

## ВЛИЯНИЕ НАПРАВЛЕННОЙ МИГРАЦИИ НА ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ НАСЕЛЕНИЯ В SIS-МОДЕЛИ

*А.В. Будянский*, Донской государственный технический университет,  
г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Рассмотрена математическая модель распространения инфекционного заболевания, записываемая в виде системы нелинейных уравнений параболического типа. Изучается пространственно-временная эволюция плотностей двух групп населения: восприимчивых к инфекции и инфицированных. Допускается взаимный переход из одной группы в другую. Динамика плотностей определяется миграционными потоками и локальным взаимодействием. Миграционные потоки обусловлены диффузионным распространением населения по ареалу и направленной миграцией, вызванной некоторым стимулом. Моделирование проводится с учетом смертности инфицированных. В вычислительных экспериментах определена роль миграционных факторов в эпидемиологических сценариях.

*Ключевые слова:* математическое моделирование; эпидемия; компартиментальная модель; нелинейные параболические уравнения; направленная миграция.

### Введение

Важной проблемой в области здравоохранения является угроза эпидемий. Международная торговля, туризм и миграция приводят к распространению болезней, а урбанизация способствует вспышкам заболеваний [1]. Последствия массовых инфекционных заражений имеют важное социально-экономическое значение, что делает актуальным развитие методов анализа и прогноза в области математической эпидемиологии [2].

Для понимания динамики, лежащей в основе передачи заболеваний, часто используют компартиментальные модели на основе систем дифференциальных уравнений [3,4]. Данные модели разделяют население на группы, как правило, в зависимости от их риска или статуса инфекции. В большинстве рассматриваемых случаев изучается только изменение средней численности по каждой группе [5–7]. Данный подход имеет ряд недостатков, так как не позволяет учитывать факторы неравномерного распределения населения внутри рассматриваемого ареала [8]. Для учета пространственных эффектов компартиментальные модели дополняются диффузионными слагаемыми [9,10]. Однако концепция «случайного» распространения населения по ареалу критикуется эпидемиологами, так как направленная миграция является неотъемлемой частью жизни биологических сообществ [11, 12]. Помимо диффузионного распространения по ареалу может учитываться направленная миграция (таксис), вызванная некоторым стимулом [13,14]. Так, в работах [15,16] изучено влияние миграции на инвазию и конкуренцию биологических сообществ. Одним из эффективных методов, позволяющих учитывать таксис, является моделирование с помощью уравнений в частных производных, особенно уравнений реакции-диффузии-адвекции [17].

Данная работа посвящена изучению влияния направленной миграции на распространение инфекционного заболевания в пределах рассматриваемого ареала. Рассматривается SIS-модель (Susceptible–Infected–Susceptible), когда все сообщество разделено на две группы: восприимчивые к инфекции и инфицированные [18, 19]. Предполагается возможным обоюдный переход из одной группы в другую, а также возможность летального исхода для инфицированных.

## 1. Модель пространственно-временной динамики заболеваемости населения

Распределения двух непересекающихся групп населения на ареале описываются функциями плотностей  $S(x, t)$  и  $I(x, t)$ . Восприимчивым к инфекции соответствует функция  $S(x, t)$ , а инфицированным –  $I(x, t)$ . Уравнения баланса плотностей записываются, используя миграционные потоки  $Q_j$  и локальное взаимодействие:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \beta SI + \gamma I, \quad Q_1 = -d_1 \frac{\partial S}{\partial x} + a_1 S \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \beta SI - \gamma I - \theta I, \quad Q_2 = -d_2 \frac{\partial I}{\partial x} + a_2 I \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (2)$$

Коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  определяют интенсивность контактов с последующим инфицированием и интенсивность выздоровления соответственно, а параметр  $\theta$  – долю смертности зараженных. Подразумевается, что перечисленные выше скалярные параметры неотрицательны.

В миграционных потоках  $Q_1$  и  $Q_2$  учитывается диффузионное распространение и направленная миграция. Диффузионное распространение определяется слагаемыми с коэффициентами  $d_j$ , а направленная миграция, вызванная некоторым стимулом  $P(x)$ , слагаемыми с коэффициентами  $a_j$ . Знаки коэффициентов  $a_j$  могут быть различны и определяют разные виды реакции. В дальнейшем функцию  $P(x)$  будем понимать как *неравномерность распределения жизненных условий*.

Рассматривается случай одномерного изолированного ареала  $\Omega = [0, a]$ , на границе которого ставятся условия отсутствия потоков:

$$Q_1(0, t) = Q_1(a, t) = Q_2(0, t) = Q_2(a, t) = 0. \quad (3)$$

Модель дополняется начальными распределениями плотностей:

$$S(x, 0) = S^0(x), \quad I(x, 0) = I^0(x). \quad (4)$$

Очевидно, что кроме нулевого равновесия, система (1) – (4) обладает стационарным полуположительным решением с присутствием на ареале только группы  $S$ .

