ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 517.642.8 DOI: 10.14529/mmp240405

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ЗАДАННЫХ НА КВАНТОВЫХ ГРАФАХ ТИПА ЗВЕЗДА С ПЕРЕМЕННЫМИ РЕБРАМИ

***С.И. Кадченко*[1], *Л.С. Рязанова*[1], *И.Е. Кадченко*[1]**
[1]Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация

В статье разработаны алгоритмы вычисления значений собственных чисел начально-краевых задач для дифференциальных уравнений заданных на графе-звезда с переменными ребрами. В математической среде Maple проведены численные эксперименты по вычислению собственных чисел исследуемых задач. Разработанная методика может быть перенесена на краевые задачи для любых дискретных полуограниченных операторов и позволит разработать алгоритмы решения обратных спектральных задач заданных на квантовых графах с переменными ребрами.

Ключевые слова: графы; собственные числа и собственные функции; дискретные и самосопряженные операторы; метод регуляризованных следов; метод Галеркина.

Введение

Статья посвящена актуальным проблемам спектральной теории линейных дифференциальных операторов в частных производных заданных на графе-звезда с переменными ребрами. Необходимость исследования в данном направлении возникает всякий раз при изучении соответствующих природных явлений и процессов.

Важные приложения теории систем уравнений в частных производных и проблемы, связанные с исследованием свойств разрешимости формулируемых граничных задач стимулировали исследование соответствующих спектральных задач. Спектральная теория операторов, порожденных граничными задачами, как для уравнений, так и для систем уравнений в частных производных заданных на графах, начала развиваться в работах российских и зарубежных математиков сравнительно недавно. Исследование структуры спектра и возможности разложения решений по наборам собственных вектор-функций является в настоящее время одним из основных направлений при изучении вопросов спектральной теории граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Работа посвящена применению методики численного решения прямых спектральных задач заданных на квантовых графах, описанной в статьях [1–4], для спектральных задач на квантовых графах с меняющимися ребрами.

Построенный в статье метод позволит распространить ранее полученную методику решения обратных спектральных задач заданных на квантовые графы с меняющимися со временем ребрами [5].

1. Некоторые понятия и определения

Рассмотрим конечный связанный ориентированный граф-звезду $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$, состоящего из j_0 ребер и одного внутреннего узла с номером $j_0 + 1$. Обозначим через $\mathbf{E} = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$ множество ребер графа $\mathbf{G}$, а через $\mathbf{V} = \{V_i\}_{i=1}^{j_0+1}$ – множество его вершин.

В дальнейшем будем рассматривать два вида графов, когда для одного вида длины ребер L_j постоянные и равны l_j, а для другого длины ребер изменяются во времени по общему закону

$$L_j(t) = l_j L(t), l_j \in R_+, j = \overline{1, j_0}, \quad (1)$$

где $L(t)$ – дважды дифференцированная функция, такая что $L_j(t)$ всех ребер графа остаются всегда положительными в любые моменты времени. В качестве конкретного примера при численных расчетах будем использовать гармоническую зависимость

$$L(t) = a + b\cos(\omega t),\ a, b \in R_+,$$

где $\omega = 2\pi T$ – частота колебаний, T – период колебаний. Первый вид графов обозначим через $\mathbf{G}$, а второй через $\mathbf{G}_t$.

Введем необходимые в дальнейшем пространства: $L^2(\mathbf{G})$ – пространство функций суммируемых с квадратом на $\mathbf{G}$ с нормой

$$||u||_{L^2(\mathbf{G})} = \Big(\int\limits_{\mathbf{G}} u^2(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big)^{1/2}, \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_{j_0}), x_j \in (0, l_j);$$

$L^{2,1}(\mathbf{G}_t)$ – пространство функций из $\mathbf{G}_t = \mathbf{G} \times (0, t)$ с нормой

$$||u||_{L^{2,1}(\mathbf{G}_t)} = \int\limits_0^t \Big(\int\limits_{\mathbf{G}_t} u^2(\mathbf{y}, \tau)d\mathbf{y}\Big)^{1/2} d\tau,\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_{j_0}),\ y_j \in (0, L_j(t)).$$

Сужение функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на ребро E_j графа обозначим через $u_{E_j}(x_j)$. Интеграл по графу $\mathbf{G}$ от функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ определим как сумму интегралов от сужений $u_{E_j}(x_j)$ по каждому ребру E_j, т. е.

$$\int\limits_{\mathbf{G}} \mathbf{u}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{j_0} \int\limits_{E_j} u_{E_j}(x_j)dx_j.$$

По аналогии определяется интеграл по графу $\mathbf{G}_t$ от функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{G}_t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)d\mathbf{x}d\tau = \int\limits_0^t \Big(\sum_{j=1}^{J0} \int\limits_{E_j} u_{E_j}(x_j, \tau)dx_j\Big)d\tau.$$

Рассмотрим квантовый граф-звезду $\mathbf{G}$ с ребрами постоянной длины l_j. Зададим на нем вектор-оператор $\mathbf{S} = \Big(S_1, S_2, ..., S_{j_0}\Big)$ с областью определения $D_{\mathbf{S}} = L^2(\mathbf{G})$ по следующему правилу

$$\mathbf{S\Phi} = -\frac{d^2\mathbf{\Phi}}{d\mathbf{y}^2},\ \mathbf{\Phi} = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{j_0}),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{j_0}). \quad (2)$$

