

О ПОСТАНОВКЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЗАВИХРЕННОСТЬ – ФУНКЦИЯ ТОКА

И.И. Потапов, Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск,
Российская Федерация

При решении задачи Навье – Стокса в переменных завихренность – функция тока вычислитель всегда сталкивается с проблемой, заключающейся в переопределенности граничных условий для функции тока и их отсутствием для функции завихренности. Классический подход в решении этой проблемы заключается в построении на границе области дополнительного дифференциального оператора для искомых функций, из решения которого можно определить промежуточные граничные условия для функции завихренности. Несмотря на достигнутые значимые успехи в реализации данного подхода, он имеет два серьезных недостатка. Во-первых, он требует построения дифференциального оператора, нормального к границе в каждом граничном узле расчетной области, что существенно усложняет алгоритмы для задач с криволинейными границами. Во-вторых, он порождает дополнительный итерационный процесс даже при решении линейной задачи Стокса.

В работе предлагается новый алгоритм, позволяющий определять граничные условия в методе конечных элементов при решении задач гидродинамики в переменных завихренность – функция тока. В предлагаемом алгоритме граничные значения для завихренности на произвольном невырожденном контуре границы расчетной области определяются из уравнения для функций тока, записанных в слабой интегральной форме, учитывающей условия Неймана для функции тока на границе области. Алгоритм не требует построения на контуре области дополнительных разностных операторов для получения граничных условий задачи и позволяет при использовании векторной формулировки задачи решать задачу Стокса за одну итерацию. При решении задач Навье – Стокса в векторной формулировке метод позволяет получить на каждом шаге по времени/нелинейности согласованные поля завихренности и функции тока, что позволяет контролировать процессы сходимости решаемой задачи. Стабильность работы предложенного алгоритма подтверждается проведенными численными экспериментами.

Ключевые слова: вынужденная конвекция; слабая формулировка задачи; граничные условия; функция тока – завихренность; метод конечных элементов.

Введение

Теории постановки граничного условия для завихренности посвящен ряд фундаментальных работ [1–3], существенный прогресс в данном направлении был достигнут в работе [4], где был установлен коэффициент аппроксимационной формулы для завихренности, оптимизирующий скорость сходимости численной процедуры с использованием такой формулы. Следующим шагом построения теории было доказательство того, что существующие различные способы и процедуры определения завихренности на стенке при решении уравнений завихренность – функция тока эквивалентны между собой [5] и сводятся к использованию аппроксимационной формулы общего вида. Это позволяет устранить различия в разностных схемах уравнений завихренность – функция тока, связанные со способом определения завихренности на стенке. Однако все данные подходы основаны на идее использования ряда Тейлора $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 1$ или его модификаций $\alpha_i \neq 1$, $\beta_i \neq 1$ для функции тока

$$\Phi(\eta) = \Phi(h) + \alpha_1(\eta - \beta_1 h) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_2 \frac{(\eta - \beta_2 h)^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \alpha_3 \frac{(\eta - \beta_3 h)^3}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \dots,$$

в котором первая и вторая производные заменялись на функцию граничной скорости и завихренности соответственно. Здесь η – нормальная к границе координата, h – шаг дискретной схемы. Количество членов ряда и коэффициенты (α_i, β_i) определялись различными исследователями [1–4] в зависимости от точности получаемого дискретного аналога задачи. Однако изложенный здесь подход создания промежуточных граничных условий, несмотря на достигнутые значимые успехи, имеет два серьезных недостатка. Во-первых, он требует построения основанного на ряде Тейлора дискретного аналога, ортогонального границе в каждом граничном узле расчетной области, что существенно усложняет алгоритмы для задач с криволинейными границами. Во-вторых, он порождает дополнительный итерационный процесс даже для линейной задачи Стокса.

Использование метода конечных элементов для решения рассматриваемой задачи позволяет [6] избавиться от первого недостатка. Использование при решении задачи итерационных методов [7–9], позволяет переместить процесс вычисления промежуточных граничных условий в основной итерационный процесс, т. е. частично компенсировать второй недостаток, но не избавиться от него.

Ниже рассмотрен алгоритм, реализующий альтернативный подход формирования граничных условий для завихренности, который можно реализовать при решении задач в формулировке завихренность – функция тока при использовании метода конечных элементов.

