УДК 519.642.4 DOI: 10.14529/mmp250109

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ

В.П. Шапеев[1]***, П.И. Кириллов***[1]

[1]Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

Для численного решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода предложен новый алгоритм на основе метода коллокации и наименьших квадратов с полиномиальной аппроксимацией. В нем решение отыскивается в виде полиномиального аппроксиманта с неопределенными коэффициентами, после подстановки которого в изначальное уравнение получается приближенное относительно искомых коэффициентов уравнение. Для его решения применяется метод коллокации, причем число точек коллокации берется чаще всего больше числа коэффициентов искомого аппроксиманта. Коллокациями полученного уравнения получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно искомых коэффициентов. Предложенный алгоритм реализован в компьютерной программе. Его применением решен ряд уравнений, решенных другими методами и приведенных в известных публикациях. Сравнением численных результатов показано преимущество по точности нового алгоритма перед другими методами, примененными для решения этих уравнений. В численных экспериментах исследовано влияние параметров метода на обусловленность переопределенных СЛАУ, решением которых отыскиваются полиномиальные аппроксимации решения интегральных уравнений. В таблицах численных результатов приведены значения параметров алгоритма, с которыми получены конкретные решения: степень аппроксимирующего полинома, число ячеек и узлов квадратуры Гаусса, степень переопределенности и обусловленность матрицы СЛАУ.

Ключевые слова: двумерные интегральные уравнения Фредгольма второго рода; прямой метод; квадратуры Гаусса; метод коллокации; линейная задача наименьших квадратов; обусловленность СЛАУ.

Введение

Интегральные уравнения широко применяются для математического описания многих процессов естествознания и получения их количественных характеристик в физике, механике, теории управления, прикладной математике [1–3]. К интегральным уравнениям сводятся многие краевые задачи математической физики [4,5]. Ввиду важности решения задач, связанных с интегральными уравнениями в вычислительной математике создано значительное количество различных методов их приближенного решения: методы квадратурных и кубатурных формул, последовательных приближений, замена ядра на вырожденное, разностные методы и сведение интегральных уравнений к дифференциальным уравнениям [6, 7], метод регуляризации Тихонова А.Н. для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода [8,9]. Численные методы решения интегральных уравнений позволили получить эффективный инструмент математического моделирования прикладных задач. Применение компьютеров значительно расширило возможности приложения интегральных уравнений к решению подобных задач.

В данной работе предложен и реализован на компьютере новый алгоритм численного решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В нем комбинируются метод коллокации, квадратуры Гаусса и решение линейной задачи наименьших квадратов. Этот подход был предложен и эффективно использован для решения одномерных интегральных уравнений в [10]. В нем новизна заключалась в том, что решение интегрального уравнения сводилось к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений – к решению линейной задачи наименьших квадратов. Для представления приближенного решения интегрального уравнения, как и в некоторых других методах, применяется его полиномиальная аппроксимация в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных функций полиномиального пространства. Применением такой аппроксимации интегрального уравнения получается уравнение относительно коэффициентов аппроксиманта решения. В случае нелинейного исходного уравнения получается нелинейное уравнение относительно коэффициентов искомого аппроксиманта. С целью сведения его решения к решению линейной задачи наименьших квадратов на отрезке решения исходного уравнения задаются точки коллокации в количестве превышающем количество неопределенных коэффициентов аппроксиманта. Коллокациями полученного нелинейного уравнения получается система уравнений для определения аппроксиманта – уравнения коллокаций, которая решается итерациями. При этом на каждой текущей итерации численное значение некоторых частей уравнений коллокации берется с предыдущей итерации так, что на каждой итерации относительно искомых коэффициентов аппроксиманта решается переопределенная система линейных алгебраических уравнений. Такой подход к сведению решения нелинейных уравнений коллокации к решению СЛАУ применялся в [11] при аппроксимации решения дробно-рациональной функцией. Применение QR-декомпозиции матрицы дает решение, на котором имеет место минимум ее функционала невязки [12]. То есть, получается решение линейной задачи наименьших квадратов [13]. Достоинство метода коллокации заключается в том, что его алгоритм достаточно прост и относительно легко реализуется в компьютерных программах. Он весьма эффективно применяется для решения не жестких систем дифференциальных уравнений [14]. Но при численном решении плохо обусловленных задач для уравнений с частными производными, например, для уравнений Навье – Стокса при относительно больших числах Рейнольдса путем аппроксимации методом коллокации получаются плохо обусловленные СЛАУ. Модификация метода коллокации путем его комбинации с методом наименьших квадратов (МНК) или со взвешенным методом наименьших квдратов при численном решении задач позволяет получать лучше обусловленные СЛАУ, чем в случае отсутствия такой комбинации [12]. Гаусс впервые успешно применил МНК при построении одномерных аппроксимантов (Джереми Грей. Исторический очерк о великом математике Карле Фридрихе Гауссе. https://habr.com/ru/articles/332966/ Хабр, 2017). Возможность получения лучше обусловленных СЛАУ применением МНК проявляется при решении одномерных, двумерных и трехмерных дифференциальных уравнений [15, 16], а также при решении одномерных интегральных уравнений. При комбинировании метода конечных элементов с МНК в методе LSFEM имеет место аналогичный эффект [17].