Нас будут интересовать собственные числа λ_n и соответствующие им собственные вектор-функции $\mathbf{\Phi_n} = (\phi_{1n}, \phi_{2n}, ..., \phi_{j_0 n})$ вектор-оператора $\mathbf{S}$ заданного на графе $\mathbf{G}$. Для их нахождения рассмотрим краевые задачи

$$-\frac{d^2\phi_j}{dy_j^2} = \lambda\phi_j,\ \phi_j = \phi_j(y_j),\ 0 \le y_j \le l_j,\ j = \overline{1, j_0}, \quad (3)$$

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = \dots = \phi_{j_0} = 0, \tag{4}$$

$$\phi_1(l_1) = \phi_2(l_2) = \dots = \phi_{j_0}(l_{j_0}), \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{d\phi_j}{dy_j}(l_j) = 0. \tag{6}$$

Граничные условия (4) определяют условие Дирихле на крайних вершинах, а (5) и (6) – условие непрерывности и условие Кирхгофа в центральной вершине графа-звезды $\mathbf{G}$.

Общие решения дифференциальных уравнений (3) имеют вид:

$$\phi_j(y) = c_{j1}\cos(\lambda y_j) + c_{j2}\sin(\lambda y_j).$$

Из условий (4) найдем

$$\phi_j(0) = c_{j1}\cos(0) + c_{j2}\sin(0) = c_{j1} = 0.$$

Тогда

$$\phi_j(y) = c_{j2}\sin(\lambda y_j).$$

Используя (5) получим

$$c_{j2} = \frac{\sin(\lambda l_1)}{\sin(\lambda l_j)}c_{12}.$$

Из граничного условия (6) имеем

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{d\phi_j}{dy_j}(l_j) = \sum_{j=1}^{j_0} c_{j2}\lambda\cos(\lambda y_j) = \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\sin(\lambda l_1)}{\sin(\lambda l_j)}c_{12}\lambda\cos(\lambda y_j) =$$

$$= c_{12}\lambda\sin(\lambda l_1)\sum_{j=1}^{j_0}\frac{\cos(\lambda l_j)}{\sin(\lambda l_j)} = 0.$$

Так как $c_{12}\lambda\sin(\lambda l_1) \neq 0$, то

$$\sum_{j=1}^{j_0} \operatorname{ctg}(\lambda l_j) = 0. \tag{7}$$

В результате получили трансцендентное уравнение для нахождения собственных чисел λ_n вектор-оператора $\mathbf{S}$, заданного на графе $\mathbf{G}$. Причем собственные числа и собственные функции $\mathbf{\Phi}_n$ вещественные [6]. Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственные числа оператора $\mathbf{S}$ занумерованные в порядке не убывания их величин. Каждому собственному числу λ_n будут соответствовать собственные функции $\mathbf{\Phi}_n(\mathbf{y})$ имеющая на j-ом ребре графа $\mathbf{G}$ проекцию

$$\phi_{jn} = c_{j2}\sin(\lambda_n y_j) = c_{12}\frac{\sin(\lambda_n l_1)}{\sin(\lambda_n l_j)}\sin(\lambda_n y_j),\ j = \overline{1, j_0},\ n \in N. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что система функций $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на графе $\mathbf{G}$

$$\int\limits_{\mathbf{G}} \mathbf{\Phi}_n(\mathbf{y})\mathbf{\Phi}_m(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\phi_{jn}(y_j)\phi_{jm}(y_j)dy = 0,\ n \neq m.$$

Постоянную c_{12} найдем из условия нормировки системы функций $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\int\limits_{\mathbf{G}} \mathbf{\Phi}_n^2 d\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{j_0} \int\limits_0^{l_j} \phi_{jn}^2(y_j)dy_j = c_{12}^2 \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\sin^2(\lambda_n l_1)}{\sin^2(\lambda_n l_j)} \int\limits_0^{l_j} \sin^2(\lambda_n y_j)dy_j =$$

$$= \frac{c_{12}^2}{2} \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\sin^2(\lambda_n l_1)}{\sin^2(\lambda_n l_j)} \int\limits_0^{l_j} [1-\cos(2\lambda_n y_j)]dy_j = \frac{c_{12}^2}{2} \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\sin^2(\lambda_n l_1)}{\sin^2(\lambda_n l_j)} \Big[y_j - \frac{\sin(2\lambda_n y_j)}{2\lambda_n} \Big]_0^{l_j} =$$

$$= \frac{c_{12}^2}{2} \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\sin^2(\lambda_n l_1)}{\sin^2(\lambda_n l_j)} \Big[l_j - \frac{\sin(2\lambda_n l_j)}{2\lambda_n} \Big] = 1.$$

Отсюда

$$c_{12} = \sqrt{\frac{2}{\sum\limits_{j=1}^{j_0} \frac{\sin^2(\lambda_n l_1)}{\sin^2(\lambda_n l_j)} \Big[l_j - \frac{\sin(2\lambda_n l_j)}{2\lambda_n} \Big]}} = \frac{1}{\sin(\lambda_n l_1)} \sqrt{\frac{2}{\sum\limits_{j=1}^{j_0} \frac{l_j - \frac{\sin(2\lambda_n l_j)}{2\lambda_n}}{\sin^2(\lambda_n l_j).}}}.$$

Тогда, собственные функции ϕ_{jn} на j-м ребре, примут вид

$$\phi_{jn} = \frac{B_n}{\sin(\lambda_n l_j)} \cos(\lambda_n y_j),\ j = \overline{1, j_0},\ n \in N.$$

Здесь

$$B_n = \sqrt{\frac{2}{\sum\limits_{j=1}^{j_0} \frac{l_j - \frac{\sin(2\lambda_n l_j)}{2\lambda_n}}{\sin^2(\lambda_n l_j)}}}.$$

