

МОБИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЯ В ГЕОЭЛЕКТРИКЕ
(ЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ)*П.Н. Александров¹, М.Л. Владов², В.Н. Кризский³*¹Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва,
Российская Федерация²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва,
Российская Федерация³Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II,
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Исследуется влияние скорости перемещения системы наблюдения на результаты измерений электромагнитного поля. Актуальность этого исследования продиктована все более широким использованием мобильных систем наблюдения в геоэлектрике и необходимостью изучения возможности использования движущихся систем наблюдения при исследовании строения геоэлектрической среды. В общем виде получены уравнения Максвелла в случае движущихся как источников, так и приемников электромагнитного поля в частотной области. Также получены граничные условия.

Рассмотрены три важных случая. В первом случае рассматривается закрепленный приемник и движущийся источник электромагнитного поля. Во втором – движущийся приемник и закрепленный источник. Третий случай, имеющий наиболее важное значение для практики геофизических исследований, основан на фиксировании расстояния между источником и приемником, и движении такой измерительной установки над неоднородной средой. Исследования иллюстрированы конкретными расчетами, основанными на решениях прямых задач для уравнений Максвелла в рассмотренных случаях. На основе теоретических исследований и математического моделирования показан характер влияния скорости перемещения системы наблюдения на результаты измерений электромагнитного поля.

Ключевые слова: движущиеся системы наблюдения; георадар; прямые задачи электродинамики.

Введение

Развитие мобильных систем геофизических наблюдений (например, аэро- и автомобильные варианты электроразведки, аэромагниторазведка и др.) требует исследования проблемы влияния движения приемников и источников на результаты измерений. Проблема учета скорости перемещения приемника появляется в случае, если система наблюдения поля за время измерения перемещается на расстояние, на котором градиентом поля уже нельзя пренебречь, или когда на измерения оказывают влияние движущиеся проводящие конструкции измерительной системы.

Пусть некоторое поле H , являющееся функцией пространственной координаты x' , и времени t , измеряется в движении (рис. 1). В этом случае пространственная координата x' , связанная с движущимся приемником, является функцией времени, заданной, например, в виде $x' = x + S(t)$, где x – независимая пространственная координата, связанная с неподвижной системой координат (например, с Землей).

Если измерение происходит в интервале времени $\Delta t = t_2 - t_1$, то разность величин поля в начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени, отнесенная к этому интервалу

времени Δt , представляет собой оценку полной производной по времени поля H , которую в дальнейшем будем рассматривать как производную сложной функции [1]

$$\frac{dH}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(x + S(t_2), t_2) - H(x + S(t_1), t_1)}{\Delta t} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + V \frac{\partial \bar{H}}{\partial x},$$

где $\xi \in [t_1, t_2]$; $V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ – скорость координаты точки измерения; $H(x', t) = H(x + S(t), t) = \bar{H}(x, t) = \bar{H}$ – новая функция независимых переменных x и t . Здесь x имеет смысл независимой пространственной переменной в неподвижной системе координат. Заметим, что частная производная $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$ совпадает с производной $\frac{\partial H}{\partial t}$ при фиксированной (неподвижной, $V = 0$) координате точки измерения; частная производная $\frac{\partial H}{\partial x}$ совпадает с производной по координате x' : $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial x}$. Поле \bar{H} соответствует полю, отнесенному к фиксированной пространственной координате (неподвижной системе пространственных координат) для движущегося приемника.

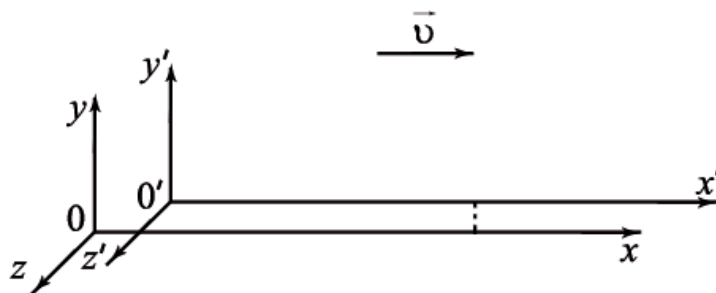


Рис. 1. Схематическое изображение движущейся системы наблюдения относительно неподвижной

В декартовой системе координат в трехмерном пространстве данный результат будет выражаться через градиент поля $H = H(x', y', z', t) = H(x + S_x(t), y + S_y(t), z + S_z(t), t)$ в виде $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} H + \text{grad} H \cdot \mathbf{V}$, где $\mathbf{V} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} S_x + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial t} S_y + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t} S_z$ – скорость движения точки наблюдения вдоль траектории, где осуществляется наблюдение и измерение поля H .

Можно выделить два подхода к описанию движущихся систем наблюдения. Первый описывает движение наблюдателя вместе с приемником и формально описывается уравнениями Максвелла в движущейся системе отсчета. Этот подход хорошо исследован в классических работах по электродинамике [2–5]. Однако подход, изложенный в указанных работах, не удобен в геофизических приложениях, поскольку при практических геофизических исследованиях результаты измерения электромагнитного поля относятся к точке наблюдения в системе координат, которая связана с неподвижной землей.

Под движущейся системой наблюдения будем понимать изменение положения источника и (или) приемника электромагнитного поля с течением времени, которое характеризуется скоростью перемещения как источника, так и приемника.

Прежде всего отметим, что физическим смыслом обладают интегральные уравнения теории электродинамики [6, 7]. Дифференциальные их аналоги, являющиеся следствием интегральных, позволяют решать прямые и обратные задачи в аналитическом виде, используя богатый арсенал методов решений дифференциальных уравнений. Дифференциальные аналоги не имеют физического смысла, поскольку невозможно измерять электромагнитное поле в точке, так как реальные физические приборы

имеют конечные размеры. Тем не менее, всегда можно перейти к электромагнитным полям, имеющим физический смысл, рассматривая конечность размеров источников и приемников, т. е. при интегрировании по объемам источников и приемников этих полей, а также по времени, учитывая быстродействие работы регистраторов электромагнитных полей.

Электромагнитное поле в декартовой системе координат (x', y', z') подчиняется уравнениям Максвелла [8].

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d}{dt}\mathbf{D} + \mathbf{J}^{st}, \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{d}{dt}\mathbf{B}, \operatorname{div}\mathbf{D} = q, \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

где в декартовой системе координат $\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$ и $\mathbf{H} = \mathbf{i}H_x + \mathbf{j}H_y + \mathbf{k}H_z$ – векторы напряженности, соответственно, электрического и магнитного полей, q – плотность электрических зарядов; $\mathbf{J}^{st} = \mathbf{J}^{st}(x', y', z', x^s, y^s, z^s)$ – плотность стороннего электрического тока; \mathbf{D} и \mathbf{B} – векторы индукции, соответственно, электрического и магнитного полей.

Эти уравнения Максвелла в дифференциальной форме порождаются интегральными уравнениями [9]. Они же могут быть получены из уравнений Лоренца для микрополей [10]. Отметим, что в уравнения Лоренца не входят электропроводность, относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме (1) появляются в результате пространственно-временного осреднения уравнений для микрополей по физически конечно-малому объёму [5].

Полная производная, присутствующая в уравнениях (1), возникает вследствие того, что индукции магнитного и электрического полей могут иметь различное происхождение, в том числе и в результате движения среды. Таким образом, в макроскопических уравнениях Максвелла (1) производные по пространственным координатам являются частными производными, в отличие от производной по времени t , которая является полной производной.

Представим решение уравнений Максвелла (1) в виде

$$\mathbf{E}(r', r^s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(r', r^s, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{H}(r', r^s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{H}}(r', r^s, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

где $r' = \{x', y', z'\}$ – координаты точки приемника, $r^s = \{x^s, y^s, z^s\}$ – координаты точки источника, ω – частота.

В случае движущихся источников и приемников эти решения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r'(t), r^s(t), t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(r'(t), r^s(t), \omega) e^{i\omega t} d\omega, \\ \mathbf{H}(r'(t), r^s(t), t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{H}}(r'(t), r^s(t), \omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

где в принципе разные траектории движения источника и приемника заданы выражениями $\begin{cases} x^s = x^s(t) = x + F_x(t) \\ y^s = y^s(t) = y + F_y(t) \\ z^s = z^s(t) = z + F_z(t) \end{cases}, \begin{cases} x' = x'(t) = x + S_x(t) \\ y' = y'(t) = y + S_y(t) \\ z' = z'(t) = z + S_z(t) \end{cases}$.