**Лемма 1.** Система (1) – (4) имеет равновесие:

$$S = c_1 e^{a_1/d_1 P}, \quad I = 0, \quad c_1 \geq 0.$$

*Доказательство.* Стационарное решение должно удовлетворять условиям:

$$0 = -\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \beta SI + \gamma I, \quad (5)$$

$$0 = -\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \beta SI - \gamma I - \theta I. \quad (6)$$

При  $I = 0$  уравнение (6) выполняется автоматически, а для выполнения (5) необходимо:

$$d_1 \frac{\partial S}{\partial x} - a_1 S \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

После подстановки  $S = c_1 e^{c_2 P}$  выражение (7) переписывается в виде:

$$d_1 c_1 c_2 e^{c_2 P} \frac{\partial P}{\partial x} - a_1 c_1 e^{c_2 P} \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Данное выражение будет выполнено при  $c_2 = a_1/d_1$  и любом неотрицательном значении  $c_1$ , что доказывает лемму.  $\square$

Таким образом коэффициент  $c_1$  определяет набор стационарных распределений и в случае заданного значения  $\int_{\Omega} S dx = \Phi$  может быть определен по формуле:

$$c_1 = \frac{\Phi}{\int_{\Omega} e^{a_1/d_1 P} dx}. \quad (9)$$

Пусть выполняются условия:

$$\Omega = [0, 2], \quad \int_{\Omega} S dx = 0,6, \quad d_1 = 0,01, \quad a_1 = 0,03 \quad (10)$$

и функция неравномерности жизненных условий дается формулой:

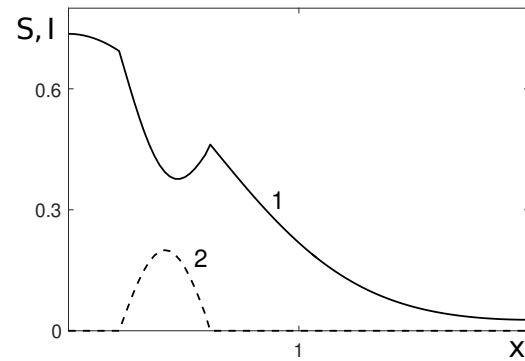
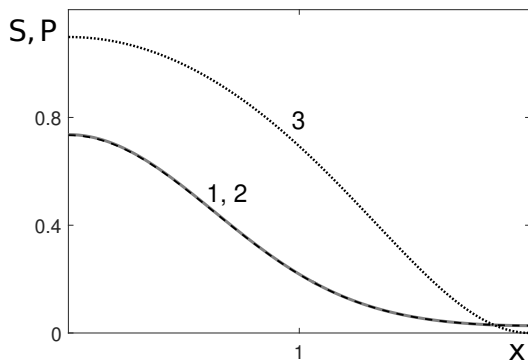
$$P(x) = \ln(\cos(\pi x/a) + 2). \quad (11)$$

Тогда для выражения в знаменателе правой части (9) справедливо следующее:

$$\int_{\Omega} e^{a_1/d_1 P} dx = \int_0^2 e^{3 \ln(\cos(\pi x/2)+2)} dx = \int_0^2 (\cos(\pi x/2) + 2)^3 dx = 22.$$

Таким образом система (1) – (4) при выполнении условий (10), (11) имеет стационарное решение

$$S = \frac{0,6}{22} e^{3P}, \quad I = 0. \quad (12)$$



**Рис. 1.** Стационарные распределения  $S$ : численное (1 – сплошная линия) и аналитическое (2 – штрих); функция неравномерности жизненных условий (3)

**Рис. 2.** Начальные распределения восприимчивых к инфекции (линия 1) и инфицированных (2)

Рис. 1 демонстрирует распределения  $S$ , найденные аналитически и численно. В качестве начальных данных в вычислительном эксперименте использовались  $S^0 = 0,3$  и  $I^0 = 0$ . Из рисунка видно, что результаты идентичны. На рис. 1 также приведено распределение функции неравномерности жизненных условий  $P(x)$ , заданное формулой (11).

В случае  $I^0 \neq 0$  получить решение аналитически затруднительно и требует численных методов, которые рассмотрены в следующем разделе.