Цель представленной здесь работы – реализация метода коллокации и наименьших квадратов (КНК) решения двумерных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с полиномиальной аппроксимацией и исследование его свойств в зависимости от значений параметров численного алгоритма.

Здесь приближенное решение уравнения представлено в виде полинома с неопределенными коэффициентами в каждом элементе разбиения расчетной области – ячейке прямоугольной сетки. В работе проведено исследование зависимости погрешности приближенного численного решения от степени переопределенности СЛАУ, к решению которых сводится поиск решения заданного интегрального уравнения, степени аппроксимирующего полинома и разбиения расчетной области.

Предложенный в данной работе вариант алгоритма численного решения реализовывался в виде компьютерной программе. Здесь это сделано с помощью средств языка программирования C++. Такая программа применима для решения конкретных интегральных уравнений, получения количественных характеристик их решения и оценки точности численных результатов.

1. Постановка задачи и способ ее решения

В двумерной расчетной области Ω рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x_1, x_2) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} K(x_1, x_2, s_1, s_2)u(s_1, s_2)ds_1 ds_2 + f(x_1, x_2), \tag{1}$$

где Ω – прямоугольник $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, x_1 и x_2 – координаты точек области в прямоугольной системе координат, $u(x_1, x_2)$ – искомое решение, $K(x_1, x_2, s_1, s_2)$, $f(x_1, x_2)$ – ядро и свободный член, соответственно. Зададим в Ω сетку из $n_1 \times n_2$ равных ячеек размера $h_1 \times h_2$ со сквозной нумерацией в виде одномерного массива, где $h_1 = \frac{b_1 - a_1}{n_1}, h_2 = \frac{b_2 - a_2}{n_2}$. Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно-полиномиальной функции u_{hi}, $i = \overline{1, n_1 \times n_2}$ степени p, которая в i-й ячейке имеет вид

$$u_{hi}(x_1, x_2) = \sum_{i_1=0}^{p}\sum_{i_2=0}^{p-i_1} c_{i_1 i_2, i} x_1^{i_1} x_2^{i_2}. \tag{2}$$

Здесь степенные мономы $x_1^{i_1}$, $x_2^{i_2}$ – базисные элементы в линейном пространстве полиномов степени p, а кусок глобального решения в каждой i-й ячейке – линейная комбинация базисных элементов пространства. Необходимо найти коэффициенты представления приближенного решения (2).

Обозначим через N_c количество неизвестных коэффициентов $c_{i_1 i_2, i}$ в представлении приближенного решения в каждой ячейке, так что $N_c = (p + 2)(p + 1)/2$. В результате аппроксимации уравнения (1) устанавливаем, что приближенное решение уравнения определяется решением уравнения

$$u_{hi}(x_1, x_2) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} K(x_1, x_2, s_1, s_2)u_h(s_1, s_2)ds_1 ds_2 + f(x_1, x_2),\ i = \overline{1, n_1 \times n_2}, \tag{3}$$

где $u_h(s_1, s_2) = \{u_{hi}(s_1, s_2),\ i = \overline{1, n_1 \times n_2}\}$.

В каждой ячейке зададим v точек коллокации (x_{1cl}, x_{2cl}), при этом возьмем $v \geq N_c$. Уравнения коллокации получаются требованием того, чтобы невязка уравнения (3) на искомом приближенном решении в точках коллокации равнялась нулю. Коэффициенты $c_{i_1 i_2, i}$ определяются из уравнений коллокации

$$u_{hi}(x_{1cl}, x_{2cl}) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} K(x_{1cl}, x_{2cl}, s_1, s_2)u_h(s_1, s_2)ds_1 ds_2 + f(x_{1cl}, x_{2cl}). \tag{4}$$