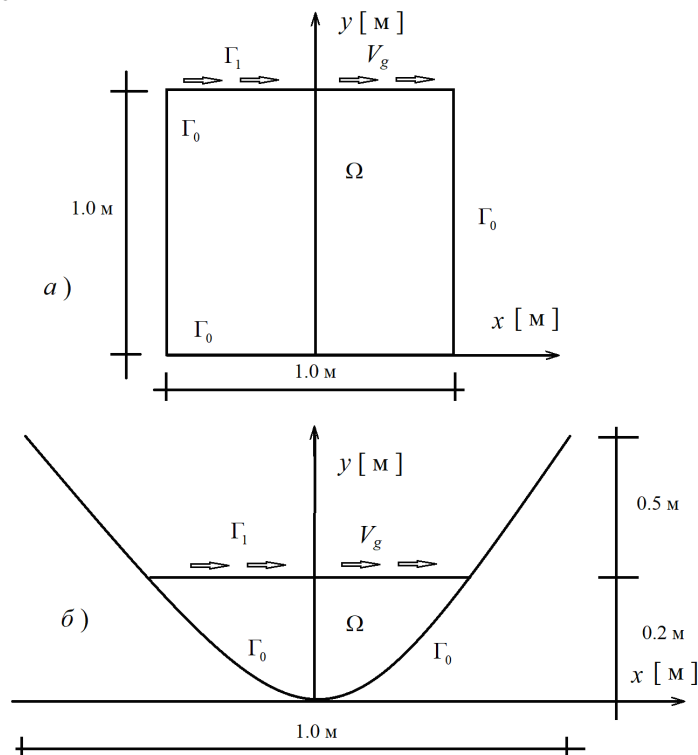


Рис. 1. Геометрии расчетной области Ω и их границ $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ для прямоугольной каверны (а) и параболической каверны (б)

1. Постановка задачи

Рассмотрим вынужденное конвективное течение вязкой жидкости в полости с подвижной крышкой (каверне). Схемы геометрии расчетной области Ω , ее границ приведены на рис. 1. Известные уравнения Навье – Стокса в переменных скорость–

давление описывают движения вязкой жидкости и имеют вид

$$\rho \frac{dV}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right), \quad \rho \frac{dW}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, μ – вязкость жидкости, V и W – компоненты скорости потока в декартовых координатах (x, y) , p – давление, t – время. Уравнения (1) замыкаются начальными условиями

$$V = 0, \quad W = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

и граничными условиями

$$V = 0, \quad W = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad (3)$$

$$V = V_g, \quad W = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (4)$$

здесь V_g – скорость движения крышки.

Выберем новые переменные – функцию тока Φ и завихренность ω , определенные следующим образом через компоненты скорости V и W :

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad W = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (5)$$

Из определения Φ и ω следует

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \omega = 0. \quad (6)$$

Из уравнений движения (1) с помощью перекрестного дифференцирования (первого уравнения (1) – по y , второго уравнения (1) – по x) и их последующего вычитания исключается давление p и получается уравнение переноса завихренности

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (7)$$

Переход от уравнений постановки задачи в естественных переменных (1) – (4) к постановке в переменных функция тока Φ и завихренность ω требует для уравнений (6), (7) постановки граничных условий для переменных ω , Φ . Преобразование условий (2) – (4) с использованием зависимостей (5) позволяет получить начальные

$$\omega = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (8)$$

и граничные условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_g, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (9)$$

к которым добавляется условие нулевого потока через границу Γ области

$$\Phi = 0, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (10)$$

Отметим, что граничные условия (9), (10) являются переопределенными для функции тока Φ и отсутствуют для завихренности ω . Перед переходом к процессу обсуждения граничных условий для завихренности сформулируем вспомогательную задачу

Стокса, которая содержит в себе линейное стационарное уравнение для завихренности и уравнение (6) для функции тока:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \omega = 0. \quad (12)$$

Поскольку для уравнений (11), (12) задачи Стокса требуются граничные условия, аналогичные задаче Навье – Стокса (6), (7), то на них будет более удобно демонстрировать предлагаемый в работе подход по их реализации.

2. Слабая формулировка для задачи Стокса

Используем для общности получаемых дискретных конечно-элементных аналогов SUPG-метод [10], который будет избыточен при решении задачи (8) – (12), но необходим при решении задачи (6) – (10). Введем интерполяцию сеточных искомых функций Φ^h , ω^h на конечном элементе

$$\Phi^h = N_\beta \Phi_\beta, \quad \omega^h = N_\beta \omega_\beta, \quad \beta = \overline{1, N_k}. \quad (13)$$

где Φ_β , ω_β – узловые значения функций, N_β – функции формы $N_\beta \in L_2$, N_k – количество узлов на конечном элементе. Используя весовые функции $N_\alpha \in L_2$, получим слабую формулировку задачи Стока в дискретной области Ω^h :

$$\int_{\Omega^h} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \omega^h}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \omega^h}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma^h} N_\alpha \left(n_x \frac{\partial \omega^h}{\partial x} + n_y \frac{\partial \omega^h}{\partial y} \right) d\Gamma, \quad (14)$$

$$\int_{\Omega^h} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \Phi^h}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \Phi^h}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega^h} N_\alpha \omega^h d\Omega + \int_{\Gamma^h} N_\alpha \left(n_x \frac{\partial \Phi^h}{\partial x} + n_y \frac{\partial \Phi^h}{\partial y} \right) d\Gamma, \quad (15)$$

где (n_x, n_y) – компоненты вектора нормали к границе Γ^h . Поскольку на границе области Γ^h значение завихренности будет ω^h определено, поверхностный интеграл в тождестве (14) можно приравнять к нулю [6, 11]. Учитывая граничные условия (9), (10) для функции тока Φ^h , преобразуем (15) к виду

$$\int_{\Omega^h} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \Phi^h}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \Phi^h}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega^h} N_\alpha \omega^h d\Omega + \int_{\Gamma_1^h} N_\alpha V_g d\Gamma. \quad (16)$$