Материальными параметрами сплошной среды являются σ , ε , μ – соответственно удельная электропроводность, диэлектрическая и магнитная проницаемости, которые будем рассматривать диспергирующими (зависят от частоты ω) электромаг-

нитными величинами, описываемыми тензорами второго ранга. В рамках линейной модели среды они являются матрицами-функциями частоты ω .

Для диспергирующих сред материальные уравнения, с учетом (2) и (3) примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(r', r^s, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(r', t - \tau) \mathbf{E}(r', r^s, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(r', -\omega) \check{\mathbf{E}}(r', r^s, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \check{\mathbf{J}} e^{i\omega t} d\omega; \\ \mathbf{D}(r', r^s, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(r', t - \tau) \mathbf{E}(r', r^s, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(r', -\omega) \check{\mathbf{E}}(r', r^s, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \check{\mathbf{D}} e^{i\omega t} d\omega; \\ \mathbf{B}(r', r^s, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(r', t - \tau) \mathbf{H}(r', r^s, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(r', -\omega) \check{\mathbf{H}}(r', r^s, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \check{\mathbf{B}} e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Как следует из этих уравнений, электромагнитные параметры (матрицы) как функции частоты входят в материальные уравнения, в частотной области как комплексно-сопряженные величины, поскольку, согласно свойствам преобразования Фурье, спектр некоторой функции частоты обладает свойством $f(-\omega) = f^*(\omega)$, где $*$ – комплексное сопряжение.

Рассмотрим полную производную по времени от токов смещения:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{D}(r', r^s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{i\omega \check{\mathbf{D}} + \mathbf{V} \operatorname{div}(\check{\mathbf{D}}) + \operatorname{rot}(\check{\mathbf{D}} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{D}}\} e^{i\omega t} d\omega.$$

Здесь rot , div – дифференциальные операторы по координатам приемника (точке наблюдения) x', y', z' ; grad – дифференциальный оператор по координатам источника x^s, y^s, z^s ; $\mathbf{V} = \mathbf{i} \frac{\partial x'(t)}{\partial t} + \mathbf{j} \frac{\partial y'(t)}{\partial t} + \mathbf{k} \frac{\partial z'(t)}{\partial t} = \mathbf{i} \frac{\partial S_x(t)}{\partial t} + \mathbf{j} \frac{\partial S_y(t)}{\partial t} + \mathbf{k} \frac{\partial S_z(t)}{\partial t}$ – вектор скорости движения приемника, $\mathbf{V}^s = \mathbf{i} \frac{\partial x^s(t)}{\partial t} + \mathbf{j} \frac{\partial y^s(t)}{\partial t} + \mathbf{k} \frac{\partial z^s(t)}{\partial t} = \mathbf{i} \frac{\partial F_x(t)}{\partial t} + \mathbf{j} \frac{\partial F_y(t)}{\partial t} + \mathbf{k} \frac{\partial F_z(t)}{\partial t}$ – вектор скорости движения источника.

Аналогично получим и для полной производной по времени от индукции магнитного поля:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B}(r', r^s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{i\omega \check{\mathbf{B}} + \mathbf{V} \operatorname{div}(\check{\mathbf{B}}) + \operatorname{rot}(\check{\mathbf{B}} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{B}}\} e^{i\omega t} d\omega.$$

Подставим выражения для напряженностей электрического и магнитного полей в уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{rot} \check{\mathbf{H}} - \check{\mathbf{J}} - \{i\omega \check{\mathbf{D}} + \mathbf{V} \operatorname{div}(\check{\mathbf{D}}) + \operatorname{rot}(\check{\mathbf{D}} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{D}}\} - \check{\mathbf{J}}^{st}) e^{i\omega t} d\omega = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{rot} \check{\mathbf{E}} + \{i\omega \check{\mathbf{B}} + \mathbf{V} \operatorname{div}(\check{\mathbf{B}}) + \operatorname{rot}(\check{\mathbf{B}} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{B}}\}) e^{i\omega t} d\omega = 0, \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{div} \check{\mathbf{D}} - \check{q}) e^{i\omega t} d\omega = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} \check{\mathbf{B}} e^{i\omega t} d\omega = 0.$$

В силу произвольности выбора $e^{i\omega t}$ из последней системы уравнений следует система уравнений Максвелла в частотной области:

$$\operatorname{rot} \check{\mathbf{H}} = \check{\mathbf{J}} + i\omega \check{\mathbf{D}} + \mathbf{V} \operatorname{div}(\check{\mathbf{D}}) + \operatorname{rot}(\check{\mathbf{D}} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{D}} + \check{\mathbf{J}}^{st}, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \check{\mathbf{E}} = -i\omega \check{\mathbf{B}} - \mathbf{V} \operatorname{div}(\check{\mathbf{B}}) - \operatorname{rot}(\check{\mathbf{B}} \times \mathbf{V}) - (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{B}}, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{D}} = \check{q}, \operatorname{div} \check{\mathbf{B}} = 0,$$

где $\check{\mathbf{E}} = \check{\mathbf{E}}(r', r^s, \omega)$, $\check{\mathbf{H}} = \check{\mathbf{H}}(r', r^s, \omega)$, $\check{\mathbf{J}} = \sigma(r', -\omega) \check{\mathbf{E}}(r', r^s, \omega) = \check{\sigma} \check{\mathbf{E}}$, $\check{\mathbf{D}} = \varepsilon(r', -\omega) \check{\mathbf{E}}(r', r^s, \omega) = \check{\varepsilon} \check{\mathbf{E}}$, $\check{\mathbf{B}} = \mu(r', -\omega) \check{\mathbf{H}}(r', r^s, \omega) = \check{\mu} \check{\mathbf{H}}$, $\mathbf{V} = \mathbf{i} \frac{\partial x'(t)}{\partial t} + \mathbf{j} \frac{\partial y'(t)}{\partial t} + \mathbf{k} \frac{\partial z'(t)}{\partial t}$, $\mathbf{V}^s = \mathbf{i} \frac{\partial x^s(t)}{\partial t} + \mathbf{j} \frac{\partial y^s(t)}{\partial t} + \mathbf{k} \frac{\partial z^s(t)}{\partial t}$. После некоторых преобразований уравнения (4) и (5) примут вид $\operatorname{rot}(\check{\mathbf{H}} - \check{\mathbf{D}} \times \mathbf{V}) = \check{\sigma} \check{\mathbf{E}} + i\omega \check{\varepsilon} \check{\mathbf{E}} + \mathbf{V} \check{q} + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{D}} + \check{\mathbf{J}}^{st}$, $\operatorname{rot}(\check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{B}} \times \mathbf{V}) = -i\omega \check{\mu} \check{\mathbf{H}} - (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{B}}$.

Введем обозначение

$$\mathbf{H}' = \check{\mathbf{H}} - \check{\mathbf{D}} \times \mathbf{V}, \mathbf{E}' = \check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{B}} \times \mathbf{V} \quad (6)$$

и запишем уравнения Максвелла относительно введенных таким образом штрихованных полей. Для этого рассмотрим $\mathbf{E}' = \check{\mathbf{E}} + \check{\mu} \check{\mathbf{H}} \times \mathbf{V} = ([1] - \check{\mu} \check{\varepsilon} |\mathbf{V}|^2) \check{\mathbf{E}} + \check{\mu} \mathbf{H}' \times \mathbf{V} - \check{\mu} \check{\varepsilon} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}')$, где $[1]$ – единичная матрица размерности 3×3 и учтено свойство скалярного умножения векторов $\mathbf{V} \cdot \check{\mathbf{E}} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{E}' + \check{\mathbf{B}} \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}'$. В итоге $\check{\mathbf{E}} = ([1] - \check{\mu} \check{\varepsilon} |\mathbf{V}|^2)^{-1} \mathbf{E}' - ([1] - \check{\mu} \check{\varepsilon} |\mathbf{V}|^2)^{-1} (\check{\mu} \mathbf{H}' \times \mathbf{V}) + ([1] - \check{\mu} \check{\varepsilon} |\mathbf{V}|^2)^{-1} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \check{\varepsilon} \mathbf{E}')$. Аналогично получим для магнитного поля:

$$\check{\mathbf{H}} = ([1] - \check{\varepsilon} \check{\mu} |\mathbf{V}|^2)^{-1} \mathbf{H}' + ([1] - \check{\varepsilon} \check{\mu} |\mathbf{V}|^2)^{-1} (\check{\varepsilon} \mathbf{E}' \times \mathbf{V}) + ([1] - \check{\varepsilon} \check{\mu} |\mathbf{V}|^2)^{-1} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \check{\mu} \mathbf{H}').$$