В реализованном варианте метода точки коллокации располагались равномерно в каждой ячейке, включая ее границы. Коллокацией уравнения (3) в указанных точках в каждой ячейке относительно N_c неопределенных коэффициентов $c_{i_1 i_2, i}$ получим переопределенную систему v уравнений коллокации. Хотя на общих сторонах соседних ячеек точки коллокации совпадают, однако это не приводит к записи одинаковых уравнений в этих точках, т.к. левые части всех этих пар уравнений в соседних ячейках представляют собой различные куски u_{hi} кусочно-полиномиального решения. Повторный интеграл в (4) перенесем со знаком минус в левую часть уравнения коллокации и приближенно вычислим во всей области Ω в рассматриваемой точке (x_{1cl}, x_{2cl}) с помощью прямого произведения одномерных квадратурных формул Гаусса [5] с d_1 и d_2 узлами и весами на отрезках $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, соответственно, то есть следующим образом:

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} K(x_{1cl}, x_{2cl}, s_1, s_2) u_h(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \approx \sum_{\sigma_2=1}^{d_2} \sum_{\sigma_1=1}^{d_1} \omega_{\sigma_1}\omega_{\sigma_2} K(x_{1cl}, x_{2cl}, \eta_{\sigma_1}, \eta_{\sigma_2}) u_h(\eta_{\sigma_1}, \eta_{\sigma_2}). \quad (5)$$

Здесь $\omega_{\sigma_1} = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)\gamma_{\sigma_1}$, $\omega_{\sigma_2} = \frac{1}{2}(b_2 - a_2)\gamma_{\sigma_2}$ и $\eta_{\sigma_1} = \frac{1}{2}(b_1 + a_1) + \frac{1}{2}(b_1 - a_1)\xi_{\sigma_1}$, $\eta_{\sigma_2} = \frac{1}{2}(b_2 + a_2) + \frac{1}{2}(b_2 - a_2)\xi_{\sigma_2}$, где γ_{σ_1}, γ_{σ_2} и ξ_{σ_1}, ξ_{σ_2} – веса и узлы одномерной квадратурной формулы Гаусса на отрезке $[-1, 1]$, соответственно, $\sigma_1 = \overline{1, d_1}$ и $\sigma_2 = \overline{1, d_2}$. Значения узлов и весов для любых d_1 и d_2 брались с точными 16-тью десятичными разрядами. Отметим, что при реализации метода, а именно записи уравнений коллокации в память ЭВМ, необходимо запоминать номера всех ячеек, в которые попала хотя бы одна пара из набора пар узлов $(\eta_{\sigma_1}, \eta_{\sigma_2})$, используемых в правой части формулы (5).

Таким образом, относительно искомых коэффициентов $c_{i_1 i_2, i}$ в каждой ячейке коллокацией уравнения (3) выписывается переопределенная система из v линейных уравнений, элементы матрицы которой – числа. Ее можно назвать частичной СЛАУ.

В результате объединения всех частичных СЛАУ получается СЛАУ вида:

$$\mathbf{A}\overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathbf{B}}, \quad (6)$$

где $\mathbf{A}$ – прямоугольная матрица размера $(n_1 \cdot n_2 \cdot v) \times (n_1 \cdot n_2 \cdot N_c)$, $\overline{\mathrm{C}}$ – вектор из $n_1 \cdot n_2 \cdot N_c$ неизвестных коэффициентов представления решения уравнения (3) и $\overline{\mathbf{B}}$ – вектор правой части с $n_1 \cdot n_2 \cdot v$ компонентами. Из (6) в области Ω полностью определяется кусочно-полиномиальная функция – решение уравнения (3). В каждой ячейке оно является решением v уравнений. Величину

$$\zeta = \frac{v}{N_c} \quad (7)$$

назовем степенью переопределенности СЛАУ. Далее в численных эксперементах будет показано, что от ζ зависит точность приближенного численного решения. Причина в том, что ζ влияет на обусловленность получаемых СЛАУ. С его ростом от значения $\zeta = 1$ до некоторого ζ_{cr}, как правило, улучшается обусловленность рассматриваемых в методе КНК переопределенных СЛАУ, что показано в численных экспериментах решения конкретных примеров уравнения (1). Но при дальнейшем росте ζ, когда существенно увеличивается размер матрицы СЛАУ ухудшается ее обусловленность, и при решении ее любым численным методом увеличивается число арифметических действий, это приводит к увеличению накопления ошибок округлений в процессе вычислений и к росту погрешности решения. Такое свойство величины ζ в методе КНК также имеет место в случае его приложения к решению краевых задач для уравнений с частными производными с применением полиномиальной аппроксимации и в случае решения ОДУ с аппроксимацией Паде [11]. Также отметим, что точность решения различных задач с применением полиномиальной аппроксимации при относительно невысокой степени полиномов p растет с ростом его значения только до некоторого критического значения p_{cr}. Значение его зависит прежде всего от свойств решаемой задачи, от применяемых при этом вспомогательных численных методов, от разрядности представления чисел на компьютере. С ростом p также быстро растет обусловленность СЛАУ, к решению которых сводится поиск аппроксимантов. Такое свойство метода КНК не исключение среди численных методов. Например, оно аналогично свойству метода Галёркина [18].