Таким образом собственные функции $\mathbf{\Phi}_n(\mathbf{y})$ оператора $\mathbf{S}$, которые соответствуют его собственным числам λ_n, имеют вид

$$\mathbf{\Phi}_n(\mathbf{y}) = \Big(\phi_{1n}(y_1), \phi_{2n}(y_2), \ldots, \phi_{j_0 n}(y_{j_0}) \Big),\ \phi_{jn} = \frac{B_n}{\sin(\lambda_n l_j)} \sin(\lambda_n y_j),\ n \in N, \tag{9}$$

а система функций $\{\mathbf{\Phi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет ортонормированной на графе $\mathbf{G}$

$$\int\limits_{\mathbf{G}} \mathbf{\Phi}_n \mathbf{\Phi}_m d\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{j_0} \int\limits_0^{l_j} \phi_{jn}(y_j)\phi_{jm}(y_j)dy_j = \begin{cases} 0,\ n \neq m, \\ 1,\ n = m. \end{cases} \tag{10}$$

Используя статью [6], можно показать, что система функций $\{\mathbf{\Phi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом пространстве $L^2(\mathbf{G})$. Поэтому для любой функции $\mathbf{f}(\mathbf{y}) \in L^2(\mathbf{G})$, имеет место разложение в ряд Фурье по собственным функциям $\{\mathbf{\Phi}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{\Phi}_n(\mathbf{y}),\ a_n = \int\limits_{\mathbf{G}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \mathbf{\Phi}_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{j_0} \int\limits_0^{l_j} f_j(y_j)\phi_{jn}(y_j)dy_j.$$

Далее на графе $\mathbf{G}_t$ с ребрами постоянной длины l_j, введем вектор-оператор $\mathbf{M} = \Big(M_1, M_2, ..., M_{j_0}\Big)$ по правилу

$$\mathbf{M}\mathbf{\Omega} = \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{\Omega}}{\partial \mathbf{y}^2}, \quad \mathbf{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{j_0}) \tag{11}$$

с областью определения $D_{\mathbf{M}} = L^{2,1}(\mathbf{G}_t)$, где функции $\omega_j(y_j, t) \in W_2^{2,1}(L^{2,1}(0, l_j) \times [0, t])$, а $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots y_{j_0})$, $y_j \in [0, l_j]$.

Для проекций M_j вектор-оператора $\mathbf{M}$ на ребра графа $\mathbf{G}_t$ рассмотрим начально-краевые задачи

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial y_j^2} = 0, \ \omega_j = \omega_j(y_j, t), \ j = \overline{1, j_0}, \tag{12}$$

$$\omega_1(0, t) = \omega_2(0, t) = \dots = \omega_{j_0}(0, t) = 0, \tag{13}$$

$$\omega_1(l_1, t) = \omega_2(l_2, t) = \dots = \omega_{j_0}(l_{j_0}, t), \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\partial \omega_j}{\partial y_j}\Big|_{y_j = l_j} = 0. \tag{15}$$

$$\omega_j(y_j, 0) = \varphi(y_j). \tag{16}$$

Граничные условия (13) определяют условие Дирихле на крайних вершинах, а (14) и (15) – условие непрерывности и условие Кирхгофа в центральной вершине графа-звезды $\mathbf{G}_t$. Условия (16) являются начальными.

Решения уравнений (12) будем искать методом разделения переменных полагая, что

$$\omega_j(y_j, t) = Y_j(y_j) T(t). \tag{17}$$

Подставляя (17) в уравнения (12), получим

$$\frac{Y_j''}{Y_j} = \frac{T'}{T} = -k^2.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} Y_j'' + k^2 Y_j = 0, j = \overline{1, j_0}, \\ T' + k^2 T = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Граничные условия (13) – (15) дают:

$$Y_1(0) = Y_2(0) = \dots = Y_{j_0}(0) = 0, \tag{19}$$

$$Y_1(l_1) = Y_2(l_2) = \dots = Y_{j_0}(l_{j_0}), \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\partial Y_j}{\partial y_j}\Big|_{y_j = l_j} = 0. \tag{21}$$

Поэтому для определения функций $Y_j(y_j)$ приходим к краевым задачам

$$Y_j''(y_j) + k^2 Y_j(y_j) = 0, \tag{22}$$

$$Y_1(0) = Y_2(0) = \dots = Y_{j_0}(0) = 0, \tag{23}$$

$$Y_1(l_1) = Y_2(l_2) = \cdots = Y_{j_0}(l_{j_0}), \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\partial Y_j}{\partial y_j}\Big|_{y_j=l_j} = 0. \tag{25}$$

Существуют нетривиальные решения дифференциальных уравнений (22)

$$Y_{jk}(y_j) = C_{j1}\cos(ky_j) + C_{j2}\sin(ky_j). \tag{26}$$

Из (23) имеем:

$$Y_{jk}(0) = C_{j1} = 0.$$

Используя (24) найдем

$$C_{j2} = \frac{\sin(kl_1)}{\sin(kl_j)} C_{12},\ j = \overline{1, j_0},$$

Граничные условия (25) дают следующую цепочку равенств

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{dY_{jk}}{dy_j}\Big|_{y_j=l_j} = \sum_{j=1}^{j_0} C_{j2}k\cos(kl_j) = k\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\sin(kl_1)}{\sin(kl_j)} C_{12}\cos(kl_j) =$$

$$= C_{12}k\sin(kl_1)\sum_{j=1}^{j_0}\frac{\cos(kl_j)}{\sin(kl_j)} = 0.$$

Так как $C_{12}\lambda\sin(kl_1) \neq 0$, то

$$\sum_{j=1}^{j_0} \mathrm{ctg}(kl_j) = 0. \tag{27}$$

Для численных расчетов удобно использовать эквивалентный аналог уравнения (27)

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\cos(kl_j)\prod\limits_{i=1}^{j0}\sin(kl_i)}{\sin(kl_j)} = 0.$$

Надо обратить внимание, что полученное трансцендентное уравнение (27)для вычисления собственных чисел k с точностью до обозначений совпадает с уравнением (7), поэтому в дальнейшем будем k обозначать через λ.