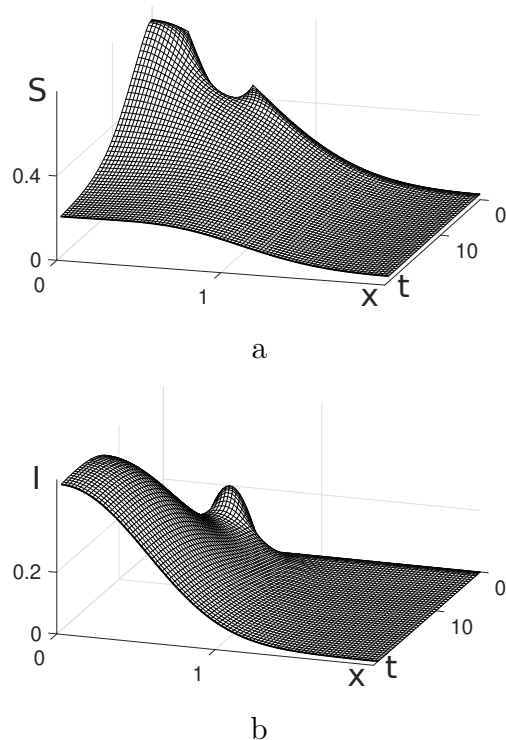


Рис. 3. Пространственно-временная динамика при  $a_1 = a_2 = 0,03$

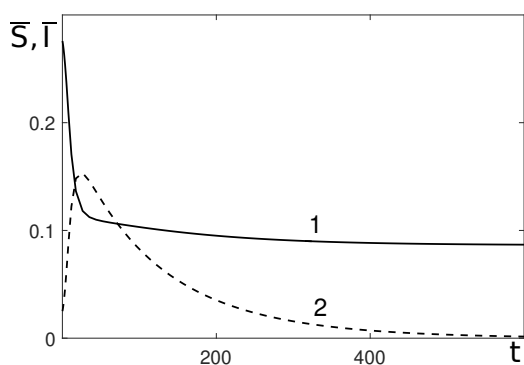


Рис. 4. Выход на стационарный режим средних плотностей восприимчивых к инфекции (линия 1) и инфицированных (2) при  $a_1 = a_2 = 0,03$

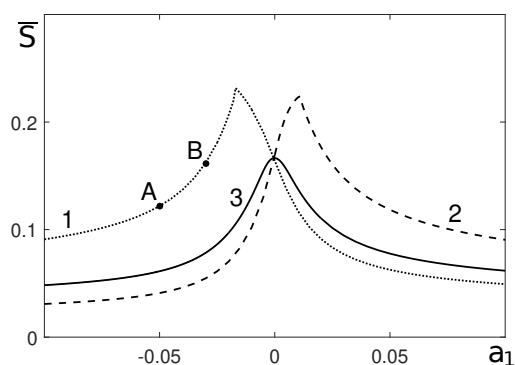


Рис. 5. Влияние параметра направленной миграции  $a_1$  на среднюю плотность восприимчивых к инфекции при  $I = 0$ :  $a_2 = 0,1$  (линия 1),  $a_2 = -0,12$  (2),  $a_2 = 0$  (3)

## 2. Численное исследование модели

Для численного решения задачи (1) – (4) применялся метод прямых с дискретизацией на основе смещенных сеток. По пространственной переменной  $x$  вводится равномерная сетка  $x_r = rh, r = 0, \dots, n, h = a/n$ . Далее через  $S_r$  и  $I_r$  обозначаются плотности в узле  $x_r$ . Для вычисления потоков  $Q_1$  и  $Q_2$  в (1) – (2) вводится вспомогательная сетка  $x_{r-1/2} = -h/2 + rh, r = 0, \dots, n + 1$ .