Для решения системы (6) применим **QR**-декомпозицию матрицы СЛАУ:

$$\mathbf{QR}\overline{\mathrm{C}} = \overline{\mathbf{B}}. \tag{8}$$

Для построения матрицы **Q** применялся метод вращений Гивенса с выбором главного элемента в столбце. В ортогональной матрице **Q** выделяется подматрица $\mathbf{Q_1}$ размера $(n_1 \cdot n_2 \cdot v) \times (n_1 \cdot n_2 \cdot N_c)$ из первых $n_1 \cdot n_2 \cdot N_c$ столбцов матрицы **Q**. В матрице **R** выделяется верхнетреугольная матрица $\mathbf{R_1}$ размера $(n_1 \cdot n_2 \cdot N_c) \times (n_1 \cdot n_2 \cdot N_c)$, и решение находится как $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{R_1^{-1}}(\mathbf{Q_1^T}\overline{\mathbf{B}})$. На этом решении достигается минимум функционала невязки решаемой СЛАУ [12], то есть оно является решением линейной задачи наименьших квадратов.

2. Численные эксперименты

В численных экспериментах в области Ω в равномерной норме подсчитывался максимум погрешности решения:

$$E_r = \parallel u_t - u_h \parallel_C = \max_W |u_t(x_{1w}, x_{2w}) - u_h(x_{1w}, x_{2w})|, \tag{9}$$

где u_t – точное решение уравнения (1), $W = \{x_w = (x_{1w}, x_{2w}) \mid x_{1w} = a_1 + \frac{w_1(b_1-a_1)}{99}, w_1 = \overline{0,99};\; x_{2w} = a_2 + \frac{w_2(b_2-a_2)}{99}, w_2 = \overline{0,99}\}$ – множество точек, в области Ω. То есть, для подсчета величины погрешности в области взяты 10000 контрольных точек, расположенных в ней равномерно, включая границы области.

Далее приведем таблицы результатов численного решения по изложенному алгоритму примеров, взятых, кроме последнего, из публикаций других авторов и решенных другими методами, отличными от изложенного здесь. В таблицах приведены числа обусловленности ($cond$) матриц **R** решенных СЛАУ. Для подсчета числа обусловленности использована написанная на C++ внешняя библиотека Eigen версии 3.4.0 (https://gitlab.com/libeigen/eigen/-/releases/3.4.0?ysclid=lz8jtqr05u396750266). С ее помощью сначала отыскивалось SVD-разложение матрицы **R**. Далее число обусловленности определялось как результат деления максимального сингулярного числа матрицы на минимальное. При мельчении шагов сетки, а также при увеличении степени полинома в (2), аппроксимирующего решение, наблюдался существенный рост значения числа обусловленности. Так же в примерах наблюдалось, что почти всегда в случаях когда степень переопределенности СЛАУ ζ была менее 2, применяемая библиотека Eigen выдавала в результате минимальное сингулярное число матрицы равным нулю, в силу чего числа обусловленности таких матриц обращались в бесконечность. В этих случаях в таблицах значение числа обусловленности обозначено как INF. Порядок сходимости решения ($order$) определялся общепринятым способом как $log_2(E_{r\,h_1h_2}/E_{r\,\frac{h_1}{2}\frac{h_2}{2}})$, где $E_{r\,h_1h_2}$ и $E_{r\,\frac{h_1}{2}\frac{h_2}{2}}$ погрешности, вычисленные на двух последовательных сетках при мельчениях шагов сетки вдвое по обоим направлениям осей координат при равных прочих параметрах метода. Прочерк «– – –» обозначает, что до рассматриваемого численного эксперимента при прочих равных параметрах значение погрешности не вычислялось на более грубой сетке или же, что значение погрешности на более мелкой сетке больше ее значения на более грубой сетке и на этом этапе мельчения сетки нет сходимости приближенного решения. Все численные расчеты были проведены на персональном компьютере с процессором Intel(R) Xeon(R) CPU X5675, имеющим частоту 3.68GHz.

В данной работе было проведено достаточное количество численных экспериментов. Для экономии места здесь приводим результаты по решению только четырех примеров и только две таблицы численных результатов, которые, как нам кажется, в достаточной мере характеризуют поведение точности решения интегральных уравнений по предложенному здесь алгоритму в зависимости от значений его параметров. Результаты экспериментов, которые в этом отношении практически не несут дополнительной информации, также опущены. Прежде всего отметим, что полученные результаты показывают его высокую точность, которая значительно превосходит по этому показателю методы, с которыми было проведено сравнение. Здесь не преследовалась цель достичь по ней наилучшей возможной точности за счет выбора значений параметров метода. Но из результатов численных экспериментов по решению каждого из приведенных здесь уравнений можно видеть, что существует целая область значений параметров алгоритма, при использовании которых получается высокая точность решений. Поэтому выбрать для этого какие-то значения параметров не представляло труда.