Нетрудно показать, что нетривиальные решения задачи (22) – (25)

$$Y_{jn}(y_j) = C_{j2}\sin(\lambda_n y_j) = C_{j2}\frac{\sin(\lambda_n l_1)}{\sin(\lambda_n l_j)}\sin(\lambda_n y_j)$$

возможны при лишь при $\lambda = \lambda_n$, где λ_n корень трансцендентного уравнения (27). Сравнивая собственные функции Y_{jn} на j-м ребре спектральных задач (22) – (25) с собственными функциями $\phi_{jn}(y_j)$ стационарных спектральных задач (3) – (6) позволяет сделать вывод, что $Y_{jn}(y_j) \equiv \phi_{jn}(y_j)$.

Значению параметра $\lambda = \lambda_n$ соответствует решение второго уравнения (18):

$$T_n(t) = a_n e_n^{-\lambda} t.$$

Итак, все функции

$$\omega_{jn}(y_j,t) = Y_{jn}(y_j)T_n(t) = a_n e^{-\lambda_n t}\phi_{jn}(y_j). \tag{28}$$

удовлетворяют уравнениям (12) и граничным условиям (13) – (15).

Составим функциональные ряды

$$\omega_j(y_j,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}\phi_{jn}(y_j), j = \overline{1, j_0}. \tag{29}$$

Коэффициенты a_n в (29) найдем используя начальные условия (16)

$$\omega_j(y_j,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{jn}(y_j) = \varphi_j(y_j),\ j = \overline{1, j_0},\quad n \in N.$$

или

$$\varphi_j(y_j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{jn}(y_j). \tag{30}$$

Мы получили разложение функций $\phi_j(y_j,0)$ в ряд Фурье по базисным системам функций $\{\phi_{jn}(y_j)\}_{n=1}^{\infty}$ пространства $L^2(\mathbf{G})$. Известно, что

$$a_n = \sum_{j=1}^{j_0} \int_0^{l_j} \varphi(y_j)\phi_{jn}(y_j)dy_j,\ n \in N. \tag{31}$$

Таким образом найдено решение начально-краевой задачи (12) – (16) заданной на графе $\mathbf{G}_t$ с ребрами постоянной длины.

2. Вычисления собственных чисел

Опишем методику вычисления собственных чисел дискретных полуограниченных дифференциальных операторов заданных на графах-звезда с подвижными ребрами на примере вектор-оператор $\mathbf{F} = \Big(F_1, F_2, ..., Fj_0\Big)$, который задан на графе $\mathbf{G}_t$, по следующему правилу

$$\mathbf{F\Psi} = \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}^2}, \mathbf{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{j_0}),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{j_0}) \tag{32}$$

с областью определения $D_{\mathbf{F}} = L^{2,1}(\mathbf{G}_t)$. Для нахождения собственных чисел μ оператора $\mathbf{F}$ рассмотрим спектральные задачи заданные на ребрах E_j графа $\mathbf{G}_t$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_j^2} = \mu\psi_j,\ x_j = (0, L_j(t)),\ j = \overline{1, j_0}, \tag{33}$$

$$\psi_1(0,t) = \psi_2(0,t) = \ldots = \psi_{j_0} = 0, \tag{34}$$

$$\psi_1(L_1(t),t) = \psi_2(L_2(t),t) = \ldots = \psi_{j_0}(L_{j_0}(t),t), \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_j(L_j(t),t) = 0. \tag{36}$$

$$\psi_j(x_j,0) = \varphi_j(x_j). \tag{37}$$

Граничные условия (34) – (36) записаны из условия, что только крайние вершины графа $\mathbf{G}_t$ движутся, а центр (точка ветвления) фиксирован. Чтобы получить решения задач (33) – (37) заданных на графе-звезде $\mathbf{G}_t$ воспользуемся полученными выше собственными функциями $\mathbf{\Phi}_n(\mathbf{y})$ оператора $\mathbf{S}$, заданного на графе-звезда $\mathbf{G}$ с неподвижными ребрами [7–9].

Для этого в задачах (33) – (37) перейдем к задачам для графа с постоянной ребрами сделав замену переменных [9]

$$\begin{cases} y_j = \dfrac{x_j}{L(t)}, \\ t_1 = t. \end{cases} \tag{38}$$

Найдем производную $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\psi_j(x_j,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_j(x_j,t_1) = \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_j(y_j(x_j,t_1),t_1) = \frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t_1)\frac{\partial y_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t_1}\psi_j(y_j,t_1)\frac{\partial t_1}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{1}{L(t_1)}\frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t_1) + \frac{\partial}{\partial t_1}\psi_j(y_j,t_1)\cdot 0 = \frac{1}{L(t)}\frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t_1)$$

