем вложения Соболева пространства $W_2^1(0, l_j)$ состоят из абсолютно непрерывных функций, поэтому пространство $\mathfrak{U}$ корректно определено, а в силу теоремы Кондрашева – Реллиха оно компактно вложено в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. По теореме Ф. Рисса отождествим пространство $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное пространство к $\mathfrak{U}$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пространство $\mathfrak{F}$ – банахово, причем имеют место непрерывные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in [0, \lambda_0]$ и $\alpha \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$. Построим операторы

$$\langle Lu, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + (\lambda_0 - \lambda) u_j v_j) dx,$$

$$\langle Mu, v \rangle = -\alpha(t) \langle u, v \rangle,$$

где $u, v \in \mathfrak{U}$. Заметим, что операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, то есть линейны и непрерывны.

Замечание 1. Как легко видеть, первое собственное значение оператора L равно λ_0, причем это собственное значение однократно.

Действительно, пусть $L\varphi_1 = \lambda_0 \varphi_1$, тогда

$$\langle (L - \lambda_0) \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (\varphi_{1jx})^2 dx = 0.$$

В качестве первой собственной функции можно взять

$$\varphi_1 = \left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j \right)^{-\frac{1}{2}} (1, 1, \ldots, 1, \ldots).$$

Лемма 1. *При любых $\alpha \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.*

Доказательство. Пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные значения оператора L, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Пусть $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им собственные функции оператора L, ортонормированные в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. Пусть $(\lambda - \lambda_0) \neq \lambda_k$, тогда в силу непрерывной обратимости оператора L утверждение леммы очевидно.

Пусть $(\lambda - \lambda_0) = \lambda_k$, тогда $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda - \lambda_0\}$. Возьмем вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$, т.е.

$$\varphi = \sum_{\lambda_k = \lambda - \lambda_0} a_k \varphi_k, \quad \text{где} \sum_{\lambda_k = \lambda - \lambda_0} |a_k| > 0.$$

Поскольку

$$M\varphi = -\alpha(t) \sum_{\lambda_k = \lambda - \lambda_0} a_k \varphi_k \notin \operatorname{im} L,$$

отсюда следует справедливость утверждения.

□

Итак, редукция задачи (9) – (11) к уравнению (7) закончена.

Теорема 3. (i) *При всех* $\alpha \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ *и* $\lambda \in [0, \lambda_0)$ *фазовым пространством* $\mathfrak{P}$ *задачи* (8) – (11) *служит пространство* $\mathfrak{U}$.

(ii) *При всех* $\alpha \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ *и* $\lambda = \lambda_0$ *фазовым пространством* $\mathfrak{P}$ *задачи* (8) – (11) *служит подпространство* $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi \rangle = 0\}$.

Доказательство. Построим проектор

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L d\mu,$$

где замкнутый контур $\gamma \in \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M. Очевидно,

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda \in [0, \lambda_0); \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi \rangle, & \text{если } \lambda = \lambda_0. \end{cases}$$

Поэтому при $\lambda \in [0, \lambda_0)$ фазовым пространством задачи (8)–(11) будет все пространство $\mathfrak{U}$. А при $\lambda = \lambda_0$ в фазовом пространстве задачи (8)–(11) лежат те точки $u \in \mathfrak{U}$, для которых $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

□

Справедлива следующая теорема о виде решения задачи (8) – (11).

Теорема 4. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, *функция* $\alpha \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ *и*
(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. *Тогда при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение* (8) – (11), *представимое в виде*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{\lambda_k - (\lambda - \lambda_0)} \int\limits_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k;$$

(ii) $\lambda \in \sigma(\Delta)$. *Тогда при любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение* (8) – (11), *представимое в виде*

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{N} \backslash \{l : \lambda_l = \lambda - \lambda_0\}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{\lambda_k - (\lambda - \lambda_0)} \int\limits_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

2. Устойчивость стационарного решения неавтономной линеаризованной модели Хоффа

Пусть $\mathfrak{V}$ – нормированное пространство. Говорят, что на $\mathfrak{V}$ задан *локальный двупараметрический поток* (в дальнейшем – *поток*), если существует отображение S такое, что для любого $\mathfrak{u} \in \mathfrak{V}$ и некоторого $\tau = \tau(u) \in \mathbb{R}_+$ выполняются соотношения

(i) $S = S_s^t \mathfrak{u} \in \mathfrak{V}$, при всех $t, s \in (-\tau; \tau)$; $S_0^0 \mathfrak{u} = \mathfrak{u}$;
(ii) $S_s^t = S_z^t S_s^z \mathfrak{u}$ при всех $t, s, z \in (-\tau, \tau)$.
Точка $\mathfrak{u} \in \mathfrak{V}$ такая, что
(iii) $S_s^t \mathfrak{u} = \mathfrak{u}$, при всех $t, s \in (-\tau; \tau)$,
называется *стационарной точкой* потока S.