Далее применяются дифференциальный оператор первого порядка и оператор

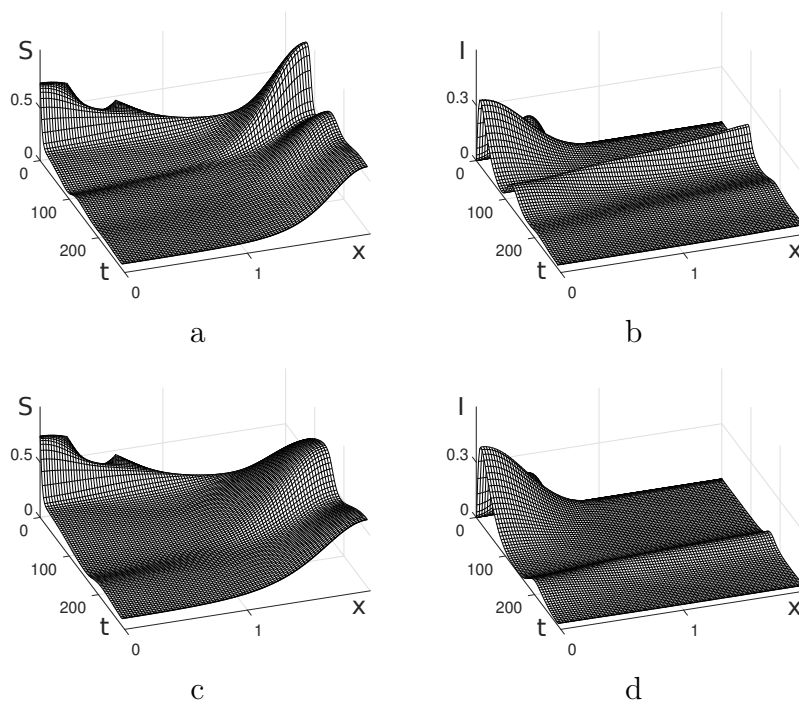


Рис. 6. Установление стационарных распределений плотностей при  $a_2 = 0, 1$ :  $a_1 = -0, 05$  (a,b),  $a_1 = -0, 03$  (c,d)

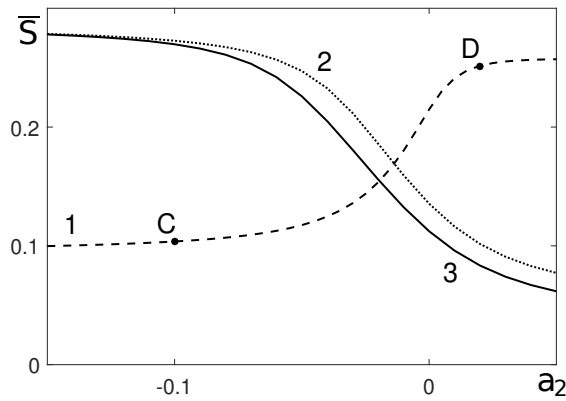
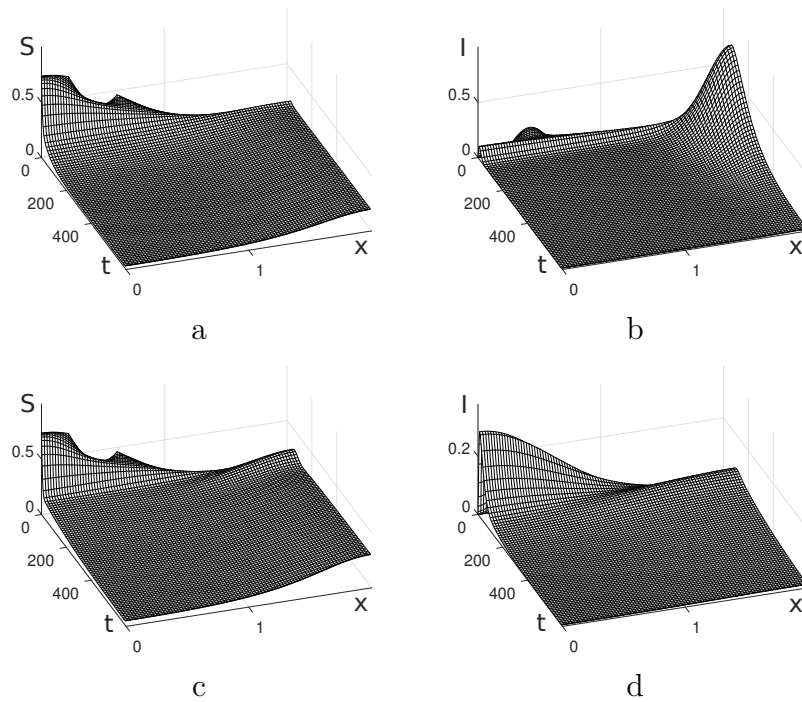


Рис. 7. Влияние параметра направленной миграции  $a_2$  на среднюю плотность восприимчивых к инфекции при  $I = 0$ :  $a_1 = -0, 02$  (линия 1),  $a_2 = 0, 06$  (2),  $a_2 = 0, 1$  (3)

вычисления среднего:

$$(\sigma w)_{r+\frac{1}{2}} = \frac{w_{r+1} - w_r}{h}, \quad (\delta w)_{r+\frac{1}{2}} = \frac{w_{r+1} + w_r}{2}.$$

Таким образом система (1) – (2) может быть записана как система обыкновенных



**Рис. 8.** Установление стационарных распределений популяций при  $a_1 = -0,02$ :  $a_2 = -0,1$  (a,b),  $a_2 = 0,02$  (c,d)

дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial S_r}{\partial t} = [-\sigma Q_1 - \beta SI + \gamma I]_r, \quad (13)$$

$$\frac{\partial I_r}{\partial t} = [-\sigma Q_2 + \beta SI - \gamma I - \theta I]_r. \quad (14)$$