Рассмотрим уравнение в примере 1 работы [19] с функциями:

$$u_t(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_2} - 1,$$

$$K(x_1, x_2, s_1, s_2) = x_1 sin(x_2) + s_1 e^{s_2},$$

$$f(x_1, x_2) = u_t(x_1, x_2) + 4x_1 sin(x_2) - \frac{4}{3},$$

при $a_1 = -1$, $b_1 = 1$ и $a_2 = -1$, $b_2 = 1$. В этом примере со значениями параметров изложенного здесь алгоритма: $d_1 = 10$, $d_2 = 10$, $n_1 = 4$, $n_2 = 4$, $p = 10$, $\zeta = 2$ точность приближенного решения равна $2,46 \cdot 10^{-13}$ (табл. 1). Расчет занял 0,38 минуты. В [19] решение данного уравнения получено с точностью порядка 10^{-11}.

Таблица 1

Результаты численного решения методом КНК примера № 1 из [19]

#	n_1	n_2	p	ζ	E_r	$cond$	$order$
1	4	4	6	3	$1,07 \cdot 10^{-8}$	$3,21 \cdot 10^{7}$	$---$
2	4	4	8	3	$5,85 \cdot 10^{-12}$	$1,04 \cdot 10^{10}$	$---$
3	2	2	10	1	$2,3$	INF	$---$
4	4	4	10	1	$8,96 \cdot 10^{-2}$	INF	$4,68$
5	2	2	10	$1,5$	$2,06 \cdot 10^{-5}$	INF	$---$
6	4	4	10	$1,5$	$2,36 \cdot 10^{-5}$	INF	$---$
7	2	2	10	2	$2,15 \cdot 10^{-12}$	$4,76 \cdot 10^{8}$	$---$
8	4	4	10	2	$2,46 \cdot 10^{-13}$	$3,47 \cdot 10^{12}$	$3,12$
9	2	2	10	3	$2,19 \cdot 10^{-12}$	$4,74 \cdot 10^{8}$	$---$
10	4	4	10	3	$3,57 \cdot 10^{-13}$	$3,47 \cdot 10^{12}$	$2,61$

Из анализа табл. 1 видно, что расчетная сетка не должна быть слишком грубой, например, состоять только из четырех ячеек. Так, наиболее точные результаты были получены на менее грубой сетке из шестнадцати ячеек. При степени полиномов в представлении решения (1) меньшей 10, точность решения была хуже, чем в восьмой строке таблицы. Также видно, что значение степени переопределенности СЛАУ, решением которых получены численные решения уравнений, существенно влияет на точность их решения и обусловленность СЛАУ. Это видно при сравнении четвертой и шестой строк таблицы с ее восьмой и десятой строками. Такие же выводы можно сделать из анализа численных результатов, полученных при решении и других примеров, в частности из анализа решения следующего примера.

Далее был решен пример 1, взятый из [20],

$$u_t(x_1, x_2) = e^{(-x_1-x_2)} - \frac{x_1 x_2}{2},$$

$$K(x_1, x_2, s_1, s_2) = -x_1 x_2 e^{(s_1+s_2)},$$

$$f(x_1, x_2) = e^{(-x_1-x_2)},$$

при $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ и $a_2 = 0$, $b_2 = 1$. В этом примере со значениями параметров изложенного здесь алгоритма: $d_1 = 10$, $d_2 = 10$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $p = 10$, $\zeta = 3$ точность приближенного решения равна $2,61 \cdot 10^{-14}$ (табл. 2). Расчет занял менее секунды. В [20] решение данного уравнения получено с точностью порядка 10^{-5}.