Построим стационарный поток для уравнения (7).

Теорема 5. [20] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен $(p \in \mathbb{N}_0)$ и функция $\alpha \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, тогда семейство $\{S_s^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}): \ t, s \in \mathbb{R}\}$, заданное формулой*

$$S_s^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L \exp\left(\mu \int\limits_s^t \alpha(\zeta) d\zeta \right) d\mu, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad s = 0 < t, \tag{12}$$

где замкнутый контур γ ограничивает область, содержащую L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M, является локальным потоком операторов. Причем, нулевая функция является стационарной точкой этого потока.

Применим эту теорему для исследования свойств стационарного решения задачи (9) – (11), которое будет просто нулевым решением. Фазовым пространством $\mathfrak{P}$ задачи (8) – (11) в обоих случаях ($\lambda \in [0, \lambda_0)$ и $\lambda = \lambda_0$) является банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}$, индуцированной из $\mathfrak{U}$. Введя в $\mathfrak{P}$ норму $\|\cdot\|$ из $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$, превратим в нормированное пространство (которое, очевидно, совпадет с $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ в случае $\lambda \in [0, \lambda_0)$ при его естественном понимании). Как и выше $\{\lambda_k\}$ – собственные значения оператора L, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им собственные функции оператора L, ортонормированные в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. В силу теоремы 5 на $\mathfrak{P}$ существует поток S, определяемый формулой (12), которая для задачи (9) – (11) примет вид

$$S_s^t \cdot = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp\left(\dfrac{1}{\lambda_k - (\lambda - \lambda_0)} \int\limits_s^t \alpha(\tau) d\tau \right) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если } \lambda \in [0, \lambda_0); \\ \sum\limits_{k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda_l = \lambda - \lambda_0\}}^{\infty} \exp\left(\dfrac{1}{\lambda_k - (\lambda - \lambda_0)} \int\limits_s^t \alpha(\tau) d\tau \right) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, & \text{если } \lambda = \lambda_0. \end{cases}$$

Определение 3. Стационарная точка $\mathfrak{u}$ потока S называется
(i) *устойчивой* (по Ляпунову), если для любой окрестности $\mathfrak{O}_{\mathfrak{u}}$ точки $\mathfrak{u}$ существует (возможно, другая) окрестность $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{u}}$ той же точки, что $S_s^t v \in \mathfrak{O}'_{\mathfrak{u}}$ при всех $v \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{u}}$ и $t, s \in \mathbb{R}_+$;
(ii) *асимптотически устойчивой* (по Ляпунову), если она устойчива и для любой точки v из некоторой окрестности $\mathfrak{O}_{\mathfrak{u}}$ точки $\mathfrak{u}$ выполняется $S_s^t v \to \mathfrak{u}$ при $t \to \infty$.

Для исследования такой устойчивости используется функционал Ляпунова.

Определение 4. Функционал $V \in C(\mathfrak{V};\mathbb{R})$ называется *функционалом Ляпунова* потока S, если для всех $u \in \mathfrak{V}$

$$\dot{V}(u) = \overline{\lim_{t \to 0+}} \frac{(V(S_0^t u) - V(u))}{t} \leq 0.$$

Теорема 6. [20] *Пусть $\mathfrak{u}$ – стационарная точка потока S на $\mathfrak{V}$. Если для потока S существует функционал Ляпунова такой, что*

1) $V(\mathfrak{u}) = 0$;
2) $V(v) \geq \varphi(\|v - \mathfrak{u}\|)$ *для строго возрастающей непрерывной функции* φ *такой, что* $\varphi(0) = 0$ *и* $\varphi(r) > 0$ *при* $r \in \mathbb{R}_+$,

то точка $\mathfrak{u}$ *устойчива.*

Теорема 7. [20] *Пусть выполнены условия теоремы* 6, *и существует строго возрастающая непрерывная функция* ψ *такая, что* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(r) > 0$ *при* $r \in \mathbb{R}_+$, *причем* $\dot{V}(v) \leq -\psi(\|v - \mathfrak{u}\|)$, *тогда точка* $\mathfrak{u}$ *асимптотически устойчива.*

Теперь рассмотрим оба случая по отдельности. Пусть сначала $\lambda \in [0; \lambda_0)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$. В этом случае функционал Ляпунова определим следующим образом:

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + (\lambda_0 - \lambda) u_j^2) dx.$$

Очевидно, $V(u) \geq (\lambda_0 - \lambda) \|u\|^2$ и $V(0) = 0$, поэтому в силу теоремы 6 нулевое решение задачи (9) – (11) устойчиво по Ляпунову. Далее, умножив (8) скалярно в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ на u, получим

$$\dot{V}(u) = -2\alpha(t) \|u\|^2, \tag{13}$$

что в силу теоремы 7 означает асимптотическую устойчивость нулевого решения задачи (9) – (11).