Потоки  $Q_{1,r+1/2}, Q_{2,r+1/2}$  ( $r = 0, \dots, n-1$ ) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} (Q_1)_{r+1/2} &= -[d_1 \sigma S - a_2 \sigma P \delta S]_{r+1/2}, \\ (Q_2)_{r+1/2} &= -[d_2 \sigma I - a_1 \sigma P \delta I]_{r+1/2}. \end{aligned}$$

Дискретные варианты граничных условий формулируются с использованием фиктивных узлов:

$$Q_{i,-1/2} = -Q_{i,1/2}, \quad Q_{i,n+1/2} = -Q_{i,n-1/2}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Из (4) получаются начальные условия для (13) – (15):

$$S_r = S^0(x_r), \quad I_r = I^0(x_r), \quad r = 0, \dots, n.$$

Компьютерные эксперименты с полученной системой ОДУ проводились в системе MATLAB. Для интегрирования по времени применялся метод Рунге – Кутты 4-го порядка. Далее представлены результаты расчетов на ареале  $\Omega = [0, 2]$ . Вычисления проводились для различных значений параметров миграции  $a_j$ . Остальные параметры были фиксированы:

$$d_1 = 0,01, \quad d_2 = 0,01, \quad \beta = 0,6, \quad \gamma = 0,1, \quad \theta = 0,01. \quad (16)$$

Начальное распределение группы  $I$  (инфицированных) было локализовано и задавалось формулой:

$$I^0(x) = \begin{cases} 0,2 \sin \frac{5\pi x}{a}, & x \in l_v = [0, 22, 0, 61], \\ 0, & x \in \Omega \setminus l_v. \end{cases} \quad (17)$$

Начальное распределение группы восприимчивых к инфекции находилось из  $S^0 = S - I^0$ , где  $S$  соответствует (12), см. рис. 2. В качестве стимула, определяющего направленную миграцию, рассматривалась функция (11).

Рис. 3 демонстрирует пространственно-временную эволюцию плотностей восприимчивых к инфекции и инфицированных. Видно, что распределение группы  $I$  из локализованной зоны постепенно переходит на весь ареал, что приводит к заражению и снижению плотности группы  $S$ . Так как вычислительный эксперимент проводился для положительных значений  $a_1 = a_2 = 0,03$ , то распределения имеют максимальные значения в левой части ареала – наиболее благоприятной зоне, см. линия 3 на рис 1. Расчетам соответствовал временной отрезок  $t \in [0, 22]$ . На рис. 4 даны графики зависимости от времени средних по ареалу плотностей обеих групп населения –  $\bar{S}$  и  $\bar{I}$ . Видно, что на пике эпидемии ( $\max(\bar{I})$ ) средняя плотность инфицированных превышает среднюю плотность восприимчивых к инфекции, а выход на стационарный режим происходит достаточно медленно. При этом наблюдается снижение средней плотности с  $\bar{S} \approx 0,275$  до  $\bar{S} \approx 0,086$ . Полученное стационарное состояние при  $\bar{I} = 0$  соответствует *окончанию эпидемии*. Изучению влияния направленной миграции на убыль населения в результате массового заболевания посвящены следующие расчеты.

На рис. 5 даны результаты вычислительных экспериментов, выявляющих зависимость средней плотности группы восприимчивых к инфекции в момент окончания эпидемии от миграционного параметра  $a_1$ . Видно, что существует оптимальное значение  $a_1 = a_{opt}$ , соответствующее максимуму  $\bar{S}$ . При этом, в случае ненулевого  $a_2$ , выполняется неравенство  $a_{opt}a_2 < 0$ . Если реакция группы  $I$  на неравномерность жизненных условий нейтральна, то максимум  $\bar{S}$  достигается при  $a_1 = 0$  – общей точке графиков.