и производную $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}\psi_j(x_j,t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\psi_j(x_j,t_1) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{L(t_1)}\frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t_1)\Big) = \frac{1}{L(t_1)}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j}\psi_j(y_j,t_1) =$$

$$= \frac{1}{L(t_1)}\Big(\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\psi_j(y_j,t_1)\frac{\partial y_j}{\partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial t_1}\psi_j(y_j,t_1)\frac{\partial t_1}{\partial x_j}\Big) = \frac{1}{L^2(t_1)}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\psi_j(y_j,t_1).$$

При нахождении производных $\dfrac{\partial}{\partial t}\psi_j(x_j,t)$ надо знать изменения длин ребер $L_j(t)$ от времени, т. е. производную $\dfrac{dL(t)}{dt}$

$$\frac{dy_j}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{x_j}{L(t)}\Big) = -\frac{x_j}{L^2(t)}\frac{dL}{dt} = -\frac{y_j}{L(t_1)}\frac{d}{dt_1}L(t_1).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_j(x_j,t) = \frac{\partial}{\partial t}\psi_j(y_j(x_j,t),t_1(x_j,t)) = \frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t_1)\frac{dy_j}{dt} + \frac{\partial}{\partial t_1}\psi_j(y_j,t_1)\frac{dt_1}{dt} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t_1)\Big(-\frac{\dot{L}(t_1)}{L(t_1)}y_j\Big) + \frac{\partial}{\partial t_1}\psi_j(y_j,t_1) = -\frac{\dot{L}(t_1)}{L(t_1)}y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t_1) + \frac{\partial}{\partial t_1}\psi_j(y_j,t_1).$$

Здесь $\dot{L}$ обозначена производная по времени.

В дальнейшем так как замена $t = t_1$ формальная, то t_1 будем обозначать через t. В результат замены переменных (38) уравнения (33) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_j(y_j,t) - \frac{1}{L^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\psi_j(y_j,t) - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t) = \mu\psi_j(y_j,t). \tag{39}$$

При замене переменных в задачах (33) – (37) краевые условия (34) – (36) для функций ψ_j задаются с постоянными длинами ребер l_j и фактически удовлетворяют граничным условиям задач (13) – (15). В результаты преобразований мы приходим к начально-краевым задачам на квантовом графе $\mathbf{G}$ с ребрами постоянной длины l_j

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_j(y_j,t) - \frac{1}{L^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\psi_j(y_j,t) - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t) = \mu\psi(y_j,t),\ 0 < y_j < l_j, \tag{40}$$

$$\psi_1(0,t) = \psi_2(0,t) = \dots = \psi_{j_0}(0,t), \tag{41}$$

$$\psi_1(l_1,t) = \psi_2(l_2,t) = \dots = \psi_{j_0}(l_{j_0},t), \tag{42}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0}\frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(l_j,t) = 0. \tag{43}$$

$$\psi_j(y_j,0) = \varphi_j(y_j). \tag{44}$$

Отметим, что функции $\psi_j(y_j,t)$, для начально-краевых задач (40) – (44), удовлетворяют граничным условиям (41) – (43) с постоянными длинами ребер $y_j = l_j$, а не с зависящими от времени $x_j = L_j(t)$. Поэтому они фактически удовлетворяют граничным условиям начально-краевой задачи (4) – (6).

Таким образом, используя (38) после замены переменных мы начально-краевую задачу (33) – (37) для графа $\mathbf{G}_t$ с изменяющимися ребрами свели к задаче (40) – (44) для графа $\mathbf{G}_t$ с ребрами постоянной длины.

Составим из рассмотренной ранее вектор-функции $\mathbf{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{j_0})$ следующие системы функций (см. (28))

$$\{\omega_{jn}(y_j,t) = e^{-\lambda_n t}\phi_{jn}(y_j)\}_{n=1}^{\infty},\ j = \overline{1, j_0}. \tag{45}$$

В пространстве функций $L^{2,1}(\mathbf{G}_t)$ система функций $\{\mathbf{\Omega}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна. В самом деле, используя (9) получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{G}_t}\mathbf{\Omega}_n\mathbf{\Omega}_m d\mathbf{y}d\tau = \int\limits_0^t\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\omega_{jn}(y_j,\tau)\omega_{jm}(y_j,\tau)dy_jd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t e^{-\lambda_n\tau}d\tau\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\phi_{jn}(y_j)\phi_{jm}(y_j)dy_j = 0,\ n \neq m.$$

Нормализируем систему (45), используя (9)

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{G}_t}\mathbf{\Omega}_n^2 d\mathbf{y}d\tau = \int\limits_0^t\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\omega_{jn}^2(y_j,\tau)dy_jd\tau = \int\limits_0^t e^{-2\lambda_n\tau}d\tau\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\phi_{jn}^2(y_j)dy_j =$$

$$= \int\limits_0^t e^{-2\lambda_n\tau}d\tau = \frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{2\lambda_n}.$$

Обозначим

$$D_n = \sqrt{\frac{2\lambda_n}{1 - e^{-2\lambda_n t}}}. \tag{46}$$

Тогда система функций

$$\{\tilde{\mathbf{\Omega}}_n = D_n \mathbf{\Omega}_n\}_{n=1}^{\infty},\ \tilde{\omega}_{jn}(y_j,t) = D_n e^{-\lambda_n t}\phi_{jn}(y_j),\ j=\overline{1,j_0},\ n\in N, \tag{47}$$

будет ортонормированной на $L^{2,1}(\mathbf{G}_t)$, т. е.

$$\int_0^t \int_{\mathbf{G}_t} \tilde{\mathbf{\Omega}}_n \tilde{\mathbf{\Omega}}_m d\mathbf{y} d\tau = \begin{cases} 0,\ n\neq m,\\ 1,\ n=m.\end{cases} \tag{48}$$