Таблица 2

Результаты численного решения методом КНК примера № 1 из [20]

#	n_1	n_2	p	ζ	E_r	$cond$	$order$
1	2	2	6	2	$2,22 \cdot 10^{-8}$	$2,12 \cdot 10^{7}$	$---$
2	4	4	6	2	$2,18 \cdot 10^{-10}$	$2,33 \cdot 10^{9}$	$6,67$
3	2	2	6	3	$2,58 \cdot 10^{-8}$	$2,12 \cdot 10^{7}$	$---$
4	4	4	6	3	$2,53 \cdot 10^{-10}$	$2,34 \cdot 10^{9}$	$6,67$
5	2	2	8	3	$2,69 \cdot 10^{-11}$	$6,92 \cdot 10^{9}$	$---$
6	4	4	8	3	$7,19 \cdot 10^{-14}$	$3,64 \cdot 10^{12}$	$8,54$
7	2	2	10	1	$2,83 \cdot 10^{-1}$	INF	$---$
8	2	2	10	1,5	$6,8 \cdot 10^{-5}$	INF	$---$
9	2	2	10	2	$7,9 \cdot 10^{-14}$	$2,31 \cdot 10^{12}$	$---$
10	2	2	10	3	$2,61 \cdot 10^{-14}$	$2,3 \cdot 10^{12}$	$---$

В качестве следующего теста был взят пример 3.11 из книги [6, с. 168]

$$u_t(x_1, x_2) = 50 - (x_1 - 3)^2 - 2(x_2 - 2)^2,$$

$$K(x_1, x_2, s_1, s_2) = \alpha(1 - 0,0005((x_1 - s_1)^2(7 + x_1) + (x_2 - s_2)^2(8 + x_2))),$$

$$f_1(x_1, x_2) = \alpha(x_1 + 7)(0,044((8 - x_1)^3 + (x_1 + 2)^3) - 0,25x_1^2 + 1,5x_1 - 6),$$

$$f_2(x_1, x_2) = \alpha(x_2 + 8)(\frac{0,625}{9}((5 - x_2)^3 + (x_2 + 1)^3) - 0,18x_2^2 + 0,72x_2 - 1,692),$$

$$f(x_1, x_2) = u_t(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) - 2140\alpha,$$

при $\alpha = 0,1$, $a_1 = -2$, $b_1 = 8$ и $a_2 = -1$, $b_2 = 5$. В данном примере при значениях параметров: $d_1 = 8$, $d_2 = 8$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $p = 2$, $\zeta = 2$ погрешность приближенного решения, полученного по изложенному здесь алгоритму, равна $4,97 \cdot 10^{-14}$. Расчет занял менее секунды. Решение данного уравнения приведено без таблицы. Поведение точности решения в зависимости от значений параметров алгоритма аналогично ее поведению при решении других примеров, часть из которых приведена здесь. В [6] решение этого уравнения получено с точностью порядка 10^{-2}. Отметим, что при его решении методом КНК в области Ω бралась всего лишь одна ячейка ($n_1 = 1$, $n_2 = 1$), а высокоточное решение во всей расчетной области, как в псевдоспектральных методах, получилось в виде одной полиномиальной функции

$$u_h(x_1, x_2) = 33 + 6,0000000000000018x_1 + 7,9999999999999778x_2 -$$
$$-1,0000000000000002x_1^2 + 0,0000000000000005x_1x_2 - 1,9999999999999958x_2^2,$$

В записи тестового уравнения (1) использованы следующие функции:

$$u_t(x_1, x_2) = e^{(5x_1+5x_2)},$$

$$K(x_1, x_2, s_1, s_2) = 1,$$

$$f(x_1, x_2) = u_t(x_1, x_2) - \frac{(e^{5b_1} - e^{5a_1})(e^{5b_2} - e^{5a_2})}{25}.$$

при $a_1 = -1$, $b_1 = 1$ и $a_2 = -1$, $b_2 = 1$. Заметим, что решение данного уравнения имеет достаточно большие градиенты в области Ω. В этом примере при параметрах: $d_1 = 10$, $d_2 = 10$, $n_1 = 4$, $n_2 = 4$, $p = 16$, $\zeta = 2$ удалось достичь точности приближенного решения в $6,22 \cdot 10^{-7}$. Расчет занял 5,56 мин. Из анализа численного решения (для экономии места таблицу не приводим) видно, что решение полученное методом КНК имеет высокий порядок сходимости даже в случае, если точное решение имеет большие градиенты в области решения задачи.

Заключение

На основе применения метода коллокации и наименьших квадратов предложен и реализован на компьютере прямой алгоритм построения полиномиальной аппроксимации решения двумерного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В нем построение полиномиального аппроксиманта сведено к решению приближенного уравнения, полученного аппроксимацией исходного уравнения. Показана возможность высокоточного решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом КНК с полиномиальной аппроксимацией, даже в случае когда точное решение уравнения (1) имеет большие градиенты в области решения задачи. А так же продемонстрировано, что последовательность приближенных численных решений, полученных методом КНК, сходится с высоким порядком, который коррелирует со степенью аппроксимирующего полинома. Исследованы зависимость погрешности приближенного решения и числа обусловленности СЛАУ, решение которой определяет искомый полиномиальный аппроксимант, от ее степени переопределенности, от количества ячеек разбиения области решения задачи, на котором решается уравнение, от степени аппроксиманта. Эффективность предложенной процедуры показана сравнением результатов, полученных ее применением для решения примеров, с результатами их решения, опубликованными другими авторами. Одно из достоинств предложенного алгоритма в том, что в качестве решения уравнения получается высокоточный его аппроксимант, значение которого небольшим числом арифметических действий можно вычислить в любой точке области решения заданного уравнения.