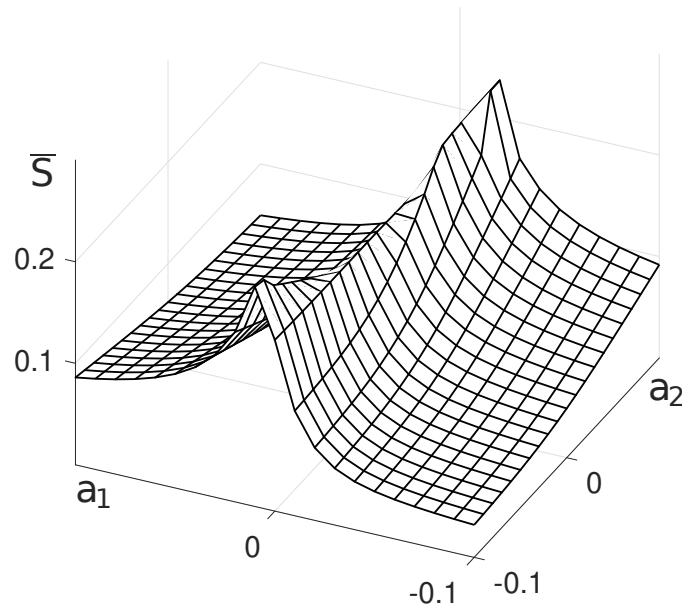
Рис. 6 демонстрирует установление распределений  $S$  и  $I$  для двух наборов миграционных параметров, отвечающих точкам А и В на рис. 5. В силу отрицательности значений  $a_1$  происходит смещение распределений  $S$  в правую (неблагоприятную) часть ареала. Сравнение динамики плотностей, представленной на рис. 6аb и рис. 6сd, показывает, что меньшему значению  $a_1$  соответствует большая концентрация в неблагоприятной зоне. Это приводит к большему росту плотности инфицированных, что оказывает влияние на финальное значение  $\bar{S}$ .

Далее изучалось влияние миграции группы  $I$  на формирование стационарных распределений. Из рис. 7 видно, что зависимости  $\bar{S}$  от  $a_2$  монотонны. При этом в случае отрицательных (положительных) значений  $a_1$  большему значению  $a_2$  соответствует большее (меньшее) значение  $\bar{S}$ . Стоит отметить, что для значений  $a_2$ , близких к границам рассматриваемой области  $a_2 \in [-0,15, 0,05]$ , влияние направленной миграции менее вариативно.

Рис. 8 демонстрирует пространственно-временную динамику  $S$  и  $I$  когда миграционные параметры соответствуют точкам С и D на рис. 7. При отрицательных  $a_1$ ,  $a_2$  наблюдается смещение обеих групп в менее благоприятную зону, что приводит к большему взаимодействию и росту числа инфицированных, см. рис. 8а b. В случае, когда  $a_1 < 0$ ,  $a_2 > 0$  происходит размежевание групп, что положительно сказывается на финальном распределении  $S$ , см. рис. 8с d.

На рис. 9 приведен график  $\bar{S}$  на плоскости миграционных параметров  $(a_1, a_2)$ . Видно, что существуют два максимума, отвечающих наиболее благоприятному окон-

чанию эпидемии. При этом наименьшим значениям  $\bar{S}$  отвечают наборы  $a_1 = a_2 = -0,1$  и  $a_1 = a_2 = 0,1$ . В этих случаях происходит максимальное для рассматриваемой области миграционных параметров стремление обеих групп населения в общие зоны ареала и, как следствие, увеличение доли заразившихся.



**Рис. 9.** Зависимость средней плотности восприимчивых к инфекции при  $I = 0$  от миграционных параметров  $a_1, a_2$

## Заключение

Рассмотрена SIS-модель, описывающая взаимодействие двух групп населения – восприимчивых к инфекции и инфицированных. Моделирование проводилось с учетом пространственной неоднородности, когда миграционные потоки обусловлены диффузией и направленной миграцией, вызванной некоторым стимулом. Установлено существование стационарного аналитического решения, соответствующего отсутствию на ареале инфицированных индивидуумов (до начала или после эпидемии). Численно исследовалось влияние направленной миграции на эпидемиологические сценарии. Выявлена взаимосвязь миграционных характеристик обеих групп населения. Установлено, что направленная миграция может существенно влиять на долю летальных исходов за время эпидемии. Связь убыли населения с миграцией инфицированных носит монотонный характер, а для миграционного параметра группы восприимчивых к инфекции существует оптимальное значение.

*Работа проводилась при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00221).*

## Литература

1. Snowden, F.M. Epidemics and Society: from the Black Death to the Present / F.M. Snowden. – New Haven: Yale university press, 2019.