Тогда уравнения Максвелла примут вид: $\operatorname{rot}(\check{\mathbf{H}} - \check{\mathbf{D}} \times \mathbf{V}) = \operatorname{rot} \mathbf{H}' = (\check{\sigma} + i\omega \check{\varepsilon}) ([1] - \check{\varepsilon} \check{\mu} |\mathbf{V}|^2)^{-1} (\mathbf{E}' - \check{\mu} \mathbf{H}' \times \mathbf{V} + \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \check{\varepsilon} \mathbf{E}')) + \mathbf{V} \check{q} + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{D}} + \check{\mathbf{J}}^{st}$,

$$\operatorname{rot}(\check{\mathbf{E}} + \check{\mathbf{B}} \times \mathbf{V}) = \operatorname{rot} \mathbf{E}' = -i\omega \check{\mu} ([1] - \check{\mu} \check{\varepsilon} |\mathbf{V}|^2)^{-1} (\mathbf{H}' + \check{\varepsilon} \mathbf{E}' \times \mathbf{V} + \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \check{\mu} \mathbf{H}')) - (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{B}}.$$

В общем случае $\check{\mu} \check{\varepsilon} \neq \check{\varepsilon} \check{\mu}$. Представим $\check{\mu} \check{\varepsilon} = v[d]v^{-1}$, где d – диагональная матрица собственных значений матрицы $\check{\mu} \check{\varepsilon}$, v – матрица, составленная из ее собственных векторов. Тогда $([1] - \check{\mu} \check{\varepsilon} |\mathbf{V}|^2) = ([1] - v[d]v^{-1} |\mathbf{V}|^2) = v([1] - [d] \mathbf{V}^2) v^{-1}$. В случае $[d] |\mathbf{V}|^2 \ll [1]$ получим $v([1] - [d] \mathbf{V}^2) v^{-1} = v([1]) v^{-1} = [1]$.

Аналогично справедливо для $([1] - \check{\varepsilon} \check{\mu} |\mathbf{V}|^2)$. Тогда уравнения Максвелла примут вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = (\check{\sigma} + i\omega \check{\varepsilon}) (\mathbf{E}' - \check{\mu} \mathbf{H}' \times \mathbf{V} + \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \check{\varepsilon} \mathbf{E}')) + \mathbf{V} \check{q} + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad}) \check{\mathbf{D}} + \check{\mathbf{J}}^{st},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = -i\omega\check{\mu}(\mathbf{H}' + \check{\varepsilon}\mathbf{E}' \times \mathbf{V} + \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \check{\mu}\mathbf{H}')) - (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad})\check{\mathbf{B}}.$$

Обозначим $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y + \mathbf{k}V_z$, $\mathbf{E}' = \mathbf{i}E'_x + \mathbf{j}E'_y + \mathbf{k}E'_z$, $\check{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \check{\varepsilon}_{xx} & \check{\varepsilon}_{xy} & \check{\varepsilon}_{xz} \\ \check{\varepsilon}_{yx} & \check{\varepsilon}_{yy} & \check{\varepsilon}_{yz} \\ \check{\varepsilon}_{zx} & \check{\varepsilon}_{zy} & \check{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix}$. Тогда

явный вид будет иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \check{\varepsilon}\mathbf{E}') = \\ = & \begin{pmatrix} V_x^2\check{\varepsilon}_{xx} + V_xV_y\check{\varepsilon}_{yx} + V_xV_z\check{\varepsilon}_{zx} & V_x^2\check{\varepsilon}_{xy} + V_xV_y\check{\varepsilon}_{yy} + V_xV_z\check{\varepsilon}_{zy} & V_x^2\check{\varepsilon}_{xz} + V_xV_y\check{\varepsilon}_{yz} + V_xV_z\check{\varepsilon}_{zz} \\ V_yV_x\check{\varepsilon}_{xx} + V_y^2\check{\varepsilon}_{yx} + V_yV_z\check{\varepsilon}_{zx} & V_yV_x\check{\varepsilon}_{xy} + V_y^2\check{\varepsilon}_{yy} + V_yV_z\check{\varepsilon}_{zy} & V_yV_x\check{\varepsilon}_{xz} + V_y^2\check{\varepsilon}_{yz} + V_yV_z\check{\varepsilon}_{zz} \\ V_zV_x\check{\varepsilon}_{xx} + V_zV_x\check{\varepsilon}_{yx} + V_z^2\check{\varepsilon}_{zx} & V_zV_x\check{\varepsilon}_{xy} + V_zV_x\check{\varepsilon}_{yy} + V_z^2\check{\varepsilon}_{zy} & V_zV_x\check{\varepsilon}_{xz} + V_zV_x\check{\varepsilon}_{yz} + V_z^2\check{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = S\mathbf{E}', \end{aligned}$$

где $S = S(\mathbf{V}, \check{\varepsilon})$.

Для магнитной проницаемости $\check{\mu} = \begin{pmatrix} \check{\mu}_{xx} & \check{\mu}_{xy} & \check{\mu}_{xz} \\ \check{\mu}_{yx} & \check{\mu}_{yy} & \check{\mu}_{yz} \\ \check{\mu}_{zx} & \check{\mu}_{zy} & \check{\mu}_{zz} \end{pmatrix}$ получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \check{\mu}\mathbf{H}') = \\ = & \begin{pmatrix} V_x^2\check{\mu}_{xx} + V_xV_y\check{\mu}_{yx} + V_xV_z\check{\mu}_{zx} & V_x^2\check{\mu}_{xy} + V_xV_y\check{\mu}_{yy} + V_xV_z\check{\mu}_{zy} & V_x^2\check{\mu}_{xz} + V_xV_y\check{\mu}_{yz} + V_xV_z\check{\mu}_{zz} \\ V_yV_x\check{\mu}_{xx} + V_y^2\check{\mu}_{yx} + V_yV_z\check{\mu}_{zx} & V_yV_x\check{\mu}_{xy} + V_y^2\check{\mu}_{yy} + V_yV_z\check{\mu}_{zy} & V_yV_x\check{\mu}_{xz} + V_y^2\check{\mu}_{yz} + V_yV_z\check{\mu}_{zz} \\ V_zV_x\check{\mu}_{xx} + V_zV_x\check{\mu}_{yx} + V_z^2\check{\mu}_{zx} & V_zV_x\check{\mu}_{xy} + V_zV_x\check{\mu}_{yy} + V_z^2\check{\mu}_{zy} & V_zV_x\check{\mu}_{xz} + V_zV_x\check{\mu}_{yz} + V_z^2\check{\mu}_{zz} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} H'_x \\ H'_y \\ H'_z \end{pmatrix} = M\mathbf{H}', \end{aligned}$$

где $M = M(\mathbf{V}, \check{\mu})$.

Уравнения Максвелла можно переписать в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}' = \sigma\mathbf{E}' + \alpha\mathbf{H}' + \mathbf{J}^{ext}, \quad \mathbf{J}^{ext} = \mathbf{V}\check{q} + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad})\check{\mathbf{D}} + \check{\mathbf{J}}^{st}, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = -i\omega\check{\mu}\mathbf{H}' - i\omega\beta\mathbf{E}' + \mathbf{B}^{ext}, \quad \mathbf{B}^{ext} = -(\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad})\check{\mathbf{B}}.$$

Как следует из анализа полученных уравнений, в случае отличия от нуля скоростей источника \mathbf{V}^s и приемника \mathbf{V} принцип взаимности нарушается. В зависимости от направления движения источника и приемника, например в прямом и обратном ходе измерительной установки, распространение электромагнитного поля в пространстве во взаимодействии со сплошной средой будет различаться. Таким образом, получены уравнения Максвелла для случая произвольного движения источников и приемников.