Отметим, что скалярные произведения $\Big(L(\tilde{\mathbf{\Omega}}_n(y_j,t)), \tilde{\mathbf{\Omega}}_m(y_j,t)\Big)$ в этом случае вычисляются по формулам

$$\Big(\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{\Omega}}_n(y_j,t)), \tilde{\mathbf{\Omega}}_m(y_j,t)\Big) = \int_0^t \sum_{j=1}^{j_0} \int_0^{l_j} \mathbf{F}\Big(\tilde{\omega}_{jn}(y_j,t)\Big)\tilde{\omega}_{jm}(y_j,t)dy_j dt. \tag{49}$$

В работах [1–4] был разработан новый метод вычисления приближенных значений собственных чисел дискретных полуограниченных дифференциальных операторов. Пусть для дискретного полуограниченного дифференциального оператора U, который задан в гильбертовом пространстве H, рассматривается спектральная задача

$$Uu = \mu u,\ Gu|_{\Gamma} = 0. \tag{50}$$

Построим последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств, которая будет полной в H. Если известны ортонормированные базисы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ пространств $H_n \subseteq H$ удовлетворяющие граничным условия (49), то справедлива следующая теорема [5].

Теорема 1. Приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_n$ спектральной задачи (49) находятся по линейным формулам

$$\tilde{\mu}_n = (U\varphi_n, \varphi_n) + \tilde{\delta}_n,\ n\in N, \tag{51}$$

где $\tilde{\delta}_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}[\tilde{\mu}_k(n-1) - \tilde{\mu}_k(n)]$, $\tilde{\mu}_k(n)$ – n-е приближение по Галеркину к соответствующим значениям μ_k спектральной задачи (49). При этом $\lim\limits_{n\to\infty}|\tilde{\delta}_n| = 0$.

Для решения нашей задачи нахождения собственных значений краевых задач заданных на графе звезда с подвижными ребрами (40) – (44) воспользуемся теоремой 1, взяв в качестве базовых функций систему функций $\{\tilde{\mathbf{\Omega}}_n\}_{n=1}^{\infty}$. В результате получим

$$\tilde{\mu}_n(t) = \int_0^t \int_{\mathbf{G}} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{\Omega}}_n)\tilde{\mathbf{\Omega}}_n d\mathbf{y} d\tau + \tilde{\delta}_n = \int_0^t \sum_{j=1}^{j_0}\int_0^{l_j} \Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau) -$$

$$-\frac{1}{(L(\tau))^2}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau) - \frac{\dot{L}(\tau)}{L(\tau)}y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{\omega}_{j(n}y_j,\tau)\Big]\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)dy_j d\tau + \tilde{\delta}_n(t).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_n(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{j_0}\int_0^{l_j} \Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau) - \frac{1}{(L(\tau))^2}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau) -\\ -\frac{\dot{L}(\tau)}{L(\tau)}y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)\Big]\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)dy_j d\tau + \tilde{\delta}_n(t).\end{aligned} \tag{52}$$

Вычислим интегралы входящие в первые подинтегральные суммы формул (51) используя нормировку системы функций $\{\mathbf{\Phi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (9) заданной на графе $\mathbf{G}$

$$\int\limits_0^t \sum_{j=1}^{j_0} \int\limits_0^{l_j} \tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)dy_j d\tau = -\lambda_n D_n^2 \int\limits_0^t e^{-2\lambda_n \tau}d\tau \sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\phi_{jn}^2(y_j)dy_j =$$
$$= -\lambda_n D_n^2 \int\limits_0^t e^{-2\lambda_n \tau}d\tau = -\frac{D_n^2}{2}\Big(1-e^{-2\lambda_n t}\Big). \tag{53}$$

Для вторых слагаемых найдем

$$\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,t)\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,t)dy_j = D_n^2 e^{-2\lambda_n t}\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\phi_{jn}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\phi_{jn}(y_j,t)dy_j =$$

$$= -\lambda_n^2 D_n^2 e^{-2\lambda_n t}\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\phi_{jn}^2(y_j)dy_j = -\lambda_n^2 D_n^2 e^{-2\lambda_n t}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^t \frac{1}{(L(\tau))^2}\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)dy_j d\tau = -\lambda_n^2 D_n^2\int\limits_0^t \frac{e^{-2\lambda_n\tau}}{(L(\tau))^2}d\tau. \tag{54}$$

Используя (10) для третьих членов имеем

$$\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j} y_j\tilde{\omega}_{jn}(y_j,t)\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,t)dy_j = D_n^2 e^{-2\lambda_n t}\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j} y_j\phi_{jn}(y_j)\frac{\partial}{\partial y_j}\phi_{jn}(y_j)dy_j =$$

$$= \frac{\lambda_n D_n^2 B_n^2 e^{-2\lambda_n t}}{2}\sum_{j=1}^{j_0}\frac{1}{\sin^2(\lambda_n l_j)}\int\limits_0^{l_j} y_j\sin(2\lambda_n y_j)dy_j =$$

$$= \frac{D_n^2 B_n^2 e^{-2\lambda_n t}}{8\lambda_n}\sum_{j=1}^{j_0}\frac{\sin(2\lambda_n l_j) - 2\lambda_n l_j\cos(2\lambda_n l_j)}{\sin^2(\lambda_n l_j)}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j}\frac{\dot{L}(\tau)}{L(\tau)}y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)\tilde{\omega}_{jn}(y_j,\tau)dy_j d\tau =$$
$$= \frac{D_n^2 B_n^2}{8\lambda_n}\int\limits_0^t\frac{\dot{L}(\tau)}{L(\tau)}e^{-2\lambda_n\tau}d\tau\sum_{j=1}^{j_0}\frac{\sin(2\lambda_n l_j) - 2\lambda_n l_j\cos(2\lambda_n l_j)}{\sin^2(\lambda_n l_j)}. \tag{55}$$