Рассмотрим случай $\lambda = \lambda_0$. Тогда в силу теоремы 2 фазовым пространством задачи (8) – (11) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$, в котором, согласно принципу Куранта, можно ввести норму

$$\|u\|_1^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^2 dx,$$

эквивалентную индуцированной из $\mathfrak{U}$ норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}$. Причем в силу теорем вложения Соболева $\|u\|_1 \geq c \|u\|$, где $c \in \mathbb{R}_+$ – константа вложения. Задав функционал Ляпунова $V(u) = \|u\|_1^2$, в силу теоремы 6 получаем устойчивость нулевого решения задачи (9) – (11). Далее, уравнения (8) в силу линейности на $\mathfrak{U}^1$ выглядят точно таким же образом. Поэтому поступая аналогично предыдущему, получаем справедливость (13). Итак, и в этом случае нулевое решение задачи (9) – (11) является асимптотически устойчивым. Таким образом, доказана

Теорема 8. *При любых* $\alpha \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ *и* $\lambda \in [0, \lambda_0]$ *нулевое решение задачи* (9) – (11) *является асимптотически устойчивым.*

Работа частично поддержана грантом Российского научного фонда № 24-11-20037, https://rscf.ru/project/24-11-20037.

Литература

1. Hoff, N.J. The Analysis of Structures / N.J. Hoff. – New York; London: John Wiley; Chapman and Hall, 1956.
2. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Известия РАН. Серия: Математическая. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.
3. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003.

4. Demidenko, G.V. Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc, 2003.

5. Al'shin, A.B. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Berlin: de Gruyter, 2011.

6. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.

7. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, и др. – М.: Физматлит, 2004.

8. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН им. С.Л. Соболева, 2002. – С. 221–225.

9. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126–131.

10. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физ.-мат. науки. – 2009. – № 1 (18). – С. 6–17.

11. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – С. 225–236.

12. Сагадеева, М.А. Дихотимии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012.

13. Загребина, С.А. Устойчивость в моделях Хоффа / С.А. Загребина, П.О. Москвичева. – Saarbrucken: LAMBERT Academic Publishing, 2012.

14. Сагадеева, М.А. Исследование устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / М.А. Сагадеева. – Челябинск, 2006. – 120 с.

15. Келлер, А.В. Задача оптимального измерения для модели измерительного устройства с детерминированным мультипликативным воздействием и инерционностью / А.В. Келлер, М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 134–138.

16. Sagadeeva, M.A. The Nonautonomous Linear Oskolkov Model on a Geometrical Graph: The Stability of Solutions and the Optimal Control Problem/ M.A. Sagadeeva, G.A. Sviridyuk// Semigroups of Operators – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – V. 113. – P. 257–271.

17. Sagadeeva, M.A. Mathematical Bases of Optimal Measurements Theory in Nonstationary Case / M.A. Sagadeeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 3. – P. 19–32.

18. Сагадеева, М.А. Вырожденные потоки разрешающих операторов для нестационарных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2017. – Т. 9, № 1. – С. 22–30.

19. Sagadeeva, M.A. Numerical Solution for Non-Stationary Linearized Hoff Equation Defined on Geometrical Graph / M.A. Sagadeeva, A.V. Generalov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2018. – V. 5, № 3. – P. 61–74.

20. Буевич, А.В. Устойчивость стационарного решения одного класса неавтономных уравнений соболевского типа / А.В. Буевич, М.А. Сагадеева, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2023. – Т. 16, № 3. – С. 77–86.

Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sagadeevama@susu.ru.

Софья Александровна Загребина, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zagrebinasa@susu.ru.

Поступила в редакцию 25 марта 2024 г.