Эту систему уравнений необходимо дополнить граничными условиями, которые, как следует из [9, 11], сводятся к непрерывности нормальных составляющих векторов $\check{\mathbf{D}}$ и $\check{\mathbf{B}}$ и тангенциальных составляющих векторов $\check{\mathbf{E}}$ и $\check{\mathbf{H}}$ для сред с номерами 1 и 2, сочленяемых на границе с нормалью \mathbf{n} , из которых следует (здесь будем рассматривать только скалярный случай электромагнитных параметров – случай изотропных и однородных сред):

– из условия $\operatorname{div}\check{\mathbf{D}} = \check{q}$ следует $(\mathbf{n} \cdot \check{\mathbf{D}}_1) - (\mathbf{n} \cdot \check{\mathbf{D}}_2) = \check{q}_s$, где \check{q}_s – поверхностная плотность электрических зарядов;

– в отсутствие поверхностных магнитных зарядов из условия $\operatorname{div}\check{\mathbf{B}} = 0$ получим $(\mathbf{n} \cdot \check{\mathbf{B}}_1) - (\mathbf{n} \cdot \check{\mathbf{B}}_2) = 0$; $\mathbf{n} \times [\mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}'_2] = -(\check{\mu}_1 - \check{\mu}_2) [\mathbf{n} \times \check{\mathbf{H}}_2] \times \mathbf{V}$, где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе раздела сред.

Из (6) следует $\check{\mathbf{H}} \times \mathbf{V} = [\check{\mathbf{H}}' + \check{\mathbf{D}} \times \mathbf{V}] \times \mathbf{V} = \check{\mathbf{H}}' \times \mathbf{V}$, $\check{\mathbf{E}} \times \mathbf{V} = [\mathbf{E}' - \check{\mathbf{B}} \times \mathbf{V}] \times \mathbf{V} = \mathbf{E}' \times \mathbf{V}$. Тогда окончательно $\mathbf{n} \times [\mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}'_2] = -(\check{\mu}_1 - \check{\mu}_2) [\mathbf{n} \times \check{\mathbf{H}}'_1] \times \mathbf{V} = -(\check{\mu}_1 - \check{\mu}_2) [\mathbf{n} \times \check{\mathbf{H}}'_2] \times \mathbf{V}$. Здесь $\check{\mu}_1, \check{\varepsilon}_1$ и $\check{\mu}_2, \check{\varepsilon}_2$ – электромагнитные параметры соответственно первой и второй сочленяемых однородных и изотропных сред. Для магнитного поля, с учетом (6), аналогично получим $\mathbf{n} \times [\check{\mathbf{H}}'_1 - \check{\mathbf{H}}'_2] = (\check{\varepsilon}_1 - \check{\varepsilon}_2) [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_2] \times \mathbf{V}$.

Таким образом, получены уравнения Максвелла в случае движущихся систем наблюдения (источников и приемников) электромагнитного поля в общем виде. Следуя принципу «от общего к частному», рассмотрим частные случаи, вытекающие из общего анализа полученных уравнений, представляющие интерес для методов геоэлектрики с использованием мобильных систем наблюдения. При этом проиллюстрируем влияние скорости перемещения системы наблюдения на конкретных вычислительных примерах.

Случай 1. $\mathbf{V} = 0, \mathbf{V}^s \neq 0$ (закрепленные приемники, движущиеся источники)

В рассматриваемом случае уравнения Максвелла с учетом $\check{\mathbf{H}}' = \check{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{E}' = \check{\mathbf{E}}$, будут иметь вид

$$\operatorname{rot}\check{\mathbf{H}} = (\check{\sigma} + i\omega\check{\varepsilon})\check{\mathbf{E}} + (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad})\check{\mathbf{D}} + \check{\mathbf{J}}^{st}, \operatorname{rot}\check{\mathbf{E}} = -i\omega\check{\mu}\check{\mathbf{H}} - (\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad})\check{\mathbf{B}}. \quad (8)$$

Данная система уравнений описывает закрепленный приемник и движущийся источник. Такая ситуация возникает, например, при изучении геодинамических процессов [12]. Основой ее являются необратимые деформации горной породы, связанные с процессами трещинообразования. Каждая трещина при ее образовании является источником не только сейсмического, но и электромагнитного поля. Совокупность появляющихся трещин в разные моменты времени в разных точках пространства, при определенных обстоятельствах приводит к появлению фиктивного движущегося источника электромагнитного поля. На этом основан электромагнитный мониторинг геодинамических процессов [12–14]. Одно из следствий анализа распространения электромагнитного поля от движущегося источника приводит к эффекту Доплера в проводящих средах [15], что имеет самостоятельное значение.

Движущиеся источники электромагнитного поля

В этом случае выражения $(\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad})\check{\mathbf{D}}$ и $(\mathbf{V}^s \cdot \operatorname{grad})\check{\mathbf{B}}$ в уравнениях (8) будут отсутствовать. Тогда сторонняя плотность электрического тока будет описываться выражением

$$\mathbf{J}^{st} = \mathbf{J}^{st}(x - x^s, y - y^s, z - z^s, t) = \mathbf{k}I \sum_{j=1}^N \delta(x) \delta(y) \delta(z - z^s(t_j)) \delta(t - t_j),$$

где t_j меняется от $-T$ до T с шагом Δt , $z^s(t_j) = V_z^s t_j$, I – сила тока в источнике (в дальнейшем $I = 1 \text{ A/m}^2$), N – количество источников, δ – дельта-функция Дирака. В

частотной области сторонний электрический ток будет иметь вид

$$\widetilde{\mathbf{J}}^{st} = \widetilde{\mathbf{J}}^{st}(x - x^s, y - y^s, z - z^s, \omega) = \mathbf{k}I \sum_{j=1}^N \delta(x)\delta(y)\delta(z - V_z^s t_j) e^{i\omega t_j}.$$

В теории электродинамики фундаментальную роль играет функция Грина уравнений Максвелла для однородного пространства, на основе которой исследуем влияние скорости движения источника на результат измерения поля в неподвижной точке наблюдения.

Рассмотрим плоское поле (пространственные производные по координатам x и y либо равны нулю, либо заменяем производные по этим координатам пространственными частотами с использованием разложения по плоским волнам), которое удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z - k^2 E_z = I \sum_{j=1}^N \delta(z - V_z^s t_j) e^{i\omega t_j}, \quad (9)$$

где $k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0}$ – волновое число среды – однородного пространства с параметрами $\mu_0, \sigma_0, \varepsilon_0$.

Функция Грина этого уравнения хорошо известна и имеет вид

$$G = \begin{cases} \frac{e^{-k(z-z_j)}}{2k}, & z > z_j, \\ \frac{e^{k(z-z_j)}}{2k}, & z < z_j \end{cases}, \operatorname{Re}(k) > 0.$$

Тогда решение уравнения (9) при $z > V_z^s t_j$ примет вид

$$E_z = \frac{I}{2k} \sum_{j=1}^N e^{-k(z-V_z^s t_j)} e^{i\omega t_j} = \frac{I}{2k} e^{-kz} \sum_{j=1}^N e^{(i\omega+kV_z^s)t_j}. \quad (10)$$

Для случая $z < V_z^s t_j$, $E_z = \frac{I}{2k} \sum_{j=1}^N e^{k(z-V_z^s t_j)} e^{i\omega t_j} = \frac{I}{2k} e^{kz} \sum_{j=1}^N e^{(i\omega-kV_z^s)t_j}$.

В случае неподвижного источника ($V_z^s = 0$) получим $E_z = \frac{I}{2k} e^{kz} \sum_{j=1}^N e^{i\omega t_j}$, т. е. частота поля E_z вне источников не меняется. В противном случае (при $V_z^s \neq 0$), согласно (10), частота поля будет зависеть от направления движения источника, т. е. от знака скорости V_z^s : при движении источника в направлении точки измерения частота поля E_z будет увеличиваться, в обратном – уменьшаться. Этот эффект аналогичен эффекту Доплера в акустике [16].

Этот вывод следует из того, что в проводящей среде волновое число является комплексной величиной $k = k'' + ik'$, $k'' > 0$. Тогда для каждого источника под знаком суммы $e^{(i\omega-kV_z^s)t_j} = e^{(i\omega-(k''+ik')V_z^s)t_j} = e^{i(\omega-k'V_z^s)t_j} e^{-k''V_z^s t_j}$. Как следует из последнего выражения при $V_z^s < 0$ и $t_j > 0$ частота поля увеличивается и амплитуда возрастает. В противном случае при $V_z^s > 0$ частота поля уменьшается и амплитуда падает. Сомножитель $e^{-k''V_z^s t_j}$ определяет увеличение или уменьшение поля в зависимости от направления движения источника.