2. Brauer, F. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* / F. Brauer, C. Castillo-Chavez. – New York: Springer, 2012.
3. Schlickeiser, R. *Mathematics of Epidemics: On the General Solution of SIRVD, SIRV, SIRD, and SIR Compartment Models* / R. Schlickeiser, M. Kroger // *Mathematics*. – 2024. – V. 12, № 7. – Article ID: 941.
4. Бубеев, Ю.А. Математическое моделирование распространения эпидемии covid-19 для превентивных мер защиты жизни и здоровья пожилых людей / Ю.А. Бубеев, Б.М. Владимирский, И.Б. Ушаков, В.М. Усов, А.В. Богомолов // *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. – 2021. – Т. 14, № 3. – С. 92–98.
5. Kumar, P. *A Study on Canine Distemper Virus (CDV) and Rabies Epidemics in the Red Fox Population Via Fractional Derivatives* / P. Kumar, V.S. Erturk, A. Yusuf, K.S. Nisar, S.F. Abdelwahab // *Results Physics*. – 2021. – V. 25. – Article ID: 104281.
6. Pathak, S. *Rich Dynamics of an SIR Epidemic Model* / S.Pathak, A. Maiti, G.P. Samanta // *Nonlinear Anal Model Control*. – 2010. – V. 15, № 1. – P. 71–81.
7. Sidi Ammi, M.R. *Global Stability of a Caputo Fractional SIRS Model with General Incidence Rate* / M.R. Sidi Ammi, M. Tahiri, D.F.M. Torres // *Mathematics in Computer Science*. – 2020. – V. 15. – P. 91–105.
8. Murray, J.D. *Mathematical Biology II. Spatial models and Biomedical Applications* / J.D. Murray. – New York: Springer, 2003.
9. Fitzgibbon, W.E. *A Reaction-Diffusion System Modeling Direct and Indirect Transmission of Diseases* / W.E. Fitzgibbon, M. Langlais, J.J. Morgan // *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*. – 2004. – V. 4. – P. 893–910.
10. Sidi Ammia, M.R. *Optimal Control of a Spatiotemporal SIR Model with Reaction-Diffusion Involving  $\rho$ -Laplacian Operator* / M.R. Sidi Ammia, A. Zinihi, A.A. Raedah, Y. Sabbar // *Results in Physics*. – 2023. – V. 52. – Article ID: 106895.
11. Malchow, H. *Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation* / H. Malchow, S.V. Petrovskii, E. Venturino. – London: Chapman and Hall, 2019.
12. Braverman, E. *On the Interplay of Harvesting and Various Diffusion Strategies for Spatially Heterogeneous Populations* / E. Braverman, I. Ilmer // *Journal of Theoretical Biology*. – 2019. – V. 466. – P. 106–118.
13. Tyutyunov, Y.V. *Predator Overcomes the Allee Effect Due to Indirect Prey-Taxis* / Y.V. Tyutyunov, L.I. Titova, D. Sen, M. Banerjee // *Ecological complexity*. – 2019. – V. 39. – Article ID: 100772.
14. Будянский, А.В. Влияние направленной миграции на формирование пространственных популяционных структур / А.В. Будянский, В.Г. Цибулин // *Биофизика*. – 2015. – Т. 60, № 4. – С. 758–768.
15. Frischmuth, K. *Modeling of Invasion on a Heterogeneous Habitat: Taxis and Multistability* / K. Frischmuth, A.V. Budyansky, V.G. Tsybulin // *Applied Mathematics and Computation*. – 2021. – V. 410. – Article ID: 126456.
16. Будянский, А.В. Численное исследование влияния направленной миграции неаборигенных видов на инвазивные сценарии / А.В. Будянский // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. – 2023. – Т. 33, № 4. – С. 551–562.
17. Giunta, V. *Detecting Minimum Energy States and Multi-Stability in Nonlocal Advection–Diffusion Models for Interacting Species* / V. Giunta, T. Hillen, M.A. Lewis, J.R. Potts // *Journal of Mathematical Biology*. – 2022. – V. 85, № 5. – Article ID: 56.
18. Allen, L.J.S. *Asymptotic Profiles of the Steady States for an SIS Epidemic Disease Patch Model* / L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, A.L. Nevai // *SIAM Journal on Applied mathematics*. – 2007. – V. 67. – P. 1283–1309.
19. Peng, Rui *Global Stability of the Steady States of an SIS Epidemic Reaction-Diffusion Model* / Rui Peng, Shengqiang Liu // *Nonlinear Analysis*. – 2009. – V. 71. – P. 239–247.

Александр Владимирович Будянский, кандидат физико-математических наук, кафедра «Математика и информатика», Донской государственной технической университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация), a\_v\_budyansky@mail.ru.

Поступила в редакцию 16 мая 2024 г.

MSC 35Q92

DOI: 10.14529/mmp240302

## IMPACT OF DIRECTED MIGRATION ON THE INCIDENCE OF THE POPULATION IN THE SIS MODEL

**A. V. Budyansky**, Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation, a\_v\_bydyansky@mail.ru

Mathematical model of the spread of an infectious disease, written in the form of a system of nonlinear equations of parabolic type, is considered. The spatial and temporal evolution of the densities of two population groups is studied: susceptible to infection and infected. Mutual transition from one group to another is allowed. The dynamics of densities are determined by migration flows and local interaction. Migration flows are caused by the diffusion of the population across the area and directed migration caused by some stimulus. The modeling is carried out taking into account the mortality of infected people. Computational experiments determined the role of migration factors in epidemiological scenarios.