MSC 34K20, 34G10 **DOI: 10.14529/mmp240204**

STABILITY OF A STATIONARY SOLUTION TO NON-AUTONOMOUS LINEARIZED HOFF MODEL ON A GEOMETRICAL GRAPH

***M.A. Sagadeeva*[1], *S.A. Zagrebina*[1]**
[1]South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: sagadeevama@susu.ru, zagrebinasa@susu.ru

The article is devoted to the study of the stability of a stationary solution for a non-autonomous linearized Hoff model on a geometric graph. This model makes it possible to describe a structure made of I-beams that is under external pressure and high temperatures. Using the stability conditions of a stationary solution for such a model, it is possible to describe the stability conditions of the structure described by this model on a geometric graph. Note that for the linearized Hoff model, the exponential dichotomy method cannot be applied, since the relative spectrum of the operator equation may intersect with the imaginary axis. Therefore, we use the second Lyapunov method to study of the stability. In addition to the introduction and the list of references, the article contains two parts. In the first of them, the conditions for the solvability of a non-autonomous linearized Hoff model on a geometric graph are given, and in the second, the stability of the stationary solution of this model is investigated.

Keywords: Sobolev type equations; relatively bounded operator; Lyapunov stability; local flow of operators; asymptotic stability.

References

1. Hoff N.J. *The Analysis of Structures.* New York, London; John Wiley; Chapman and Hall, 1956.
2. Sviridyuk G.A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994, vol. 42, no. 3, pp. 601–614. DOI: 10.1070/IM1994v042n03ABEH001547
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston; VSP, 2003.
4. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* New York; Basel; Hong Kong; Marcel Dekker Inc, 2003.
5. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations.* Berlin, de Gruyter, 2011.
6. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Nonclassical Mathematical Physics Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 40 (299), pp. 7–18.

7. Pokornyi Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. *Differencial'nye uravneniya na geometricheskih grafah* [Differential Equations on Geometric Graphs]. Mosccow, Fizmatlit, 2004. (in Russian)
8. Sviridyuk G.A. *Uravneniya sobolevskogo tipa na grafah* [Sobolev Type Equations on a Graph]. *Non-Classical Equations of Mathematical Physics*, Novosibirsk, 2002, pp. 221–225. (in Russian)
9. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff Equations on Graphs. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 139–145. DOI: 10.1134/S0012266106010125
10. Sviridyuk G.A., Bayazitova A.A. On Direct and Inverse Problems for the Hoff Equations on Graph. *Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2009, no. 1 (18), pp. 6–17.
11. Manakova N.A., Dylkov A.G. Optimal Control of the Solutions of the Initial-Finish Problem for the Linear Hoff Model. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 2, pp. 220–230. DOI: 10.1134/S0001434613070225
12. Sagadeeva M.A. *Dihotimii reshenij linejnyh uravnenij sobolevskogo tipa* [Dichotomies of the Solutions for the Linear Sobolev Type Equations]. Chelyabinsk, Izdatel'skij centr YUUrGU, 2012. (in Russian)
13. Zagrebina S.A., Moskvicheva P.O. *Stability in Hoff Models*. Saarbrücken, LAMBERT Academic Publishing, 2012. (in Russian)
14. Sagadeeva M.A. *Issledovanie ustojchivosti reshenij linejnyh uravnenij sobolevskogo tipa* [Investigation of Solutions Stability for Linear Sobolev Type Equations]. PhD (Math) Thesis. Chelyabinsk, 2006. 120 p. (in Russian)
15. Keller A.V., Sagadeeva M.A. The Optimal Measurement Problem for the Measurement Transducer Model with a Deterministic Multiplicative Effect and Inertia. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 134–138. DOI: 10.14529/mmp140111
16. Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. The Nonautonomous Linear Oskolkov Model on a Geometrical Graph: The Stability of Solutions and the Optimal Control Problem. *Semigroups of Operators – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 257–271. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_16
17. Sagadeeva M.A. Mathematical Bases of Optimal Measurements Theory in Nonstationary Case. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, vol. 3, no. 3, pp. 19–32. DOI: 10.14529/jcem160303
18. Sagadeeva M.A. Degenerate Flows of Solving Operators for Nonstationary Sobolev Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 22–30. DOI: 10.14529/mmph170103
19. Sagadeeva M.A., Generalov A.V. Numerical Solution for Non-Stationary Linearized Hoff Equation Defined on Geometrical Graph. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2018, vol. 5, no 3, pp. 61–74. DOI: 10.14529/jcem180306
20. Buevich A.V., Sagadeeva M.A., Zagrebina S.A. Stability of a Stationary Solution to One Class of Non-Autonomous Sobolev Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2023, vol. 16, no. 3, pp. 77–86. DOI: 10.14529/mmp230305

Received March 25, 2024