На основе вычислительного эксперимента исследуем изменение спектрального состава регистрируемого сигнала в точке наблюдения в случае движущегося источника со скоростью $V_z^s = 10$ м/с на небольшом отрезке пути и широкого диапазона частот.

На рис. 2 представлены результаты расчетов для случая перемещения источника в проводящем пространстве на расстояние 2 м (от -1 м до 1 м), приемник находится на расстоянии 10 м от начала координат, диапазон частот от $5,6549 \cdot 10^3$ Гц до $5,6549 \cdot 10^5$ Гц.

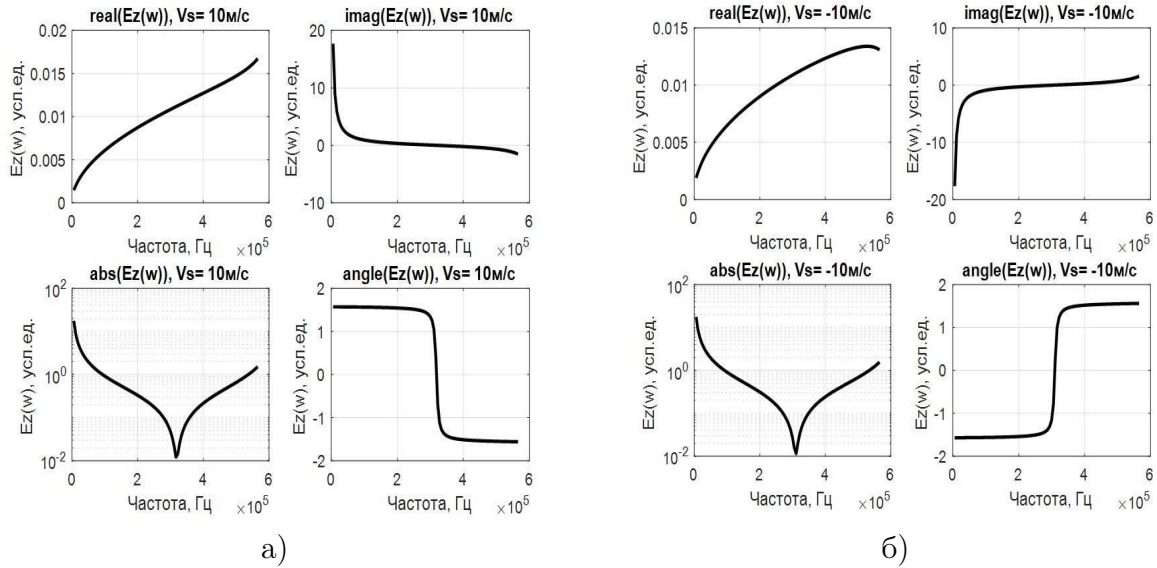


Рис. 2. Результаты расчетов спектра сигнала для случая перемещения источника на расстояние 2 м (от -1 м до 1 м), приемник находится на расстоянии 10 м от начала координат, слева – положительная скорость (а), справа – отрицательная (б). Левый верхний рисунок – действительная часть поля E_z , правый верхний – мнимая часть поля E_z , нижний левый – модуль поля E_z , нижний правый – фаза поля E_z

Особый интерес представляет движение источника, описываемое выражением

$$\mathbf{J}^{st} = \mathbf{k}I \sum_{j=1}^N (-1)^j \delta(z - z^s(t_j)) \delta(t - t_j), \quad (11)$$

т. е. при перемещении источника меняется знак излучаемого поля. Тогда решение уравнений (9) для монохроматического поля E_z для первых двух источников и при малых $\Delta t = t_2 - t_1$ примет вид

$$E_z = E_z(x - x^s(t_2), y, z, \omega) e^{i\omega t_2} - E_z(x - x^s(t_1), y, z, \omega) e^{i\omega t_1} = \Delta t (i\omega E_z + V_z^s \frac{\partial}{\partial z} E_z),$$

где $V_z^s = \frac{\Delta z}{\Delta t}$ – скорость перемещения источника.

Иначе говоря, появляется дополнительный источник электромагнитного поля, связанный со скоростью его движения. При увеличении числа источников N за постоянный интервал времени $T = N \cdot \Delta t$, последнее выражение сводится к интегральной сумме, и в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$E_z = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \Delta t \sum_{i=1}^N \left(i\omega G_i + V_z^s \frac{\partial}{\partial z} G_i \right) = \int_0^T \left(i\omega G + V_z^s \frac{\partial}{\partial z} G \right) d\tau = i\omega \int_0^T G d\tau + V_z^s \int_0^T \frac{\partial}{\partial z} G d\tau.$$

Результаты вычислительного эксперимента, при скорости $V_z^s = 10$ м/с представлены на рис. 3.

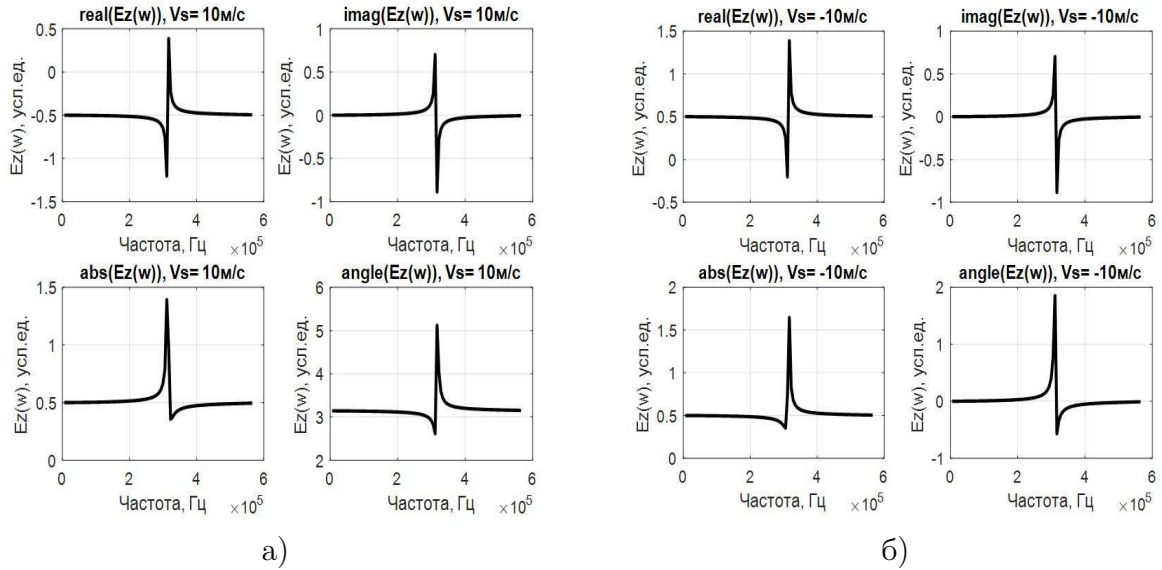


Рис. 3. Результаты расчетов для источника заданного выражением (11), слева – положительная скорость (а), справа – отрицательная (б). Левый верхний рисунок – действительная часть поля E_z , правый верхний – мнимая часть поля E_z , нижний левый – модуль поля E_z , нижний правый – фаза поля E_z

В противном случае, в случае задания источников в виде $F = \delta(x)\delta(y) \{ \delta(z - z_0(t_1))\delta(t - t_1) + \delta(z - z_0(t_2))\delta(t - t_2) \}$, т.е. когда имеет место не разность, а сумма источников, появляющихся в разных точках и в разное время, эффект скорости перемещения исчезает и выражается в виде классического эффекта Доплера.

Анализ влияния скорости движения на создаваемое им электромагнитное поле показывает [14,17], что морфология зарегистрированных в неподвижной точке наблюдения сигналов меняется в зависимости от скорости перемещения источника. Затухание поля в пространстве слабее, чем для неподвижного (закрепленного) источника [13].

Случай 2. $V \neq 0, V^s = 0$ (движущиеся приемники, закрепленные источники)

Уравнения Максвелла (7) для движущегося приемника имеют вид

$$\text{rot}\mathbf{H}' = \sigma\mathbf{E}' + \alpha\mathbf{H}' + \mathbf{V}\tilde{q} + \tilde{\mathbf{J}}^{\text{st}}, \text{rot}\mathbf{E}' = -i\omega\mu\mathbf{H}' - i\omega\beta\mathbf{E}'. \quad (12)$$

Рассмотрим вытекающие из этой системы уравнений следствия.