Работа проводилась при финансовой поддержке РНФ грантом № 23-21-00499.

Литература

1. Михлин, С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С.Г. Михлин. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1947.
2. Schafer, H. Novel Approach to the Analysis of Broadband Dielectric Spectra / H. Schafer, E. Sternin, R. Stannarius, M. Arndt, F. Kremer // Physical Review Letters. – 1996. – V. 76, № 12. – P. 2177–2180.
3. Daddi-Moussa-Ider, A. Asymmetric Stokes Flow Induced by a Transverse Point Force Acting near a Finite-Sized Elastic Membrane / A. Daddi-Moussa-Ider // Journal of the Physical Society of Japan. – 2020. – V. 89. – 11 p.
4. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972.
5. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978.
6. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986.
7. Baker, C.T.H. The Numerical Treatment of Integral Equations / C.T.H. Baker. – Oxford; New York: Clarendon Press, 1977.
8. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Доклады Академии наук СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
9. Honerkamp, J. Tikhonovs Regularization Method for Ill-Posed Problems / J. Honerkamp, J. Weese // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 1990. – V. 2, № 1. – P. 17–30.
10. Шапеев, В.П. P-версия метода коллокации решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода в среде Mathematica / В.П. Шапеев, Е.В. Ворожцов // Вычислительные методы и программирование. – 2019. – Т. 20, № 1. – С. 1–11.
11. Шапеев, В.П. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом коллокации и наименьших квадратов с аппроксимацией Паде / В.П. Шапеев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2023. – Т. 16, № 4. – С. 71–83.
12. Исаев, В.И. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье – Стокса / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Журнал вычислительной математики и математической физике. – 2010. – Т. 50, № 10. – С. 1758–1770.
13. Деммель, Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель. – М.: Мир, 2001.
14. Ascher, U. A Collocation Solver for Mixed order Systems of Boundary Value Problems / U. Ascher, J. Christiansen, R.D. Russel // Mathematics of Computation. – 1979. – V. 33, № 146. – P. 659–679.
15. Ворожцов, Е.В. О комбинировании различных методов ускорения при итерационном решении уравнений с частными производными методом коллокаций и наименьших невязок / Е.В. Ворожцов, В.П. Шапеев // Моделирование и анализ информационных систем. – 2017. – Т. 24, № 1. – С. 39–63.
16. Беляев, В.А. Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов / В.А. Беляев, В.П. Шапеев // Вычислительные методы и программирование. – 2018. – Т. 19, № 4. – С. 340–355.
17. Bo-nan Jiang. The Least-Squares Finite Element Method: Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics / Jiang Bo-nan. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1998.
18. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988.

19. Tari, A. A Computational Method for Solving Two-Dimensional Linear Fredholm Integral Equations of Second Kind / A. Tari, S. Shahmorad // The ANZIAM Journal. – 2008. – V. 49, № 4. – P. 543–549.
20. Ma Yanying. A Novel Numerical Method of Two-Dimensional Fredholm Integral Equations of the Second Kind / Ma Yanying, Jin Huang, Hu Li // Mathematical Problems in Engineering. – 2015. – V. 2015, № 21-24. – 9 p.

Василий Павлович Шапеев, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, лаборатория термомеханики и прочности новых материалов, институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), vshapeev@gmail.com.

Павел Иванович Кириллов, младший научный сотрудник, лаборатория термомеханики и прочности новых материалов, институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), Tea2805@mail.ru.

Поступила в редакцию 11 ноября 2024 г.

MSC 45B05 **DOI: 10.14529/mmp250109**

SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND BY THE METHOD OF COLLOCATION AND LEAST SQUARES WITH POLYNOMIAL APPROXIMATION

***V.P. Shapeev*[1], *P.I. Kirillov*[1]**
[1]Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation
E-mail: vshapeev@gmail.com, Tea2805@mail.ru