*Keywords: mathematical modelling; epidemic; compartmental model; nonlinear PDEs; taxis.*

## References

1. Snowden F.M. *Epidemics and Society: from the Black Death to the Present*. New Haven, Yale university press, 2019.
2. Brauer F. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York, Springer, 2012.
3. Schlickeiser R., Kroger M. Mathematics of Epidemics: On the General Solution of SIRVD, SIRV, SIRD, and SIR Compartment Models. *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 7, article ID: 941. DOI: 10.3390/math12070941
4. Bubeev Yu.A., Vladimirskiy B.M., Ushakov I.B., Usov V.M., Bogomolov A.V. Mathematical Modeling of Spread COVID-19 Epidemic for Preventive Measures to Protect Life and Health of Elderly. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2021, vol. 14, no. 3, pp. 92–98. DOI: 10.14529/mmp210307
5. Kumar P., Erturk V.S., Yusuf A., Nisar K.S., Abdelwahab S.F. A Study on Canine Distemper Virus (CDV) and Rabies Epidemics in the Red Fox Population via Fractional Derivatives. *Results Physics*, 2021, vol. 25, article ID: 104281. DOI: 10.1016/j.rinp.2021.104281
6. Pathak S., Maiti A., Samanta G.P. Rich Dynamics of an SIR Epidemic Model. *Nonlinear Anal Model Control*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 71–81. DOI: 10.15388/NA.2010.15.1.14365
7. Sidi Ammi M.R., Tahiri M., Torres D.F.M. Global Stability of a Caputo Fractional SIRS Model with General Incidence Rate. *Mathematics in Computer Science*, 2021, vol. 15, pp. 91–105. DOI: 10.1007/s11786-020-00467-z
8. Murray J.D. *Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications*. New York, Springer, 2003.

9. Fitzgibbon W.E., Langlais M., Morgan J.J. A Reaction-Diffusion System Modeling Direct and Indirect Transmission of Diseases. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, 2004, vol. 4, pp. 893–910. DOI: 10.3934/dcdsb.2004.4.893
10. Sidi Ammia M.R., Zinihi A., Raezah A.A., Sabbar Y. Optimal Control of a Spatiotemporal SIR Model with Reaction-Diffusion Involving  $\rho$ -Laplacian Operator. *Results in Physics*, 2023, vol. 52, article ID: 106895. DOI: 10.1016/j.rinp.2023.106895
11. Malchow H. *Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation*. London, Chapman and Hall, 2019.
12. Braverman E., Ilmer I. On the Interplay of Harvesting and Various Diffusion Strategies for Spatially Heterogeneous Populations. *Journal of Theoretical Biology*, 2019, vol. 466, pp. 106–118. DOI: 10.1016/j.jtbi.2019.01.024
13. Tyutyunov Y.V., Titova L.I., Sen D., Banerjee M. Predator Overcomes the Allee Effect due to Indirect Prey-Taxis. *Ecological Complexity*, 2019, vol. 39, article ID: 100772. DOI: 10.1016/j.ecocom.2019.100772
14. Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Impact of Directed Migration on Formation of Spatial Structures of Populations. *Biophysics*, 2015, vol. 60, pp. 622–631. DOI: 10.1134/S0006350915040077
15. Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of Invasion on a Heterogeneous Habitat: Taxis and Multistability. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, vol. 410, article ID: 126456. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456
16. Budyansky A.V. Numerical Study of the Impact of Directed Migration of Non-Indigenous Species on Invasion Scenarios. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, no. 4, pp. 551–562. DOI: 10.35634/vm230401 (in Russian)
17. Giunta V., Hillen T., Lewis M.A., Potts J.R. Detecting Minimum Energy States and Multi-Stability in Nonlocal Advection–Diffusion Models for Interacting Species. *Journal of Mathematical Biology*, 2022, vol. 85, no. 5, article ID: 56. DOI: 10.1007/s00285-022-01824-1
18. Allen L.J.S., Bolker B.M., Lou Y., Nevai A.L. Asymptotic Profiles of the Steady States for an SIS epidemic Disease Patch Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2007, vol. 67, pp. 1283–1309. DOI: 10.1137/060672522
19. Peng Rui, Liu Shengqiang. Global Stability of the Steady States of an SIS Epidemic Reaction-Diffusion Model. *Nonlinear Analysis*, 2009, vol. 71, pp. 239–247. DOI: 10.1016/j.na.2008.10.043

*Received May 16, 2024*