1. Анализ данной системы начнем с тока Роуанда $\mathbf{V}\tilde{q}$.

При обычных предположениях магниторазведки (отсутствии электрических токов и постоянстве магнитного поля во времени, или $\omega = 0$) из последней системы уравнений получим $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{V}q$, $\text{div}\mathbf{B} = 0$. Отличие этой системы уравнений от системы уравнений магниторазведки заключается в наличии в правой части первого уравнения величины $\mathbf{V}q$, связанной с движением приемника и распределением электрических зарядов на дневной поверхности. Ротируя первое уравнение, перейдем к дифференциальному уравнению относительно вектора магнитного поля \mathbf{H} : $\nabla^2\mathbf{H} = \text{grad}(\text{grad}_{\mu}^1 \cdot \mathbf{B}) + \text{rot}\mathbf{V}q$.

Поскольку вектор скорости не зависит от пространственных координат ($\text{rot}\mathbf{V} = 0$ в рассматриваемом случае), то $\text{rot}\mathbf{V}q = \text{grad}q \times \mathbf{V}$. Отсюда окончательно получим

$$\nabla^2\mathbf{H} = \text{grad}\left(\text{grad}\frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{B}\right) + \text{grad}q \times \mathbf{V}.$$

Из последнего уравнения сразу следует, что при встречной системе наблюдений и равенстве скоростей в прямом и обратном рейсе сумма полей будет удовлетворять уравнению $\nabla^2\mathbf{H}^s = 2\text{grad}\left(\text{grad}\frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{B}\right)$, а разность – уравнению $\nabla^2\mathbf{H}^d = 2\text{grad}q \times \mathbf{V}$.

Таким образом, классическое уравнение аэромагниторазведки получается при использовании суммы полей во встречной системе наблюдения. Разность же этих полей дает возможность исследовать распределение электрических зарядов на дневной поверхности, что может дать дополнительную информацию о строении геологической среды. Отметим, что в последнем случае разностное поле зависит от градиента распределения заряда, который определяется как геометрией земной поверхности, так и распределением диэлектрических свойств. Учитывая то, что земля является электрически заряженным телом, плотность зарядов q будет связана с распределением зарядов на дневной поверхности. Известно, что заряды концентрируются в точках поверхности с наибольшей кривизной. Вследствие этого поверхностные заряды будут распределены неравномерно по поверхности земли. Учет этого обстоятельства представляет самостоятельную проблему.

2. Рассмотрим другие слагаемые в системе (12). Однако прежде рассмотрим вопрос о деформации электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла в частотной области и покоящейся системе координат имеют вид $\text{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{ext}$, $\text{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$, где ω – частота, $i = \sqrt{-1}$. Деформируем электромагнитное поле, умножив это поле на функцию $f = f(x, y, z, \omega)$ и представив $\mathbf{H}' = f\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}' = f\mathbf{E}$. Тогда уравнения Максвелла относительно штрихованных векторов примут вид $\text{rot}\mathbf{H}' = \sigma\mathbf{E}' + \frac{\text{grad}f}{f} \times \mathbf{H}' + f\mathbf{J}^{ext}$, $\text{rot}\mathbf{E}' = -i\omega\mu\mathbf{H}' + \frac{\text{grad}f}{f} \times \mathbf{E}'$.

Пусть $f = e^g$, $g = aV_x x + bV_y y + cV_z z$, где V_x, V_y, V_z – компоненты вектора скорости по соответствующим осям координат; a, b, c – некоторые коэффициенты соответствующей физической размерности. Очевидно, при этом величина g не должна превышать величину затухания поля на бесконечности. В противном случае условие убывания поля на бесконечности будет нарушено.

Тогда $\text{rot}\mathbf{H}' = \sigma\mathbf{E}' + \alpha\mathbf{H}' + f\mathbf{J}^{ext}$, $\text{rot}\mathbf{E}' = -i\omega\mu\mathbf{H}' + \beta\mathbf{E}'$, где $\alpha = \beta = \begin{pmatrix} 0 & -cV_z & bV_y \\ cV_z & 0 & -aV_x \\ -bV_y & aV_x & 0 \end{pmatrix}$ и учтено, что $\alpha\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 0 & -cV_z & bV_y \\ cV_z & 0 & -aV_x \\ -bV_y & aV_x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{H}' = -\tilde{\sigma}\tilde{\mu}(\mathbf{H}' \times \mathbf{V})$ и $\mathbf{H}' \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ H_x & H_y & H_z \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_y V_z - H_z V_y \\ H_z V_x - H_x V_z \\ H_x V_y - H_y V_x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -cV_z & bV_y \\ cV_z & 0 & -aV_x \\ -bV_y & aV_x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{H}' = -\tilde{\sigma}\tilde{\mu} \begin{pmatrix} H_y V_z - H_z V_y \\ H_z V_x - H_x V_z \\ H_x V_y - H_y V_x \end{pmatrix}$. Отсюда следует: $a = b = c = \tilde{\sigma}\tilde{\mu}$.

В общем случае $\alpha \neq \beta$ при использовании разных функций для деформирования электромагнитного поля: $\mathbf{H}' = f_1\mathbf{H}$, $\mathbf{E}' = f_2\mathbf{E}$. Решить полученную систему можно, как систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка, аналогично решению уравнений Максвелла для бианизотропных сред [18]. Полученный результат позволяет связать электромагнитное поле в случае покоящейся системы координат и в случае движущегося приемника электромагнитного поля. При этом полученные уравнения аналогичны уравнениям (12). Как следует из полученных уравнений, деформация электромагнитного поля приводит к нарушению принципа взаимности в

том смысле, что в прямом и обратном рейсах будут получены разные результаты измерений.

Таким образом, можно сделать вывод, что скорость перемещения приемника приводит к изменению амплитуды электромагнитного поля и может сыграть положительную роль. Это обстоятельство можно использовать в мобильных системах наблюдения геоэлектрики на основе регулирования величины скорости в плане увеличения амплитуды полезных сигналов. В этом случае появляются задачи 5D: кроме пространственных координат и времени появляется еще одна независимая контролируемая величина – скорость, что может расширить круг решаемых геологических задач.

3. Примеры. Пусть в однородном пространстве с параметрами $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ Ф/м, $\sigma_0 = (10^{-14} + i\omega\varepsilon_0)$ См · м на глубине 1 м находится неоднородность размером по оси x от -2 м до 2 м, по оси y – от $-0,45$ м до $0,45$ м и толщиной $0,3$ м с параметрами $\mu = \mu_0$, $\sigma = (10^{-2} + 10i\omega\varepsilon_0)$ См · м. Система наблюдения изображена на рис. 4.

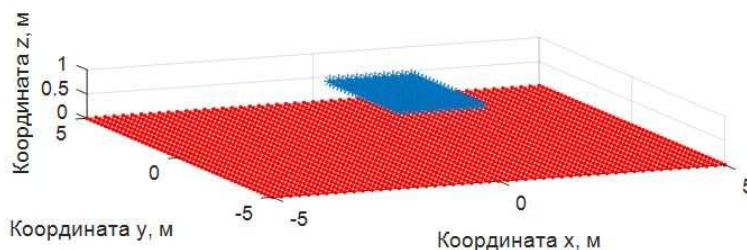


Рис. 4. Система наблюдения: красные точки – точки измерения поля; синие звездочки – неоднородность, помещенная в однородное пространство. Приемники, расположенные вдоль оси y , синхронно двигаются в направлении оси x со скоростью V_x

По площади 10×10 метров с шагом $0,2$ м проводятся измерения аномального поля от источника, направленного по оси x и находящегося в начале координат, в двух случаях: первый – перемещающийся приемник с нулевой скоростью $V_x = 0$ и приемник,двигающийся со скоростью $V_x = 10$ м/с. Поля рассчитывались для частоты $\omega = 2\pi \cdot 250 \cdot 10^6 = 1,5708 \cdot 10^9$ Гц, при этом использовался подход к решению прямых задач изложенный в работе [19]. Для движущихся приемников, расположенных вдоль оси y синхронно перемещающихся вдоль оси x со скоростью V_x , параметры, связанные

со скоростью движения, равны $\alpha = \beta = \sigma\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -V_x \\ 0 & V_x & 0 \end{pmatrix}$. Результаты вычисления

представлены на рис. 5, где показаны действительные и мнимые части полей, согласно системе наблюдений рис. 4. Модуль разности между данными расчетами представлен на рис. 6.