A new numerical algorithm based on the collocation and least squares method is proposed for the numerical solution of a two-dimensional Fredholm integral equation of the second kind. The solution is sought in the form of a polynomial approximant with undetermined coefficients, after substituting which into the equation, obtains an approximate equation with respect to the undetermined coefficients. The collocation method is used to solve that equation, and the number of collocation points is usually taken to be greater than the number of coefficients of the sought approximant. Overdetermined system of linear algebraic equations (SLAE) with respect to the sought coefficients are obtained by collocations of the approximate equation. The proposed algorithm is implemented in a computer program. Presented the results of numerical experiments on solving several equations for which are known results obtained by other methods cited in well-known publications. By comparing the results obtained by the new proposed algorithm with results achieved by other methods shown it's advantage in accuracy of the approximate solution over the compared methods. In numerical experiments were investigated the influence of the method parameters on the condition number of SLAE matrix, the solution of which is used to find polynomial approximation of the solution of integral equation. The tables of the numerical results show the values of the algorithm parameters with which were obtained specific solutions: the degree of the approximating polynomial, the number of cells and nodes of the Gauss quadrature, the degree of the SLAE overdetermination and condition number of it's matrix.

Keywords: two-dimensional Fredholm integral equations of the second kind; direct method; Gauss quadratures; collocation method; linear least squares problem; SLAE condition number.

References

1. Mikhlin S.G. *Prilozheniya integral'nyh uravnenij k nekotorym problemam mekhaniki, matematicheskoj fiziki i tekhniki* [Applications of Integral Equations to Some Problems of Mechanics, Mathematical Physics and Engineering]. Moscow, OGIZ, 1947. (in Russian)
2. Schafer H., Sternin E., Stannarius R., Arndt M., Kremer F. Novel Approach to the Analysis of Broadband Dielectric Spectra. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 76, no. 12, pp. 2177–2180. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.2177
3. Daddi-Moussa-Ider A. Asymmetric Stokes Flow Induced by a Transverse Point Force Acting near a Finite-Sized Elastic Membrane. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2020, vol. 89, 11 p. DOI:10.48550/arXiv.2006.14375
4. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of Mathematical Physics*. New York, Dover Publications, 1963.
5. Kalitkin N.N. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)
6. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs*. Kyiv, Naukova Dumka, 1986.
7. Baker C.T.H. *The Numerical Treatment of Integral Equations*. Oxford, New York, Clarendon Press, 1977.
8. Tikhonov A.N. The Solution of Ill-Posed Problems and the Regularization Method. *Report. USSR Academy of Sciences*, 1963, vol. 151, no. 3, pp. 501–504. (in Russian)
9. Honerkamp J., Weese J. Tikhonovs Regularization Method for Ill-Posed Problems. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1990, vol. 2, no. 1, pp. 17–30. DOI: 10.1007/BF01170953
10. Shapeev V.P., Vorozhcov E.V. High-Accuracy Numerical Solution of the Second-Kind Integral Equations in the Mathematica Environment. *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST)*, 2018, vol. 5, no. 12, pp. 9308–9319.
11. Shapeev V.P. Solution of the Cauchy Problem for Ordinary Differential Equations Using the Collocation and Least Squares Method with the Pade Approximation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2023, vol. 16, no. 4, pp. 71–83. DOI: 10.14529/mmp230405
12. Isaev V.I., Shapeev V.P. High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 10, pp. 1670–1681.
13. Demmel J.W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. DOI: 10.1137/1.9781611971446
14. Ascher U., Christiansen J., Russel R.D. A Collocation Solver for Mixed Order Systems of Boundary Value Problems. *Mathematics of Computation*, 1979, vol. 33, no. 146, pp. 659–679. DOI: 10.1090/S0025-5718-1979-0521281-7
15. Vorozhtsov E.V., Shapeev V.P. On the Efficiency of Combining Different Methods for Acceleration of Iterations at the Solution of PDEs by the Method of Collocations and Least Residuals. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 363, pp. 1–19.
16. Belyaev V.A., Shapeev V.P. Versions of the Collocation and Least Squares Method for Solving Biharmonic Equations in Non-Canonical Domains. *AIP Conference Proceedings*, Novosibirsk, 2017, vol. 1893, no. 1, 15 p. DOI: 10.1063/1.5007560
17. Bo-nan Jiang. *The Least-Squares Finite Element Method: Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1998. DOI: 10.1007/978-3-662-03740-9
18. Fletcher C.A.J. *Computational Galerkin Methods*. Heidelberg, Springer Berlin, 1984. DOI: 10.1007/978-3-642-85949-6

19. Tari A., Shahmorad S. A Computational Method for Solving Two-Dimensional Linear Fredholm Integral Equations of Second Kind. *The ANZIAM Journal*, 2008, vol. 49, no. 4, pp. 543–549. DOI:10.1017/S1446181108000126

20. Yanying Ma, Jin Huang, Hu Li. A Novel Numerical Method of Two-Dimensional Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, no. 21-24, 9 p. DOI: 10.1155/2015/625013

Received November 11, 2024