С учетом (52) – (54) получим линейные формулы, позволяющие находить приближенные значения собственных чисел вектор-оператора $\mathbf{P}$, заданного на квантовом графе $\mathbf{G}_T$

$$\tilde{\mu}_n(t) = \int\limits_0^t e^{-2\lambda_n\tau}\sum_{j=1}^{j_0}\int\limits_0^{l_j} D_n^2\Big[\phi_{jn}(y_j) - \frac{1}{(L(\tau))^2}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\phi_{jn}(y_j) -$$

$$-\frac{\dot{L}(\tau)}{L(\tau)}y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\phi_{jn}(y_j)\Big]\phi_{jn}(y_j)dy_jd\tau+\tilde{\delta}_n(t)=-\frac{D_n^2}{2}\Big(1-e^{-2\lambda_nt}\Big)+$$

$$+\lambda_n^2D_n^2\int\limits_0^t\frac{e^{-2\lambda_n\tau}}{(L(\tau))^2}d\tau-\frac{D_n^2B_n^2}{8\lambda_n}\int\limits_0^t\frac{\dot{L}(\tau)}{L(\tau)}e^{-2\lambda_n\tau}d\tau\sum_{j=1}^{j_0}\frac{\sin(2\lambda_nl_j)-2\lambda_nl_j\cos(2\lambda_nl_j)}{\sin^2(\lambda_nl_j)}+\tilde{\delta}_n(t)=$$

$$=-\frac{D_n^2}{2}\Big(1-e^{-2\lambda_nt}\Big)+D_n^2\int\limits_0^tR_n(\tau)\frac{e^{-2\lambda_n\tau}}{L(t)}d\tau+\tilde{\delta}_n(t),$$

где

$$R_n(t)=\frac{\lambda_n^2}{L(t)}-\frac{B_n^2\dot{L}(t)}{8\lambda_n}\sum_{j=1}^{j_0}\frac{\sin(2\lambda_nl_j)-2\lambda_nl_j\cos(2\lambda_nl_j)}{\sin^2(\lambda_nl_j)}.$$

Итак, собственные числа вектор оператора $\mathbf{F}$ заданного на квантовом графе $\mathbf{G}_t$ с изменяющимися во времени ребрами вычисляются по формулам

$$\tilde{\mu}_n(t)=-\frac{D_n^2}{2}\Big(1-e^{-2\lambda_nt}\Big)+D_n^2\int\limits_0^t\frac{R_n(\tau)}{L(\tau)}e^{-2\lambda_n\tau}d\tau+\tilde{\delta}_n(t),\ n\in N. \tag{56}$$

Используя формулу (56) можно находить приближенные значения собственных чисел дискретных полуограниченных операторов с необходимыми порядковыми номерами.

3. Вычислительные эксперименты

С использованием формулы (56) проведены многочисленные вычислительные эксперименты по нахождению приближенных значений первых собственных чисел оператора $\mathbf{F}$ заданного на квантовом графе $\mathbf{G}_t$ с переменными ребрами. Для проверки правильности формул (56) использовался метод Галеркина. Обозначим через $\hat{\mu}$ приближенные собственные числа оператора $\mathbf{F}$ найденные методом Галеркина на основе формул (49). Параметры моделирования были выбраны следующие:

$$j_0=3,\ l_1=1,\ l_2=e,\ l_3=\pi,a=1,\ b=0,5,\ \omega=1.$$

Надо отметить, что в нашем случае если $\tilde{\delta}_n(t)=0$, то собственные числа $\tilde{\mu}_n(t)$ вычисленные по формулам (56) будут действительными. Для того, чтобы вычислить комплексные собственные числа, если они есть у оператора $\mathbf{F}$, надо находить $\tilde{\delta}_n(t)$. Что и было сделано при проведении всех вычислительных экспериментов. В табл. приведены результаты вычисления собственных чисел при в момент времени $t=2\pi/3$.

Проведенные вычислительные исследования показали высокую вычислительную эффективность разработанной методики нахождения собственных чисел дифференциальных операторов в частных производных заданных на графе-звезда с меняющимися во времени ребрами.

Заключение

В статье предложена методика нахождения приближенных значений собственных чисел дискретных полуограниченных операторов заданных на графе-звезда с переменными ребрами. Формулы (56) позволят в дальнейшем, используя теорию решения

Таблица

Результаты вычислений первых собственных чисел в момент времени $t = 2\pi/3$

n	$\tilde{\mu}_n$	$\hat{\mu}_n$	$\lvert\tilde{\mu}_n - \hat{\mu}_n\rvert$
1	$-0,545$	$-0,511$	$0,331 \cdot 10^{-2}$
2	$-0,363 + 0,113i$	$-0,349 + 0,118i$	$1,143 \cdot 10^{-1}$
3	$-0,244$	$-0,349 - 0,118i$	$1,048 \cdot 10^{-1}$
4	$-0,097$	$-0,078$	$1,849 \cdot 10^{-2}$
5	$0,367$	$0,381$	$1,432 \cdot 10^{-2}$
6	$1,085$	$1,101$	$1,158 \cdot 10^{-2}$
7	$1,753$	$1,762$	$8,463 \cdot 10^{-3}$
8	$2,769$	$2,779$	$1,072 \cdot 10^{-2}$
9	$4,078$	$4,086$	$7,939 \cdot 10^{-3}$
10	$5,565$	$5,572$	$7,124 \cdot 10^{-3}$
11	$7,172$	$7,180$	$7,238 \cdot 10^{-3}$
12	$9,465$	$9,469$	$4,723 \cdot 10^{-3}$
13	$10,404$	$10,410$	$6,395 \cdot 10^{-3}$
14	$13,364$	$13,369$	$4,637 \cdot 10^{-3}$
15	$14,686$	$14,690$	$4,267 \cdot 10^{-3}$
16	$17,906$	$17,906$	$4,046 \cdot 10^{-4}$

обратных спектральных задач на квантовых графах с неподвижными ребрами [4], разработать методику решения обратных спектральных заданных на квантовых графах с подвижными ребрами.