Случай 3. $V = V^s$ (источник и приемник движутся с одинаковой скоростью)

В случаях 1 и 2 выше рассматривалась покоящаяся среда, когда двигались только источники и приемники поля, т. е. движение осуществлялось относительно неподвижной среды. В рассматриваемом случае при $V = V^s$ рассмотрим движущуюся среду относительно неподвижной системы наблюдения, к которой привяжем точку отчета. Данная ситуация широко используется в мобильных профильных георадарных исследованиях, когда в установке наблюдения расстояние между источником и

приемником зафиксировано, и такая установка перемещается вдоль профиля с определенной скоростью. При этом для первичного поля любая производная по пространственным координатам равна нулю, т. е. первичное поле является функцией только частоты ω . Такая система наблюдения устанавливается на беспилотных летательных аппаратах, автомобильных и других наземных мобильных носителях. Источники и приемники закреплены (неподвижны). В момент времени t_1 неоднородность в виде кусочно-постоянной модели среды находится между координатами x_1 и x_2 . В последующий момент времени t_2 неоднородность перемещается в интервал координат от x_3 до x_4 с некоторой скоростью, которую можно оценить выражением $V_n = \frac{x_3 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_4 - x_2}{t_2 - t_1}$.

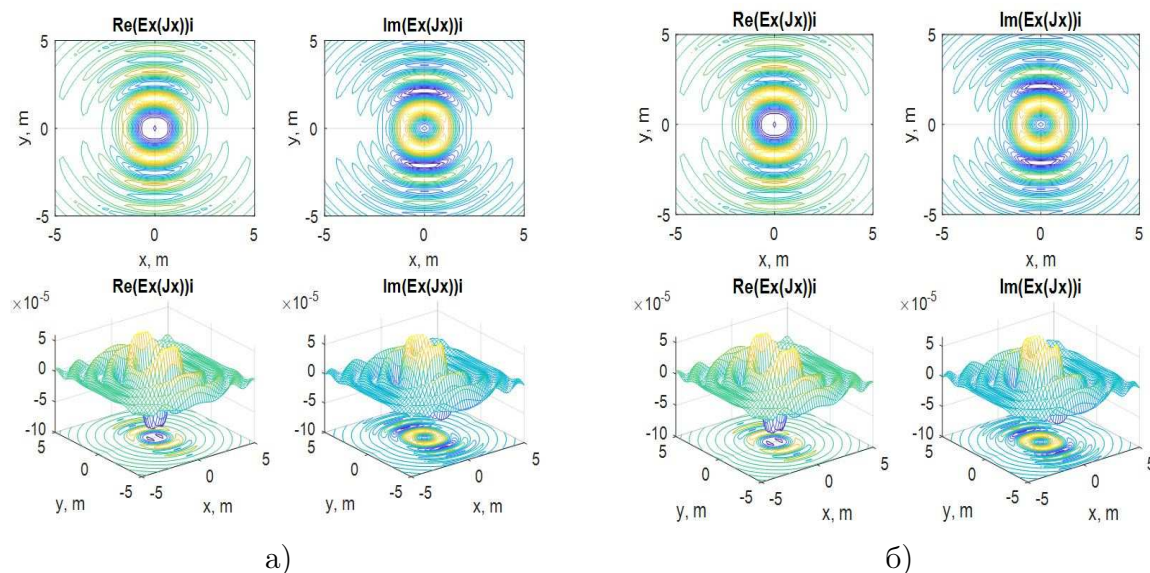


Рис. 5. Результаты вычисления компоненты E_x напряженности электрического поля от стороннего электрического тока J_x^{ext} направленного по оси x : а) для $V_x = 0$ м/с; б) для движущегося приемника, движущегося со скоростью $V_x = 10$ м/с

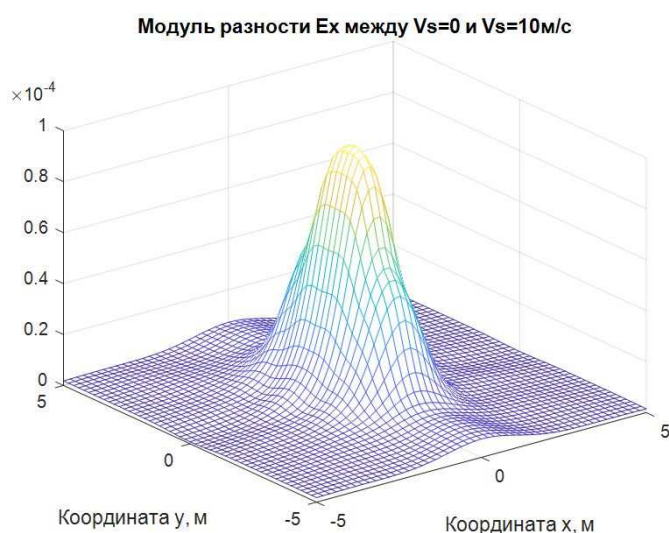


Рис. 6. Модуль разности между полями E_x для случая $V_x = 0$ м/с и $V_x = 10$ м/с

Таким образом, местоположение неоднородности будет являться функцией времени: $\begin{cases} x^n = x^n(t) \\ y^n = y^n(t) \\ z^n = z^n(t) \end{cases}$ – координаты неоднородностей. Тогда материальные уравнения с учетом (2) примут вид:

$$\mathbf{J}(x, y, z, x^s, y^s, z^s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x^n, y^n, z^n) \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, x^s, y^s, z^s, \omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{D} = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{grad} \varepsilon \cdot \mathbf{V}_n + i\omega \varepsilon) \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, x^s, y^s, z^s, \omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{grad} \mu \cdot \mathbf{V}_n + i\omega \mu) \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, x^s, y^s, z^s, \omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где $\text{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x^n} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y^n} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z^n}$ – дифференциальный оператор по пространственным координатам неоднородностей.

Отсюда следует, что скорость перемещения неоднородности входит в материальные параметры среды как множитель пространственных производных по местоположению неоднородностей. Тогда уравнения Максвелла будут иметь вид

$$\text{rot} \tilde{\mathbf{H}} = (\sigma + i\omega \varepsilon + \text{grad} \varepsilon \cdot \mathbf{V}_n) \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}^{st}, \quad \text{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -(i\omega \mu + \text{grad} \mu \cdot \mathbf{V}_n) \tilde{\mathbf{H}}.$$

Как следует из этих уравнений, скорость движения системы наблюдения будет влиять на определяемые параметры среды.

Выводы

Получены уравнения Максвелла в частотной области для общего случая произвольно движущихся приемников и (или) источников поля, позволяющие исследовать влияние скорости перемещения источников и приемников на результаты геоэлектрических измерений. В примерах при расчетах использовалась постоянная скорость перемещения. Перемещения с произвольной скоростью требуют анализа ускорения движущейся системы наблюдения, что представляет собой самостоятельную задачу.

В случае движущейся системы наблюдения уравнения Максвелла преобразуются в уравнения вида, аналогичным уравнениям Максвелла для бианизотропных сред [18]. Для таких уравнений решения прямых задач наиболее эффективны на основе решения систем дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, теория которых хорошо разработана [20]. Постановка обратных задач может быть сформулирована на основе развития идей М.В. Клибанова [19], которая сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Мобильные системы наблюдения позволяют использовать контролируемую скорость движения системы наблюдения как дополнительный управляемый параметр при изучении электромагнитных свойств геологической среды.

Рассмотрены три случая, представляющие интерес для геоэлектрики движущихся систем наблюдения. Показано, что скорость движения системы наблюдения оказывает влияние на измеряемое поле, выражающееся в изменении морфологии сигналов, их амплитуды и фазы. Поскольку Земля является заряженным телом, причем поверхностные заряды распределены неравномерно, то за счет тока Роуленда могут

появляться ложные аномалии, которые будут связаны с рельефом местности, над которой проводятся измерения в движении в методах аэромагниторазведки. Основной вывод заключается в том, что для контролируемых пространственно-временных характеристик системы наблюдения появляется дополнительный параметр, также контролируемый, – скорость. Вследствие этого движущаяся система наблюдения будет иметь 5 измерений: 3 пространственные, 1 временную и 1 скоростную характеристики.

Литература

1. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970.
2. Болотовский, Б. М. Современное состояние электродинамики движущихся сред (безграничные среды) / Б.М. Болотовский, С.С. Столяров // Успехи физических наук. – 1974. – Т. 114, № 4. – С. 569–608.
3. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Гостехиздат, 1982.
4. Новаку, В. Введение в электродинамику / В. Новаку. – М.: Изд-во иностранная литература, 1963.
5. Тамм, И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – М.: Наука, 1976.
6. Ерофеев, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеев, И.С. Козловская. – М.: URSS, 2014.
7. Кураев, А.А. Электродинамика и распространение радиоволн / А.А. Кураев, Т.Л. Попова, А.К. Синицын. – Минск: Бестпринт, 2004.
8. Максвелл, Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме / Дж.К. Максвелл. – М.: Наука, 1989.
9. Марков, Г.Т. Электродинамика и распространение радиоволн / Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. – М.: Советское радио, 1979.
10. Яворский, Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Наука, 1968.
11. Калашников, С.Г. Электричество / С.Г. Калашников. – М.: Наука, 1985.
12. Александров, П.Н. К теории сейсмического и электромагнитного мониторинга современных геодинамических процессов / П.Н. Александров // Вестник Камчатской региональной ассоциации «Учебно-научный центр». Серия: Науки о Земле. – 2009. – Т. 2, № 14. – С. 49–58.
13. Александров, П.Н. Развитие теории геоэлектрики в анизотропных и бианизотропных средах: дисс. ... д-р. физ.-мат. наук. – Москва, 1998. – 241 С.
14. Alexandrov, P.N. Mathematical Model of Electromagnetic Field Emission Taking into Account Motion of the Source / P.N. Alexandrov // Journal of Earthquake Prediction Research. – 1997. – V. 6. – P. 560–571.
15. Александров, П.Н. Взаимодействие электромагнитного поля с движущимися средами / П.Н. Александров // Научные труды Стерлитамакской государственной педагогической академии им. З. Бишевой, серия физико-математические науки. – 2011. – Т. 1, № 1. – С. 6–21.
16. Блохинцев, Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды / Д.И. Блохинцев. – М.: Наука, 1981.
17. Александров, П.Н. Движущийся контролируемый источник электромагнитного поля в проводящей среде / П.Н. Александров // Теория и практика интерпретации данных электромагнитных и геофизических полей. – Екатеринбург, 1996. – С. 122–128.
18. Александров, П.Н. Эффективные электромагнитные параметры капиллярной системы электропроводности горной породы / П.Н. Александров // Физика Земли. – 2000. – № 2. – С. 87–94.

19. Александров, П.Н. Прямая и обратная задача геоэлектрики бианизотропных сред на основе объемных интегральных уравнений / П.Н. Александров, В.Н. Кризский // Физика Земли. – 2022. – № 3. – С. 92–107.

20. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1968.

Павел Николаевич Александров, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта РАН (г. Москва, Российская Федерация), alexandr@gemrc.ru.

Михаил Львович Владов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедры сейсмологии и геоакустики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Российская Федерация), vladov_ml@mail.ru.

Владимир Николаевич Кризский, доктор физико-математических наук, профессор, кафедры информатики и компьютерных технологий, Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация), krizsky@rambler.ru.

Поступила в редакцию 15 июня 2024 г.

MSC 86A25

DOI: 10.14529/mmp240401

MOBILE SUPERVISION SYSTEMS IN GEOELECTRICS (FREQUENCY DOMAIN)

A.N. Alexandrov¹, M.L. Vladov², V.N. Krizsky³

¹Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

³Empress II Saint Petersburg Mining University, Saint-Petersburg, Russian Federation
E-mail: alexandr@gemrc.ru, vladov_ml@mail.ru, krizsky@rambler.ru

The influence of the speed of movement of the observation system on the results of measurements of the electromagnetic field is investigated. The relevance of this study is dictated by the increasing use of mobile surveillance systems in geoelectrics and the need to explore the possibility of using moving surveillance systems in the study of the structure of the geoelectric environment. In general, the Maxwell equations are obtained in the case of moving both sources and receivers of the electromagnetic field in the frequency domain. Boundary conditions are also obtained.

Three important cases are considered. In the first case, a fixed receiver and a moving source of an electromagnetic field are considered. In the second, there is a moving receiver and a fixed source. The third case, which is of the most important importance for the practice of geophysical research, is based on fixing the distance between the source and the receiver, and the movement of such a measuring installation over an inhomogeneous medium. The research is illustrated by specific calculations based on solutions of direct problems for Maxwell's equations in the considered cases. Based on theoretical studies and mathematical modeling, the nature of the influence of the speed of movement of the observation system on the results of measurements of the electromagnetic field is shown.

Keywords: moving surveillance systems; georadar; direct electrodynamic problems.

References

1. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Vancouver, General Publishing Company, 2000.
2. Bolotovskij B.M., Stolyarov S.S. Current Status of the Electrodynamics of Moving Media (Infinite Media). *Physics-Uspexhi*, 1975, vol. 17, no. 6, pp. 875–895. DOI: 10.1070/PU1975v017n06ABEH004403
3. Landau L.D., Lifshic E.M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford, New York, Pergamon Press, 1982.
4. Novaku V. *Vvedenie v elektrodinamiku* [Introduction to Electrodynamics]. Moscow, Foreign Literature Publishing House, 1963. (in Russian)
5. Tamm I.E. *Osnovy teorii elektrichestva* [Fundamentals Of The Theory Of Electricity]. Moscow, Mir Publishers, 1979. (in Russian)
6. Erofeenko V.T., Kozlovskaya I.S. *Analiticheskoe modelirovanie v elektrodinamike* [Analytical Modelling in Electrodynamics]. Moscow, URSS, 2014. (in Russian)
7. Kuraev A.A., Popkova T.L., Sinicyn A.K. *Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln* [Electrodynamics and Propagation of Radio Waves], Minsk, Bestprint, 2004. (in Russian)
8. Maxwell D.K. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. London, Sothis Press, 2023.
9. Markov G.T., Petrov B.M., Grudinskaya G.P. *Electrodynamics and Propagation of Radio Waves*. Moscow, Soviet radio, 1979. (in Russian)
10. Yavorsky B.M., Detlaf A.A. *Spravochnik po fizike dlya inzhenerov i studentov vuzov* [Handbook of Physics for Engineers and University Students]. Moscow, Nauka, 1968. (in Russian)
11. Kalashnikov S.G. *Elektrichestvo* [Electricity]. Moscow, Fizmatlit, 1985. (in Russian)
12. Alexandrov P.N. To Theory of Seismic and Electromagnetic Monitoring of the Modern Geodynamic Processes. *Bulletin of Kamchatka Regional Association Educational-Scientific Center. Earth Sciences*, 2009, vol. 2, no. 14, pp. 49–58.
13. Alexandrov P.N. *Razvitie teorii geoelektriki v anizotropnykh i bianizotropnykh sredakh* [Development of the Theory of Geoelectrics in Anisotropic and Bianisotropic Media]: diss...dokt. fiz.-matem. nauk. Moscow, 1998, 241 p. (in Russian)
14. Alexandrov P.N. Mathematical Model of Electromagnetic Field Emission Taking into Account Motion of the Source. *Journal of Earthquake Prediction Research*, 1997, vol. 6, pp. 560–571.
15. Alexandrov P.N. [Interaction of the Electromagnetic Field with Moving Media]. *Scientific Works of the Sterlitamak State Pedagogical Academy named Z. Bisheva. Series of Physical and Mathematical Sciences*, 2011, vol. 1, no. 1, pp. 6–21.
16. Blohincev D.I. *Acoustics of an Inhomogeneous Moving Medium*. NACA Technical Memorandums, 1956.
17. Alexandrov P.N. [A Moving Controlled Source of Electromagnetic Field in a Conductive Medium]. *Theory and Practice of Interpretation of Electromagnetic and Geophysical Field Data*, Ekaterinburg, 1996, pp. 122–128.
18. Alexandrov P.N. [Effective Electromagnetic Parameters of the Capillary System of Electrical Conductivity of Rock]. *Physics of the Earth*, 2000, no. 2, pp. 87–94. (in Russian)
19. Alexandrov P.N., Krizsky V.N. Direct and Inverse Problem of Geoelectrics in Bianisotropic Media Based on Volume Integral Equations. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 379–393.
20. Gantmaher F.R. *The Theory of Matrices*. New York, Chelsea Publishing Company, 2000.

Received June 15, 2024