Литература

1. Kadchenko, S.I. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – V. 10, № 7. – P. 323–329.

2. Кадченко, С.И. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник Самарского Университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – Т. 6, № 97. – С. 13–21.

3. Кадченко, С.И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С.И. Кадченко, И.И. Кинзина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265–1273.

4. Кадченко, С.И. Алгоритмы вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов заданных на квантовых графах / С.И. Кадченко, А.В. Ставцова, Л.С. Рязанова, В.В. Дубровский // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2023. – Т. 15, № 1. – С. 6–25.

5. Кадченко, С.И. Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными возмущенными операторами, методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2013. – Т. 6, № 10. – С. 23–30.

6. Провоторов, В.В. Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля на графе-звезде / В.В. Провоторов // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 10. – С. 105–126.

7. Keating, J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs / J.P. Keating // Proceedings of an AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Quantum Graphs and Their Applications. – Snowbird, 2006. – V. 415. – P. 191–200.
8. Matrasulov, D.U. Time-Dependent Quantum Graph / D.U. Matrasulov, J.R. Yusupov, K.K. Sabirov, Z.A. Sobirov // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2015. – V. 6, № 2. – P. 173–181.
9. Никифоров, Д.С. Модель квантовых графов с ребрами меняющейся длины: дисс. ... канд. тех. наук. – Санкт–Петербург, 2018. – 125 с.

Сергей Иванович Кадченко, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация), sikadchenko@mail.ru.

Любовь Сергеевна Рязанова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация), ryazanovals23@gmail.com.

Иван Евгеньевич Кадченко, студент, Московский государственный университета им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (г. Магнитогорск, Российская Федерация), kadchenko.ivan@mail.ru.

Поступила в редакцию 4 сентября 2024 г.

MSC 47A10 **DOI: 10.14529/mmp240405**

ALGORITHMS FOR CALCULATING EIGENVALUES OF DISCRETE SEMI-BOUNDED OPERATORS DEFINED ON QUANTUM GRAPHS OF STAR TYPE WITH VARIABLE EDGES

***S.I. Kadchenko*[1]*, L.S. Ryazanova*[1]*, I.E. Kadchenko*[1]**
[1]Magnitogorsk State Technical University named G.I. Nosova,
Magnitogorsk, Russian Federation
E-mail: sikadchenko@mail.ru, ryazanovals23@gmail.com,
kadchenko.ivan@mail.ru

The article develops algorithms for calculating the eigenvalues of initial-boundary value problems for differential equations defined on a star graph with variable edges. Numerical experiments on calculating the eigenvalues of the problems under study were carried out in the Maple mathematical environment. The developed technique can be transferred to boundary value problems for any discrete semi-bounded operators and will allow developing algorithms for solving inverse spectral problems defined on quantum graphs with variable edges.

Keywords: graphs; eigenvalues and eigenfunctions; discrete and self-adjoint operators; regularized trace method; Galerkin method.

References

1. Kadchenko S.I., Zakirova G.A. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 7, pp. 323–329. DOI: 10.12988/AMS.2016.510625

2. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculating of Meanings of Eigen Functions of Discrete Semibounded From Below Operators via Method of Regularized Traces. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2012, vol. 6, no. 97, pp. 13–21.
3. Kadchenko S.I., Kinzina I.I. Computation of Eigenvalues of Perturbed Discrete Semibounded Operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 7, pp. 1265–1273. DOI: 10.1134/S0965542506070116
4. Kadchenko S.I., Stavtceva A.V., Ryazanova L.S., Dubrovskii V.V. Algorithms for the Computation of the Eigenvalues of Discrete Semi-Bounded Operators Defined on Quantum Graphs. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2023, vol. 15, no. 1, pp. 6–25. DOI: 10.14529/mmph230102
5. Kadchenko S.I. Numerical Method for the Solution of Inverse Problems Generated by Perturbations of Self-Adjoint Operators by Method of Regularized Traces. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2013, vol. 6, no. 10, pp. 23–30.
6. Provotorov V.V. Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem on a Star Graph. *Sbornik: Mathematics*, 2008, vol. 199, no. 10, pp. 105–126. DOI: 10.1070/SM2008v199n10ABEH003971
7. Keating J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs. *Proceedings of an AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Quantum Graphs and Their Applications*, Snowbird, 2006, vol. 415, pp. 191–200.
8. Matrasulov D.U., Yusupov J.R., Sabirov K.K., Sobirov Z.A. Time-Dependent Quantum Graph. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 173–181. DOI: 10.17586/2220-8054-2015-6-2-173-181
9. Nikiforov D.S. [A Model of Quantum Graphs with Edges of Varying Length]: diss ... cand. tech. nauk. – St. Petersburg, 2018. – 125 p.

Received September 4, 2024