С учетом (13) получим алгебраический аналог задачи

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\beta} & -M_{\alpha\beta} \\ 0 & K_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_\alpha \\ \omega_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где $K_{\alpha\beta}$ – матрица жесткости, $M_{\alpha\beta}$ – матрица масс, Q_α – правая часть конечно-элементного дискретного аналога

$$K_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^h} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) d\Omega, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega^h} N_\alpha N_\beta d\Omega, \quad Q_\alpha = \int_{\Gamma_1^h} N_\alpha V_g d\Gamma.$$

Выполним сборку глобальной матрицы жесткости A_{ij} и правой части F_i для задачи Стокса, получив систему

$$A_{ij} X_j = F_i, \quad i, j = 0, \dots, N, \quad (18)$$

где

$$A_{ij} = \cup_e \begin{bmatrix} C_{i\alpha}^e & 0 \\ 0 & C_{i\alpha}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\alpha\beta} & -M_{\alpha\beta} \\ 0 & K_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{j\beta}^e & 0 \\ 0 & C_{j\beta}^e \end{bmatrix},$$

$$X_j = \cup_e \begin{bmatrix} C_{i\beta}^e & 0 \\ 0 & C_{i\beta}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_\beta \\ \omega_\beta \end{bmatrix}, \quad F_i = \cup_e \begin{bmatrix} C_{i\alpha}^e & 0 \\ 0 & C_{i\alpha}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_\alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

здесь $\cup_e(*)$ – оператор сборки локальных дискретных аналогов в глобальную систему алгебраических уравнений задачи, $C_{i\alpha}^e$ – матрица кинематических связей для e -го конечного элемента, определяемая типом конечного элемента [11] и свойствами сеточной области Ω^h . Отметим, что система (18) учитывает граничные условия Неймана (9). Следовательно, если бы нам были известны все значения функции тока Φ_β в узлах расчетной сетки, из уравнений (16) мы смогли бы восстановить все узловые значения завихренности ω_β . Однако выполнение граничных условий Дирихле (10) для функции тока Φ_i на границе области Γ_1^h приводит к потере в системе (18) информации о данных связях в граничных узлах. Основная идея работы заключается в сохранении данной информации и ее использовании для предотвращения вырождения системы (17) при выполнении граничных условий для функции тока. Потерянную информацию о данных связях в граничных узлах задачи $(x_i, y_i) \in \Gamma_1$ можно восстановить, используя слабую формулировку (15):

$$\cup_e C_{i\alpha}^e M_{\alpha\beta}^D C_{j\beta}^e C_{i\beta}^e \omega_\beta = \cup_e C_{i\alpha}^e K_{\alpha\beta} C_{j\beta}^e C_{i\beta}^e \Phi_\beta - \cup_e C_{i\alpha}^e Q_\alpha, \quad M_{\alpha\beta}^D = \int_{\Omega^h} N_\alpha N_\beta^{const} d\Omega, \quad (19)$$

для функции завихренности ω_i в каждом i -м граничном узле определяем тождество (19) с кусочно-постоянной функцией формы $N_\beta^{const} = 1$ для конечных элементов, дающих ненулевой вклад в i граничный узел. Использование выражения (19) для всех значений завихренности ω_i на границе области Γ^h позволяет заменить условия Дирихле для функции завихренности ω_i на границе с условием Неймана, которые в методе конечных элементов выполняются «естественным» образом [11]. Недостатком такого подхода является необходимость построения для каждого узлового значения ω_i на Γ^h дискретных аналогов (19) отличающихся от (16) матрицами масс $M_{\alpha\beta} \neq M_{\alpha\beta}^D$. Однако выполненные численные исследования показали, что выполнение простых алгебраических операций над системой (18) позволяет достичь результата, аналогичного применению тождества (19). Для достижения данной цели выполним ряд операций над системой (18). Отметим, что для каждого узла дискретной области в системе (18) определены два уравнения. Для каждого граничного узла системы (18) приведем строку $\cup_e C_{i\alpha}^e M_{\alpha\beta} C_{j\beta}^e$ первого уравнения к диагональному виду путем построчного суммирования компонент строки с установлением полученной суммы на главную диагональ матрицы $\cup_e C_{i\alpha}^e M_{\alpha\beta} C_{j\beta}^e$, совершив таким образом неявное преобразование $\cup_e C_{i\alpha}^e M_{\alpha\beta} C_{j\beta}^e$ в $\cup_e C_{i\alpha}^e M_{\alpha\beta}^D C_{j\beta}^e$. Полученным уравнением заменяется связанное с граничным узлом уравнение для завихренности, неявно выполняя таким образом условие (19). После выполнения такой операции для всех граничных узлов в этих узлах производится выполнение граничного условия Дирихле (10) для функции тока. Отметим, что данный алгоритм без изменений может применяться при решении задачи Навье – Стокса (6) – (10) и легко модифицируется для решения других задач, например, при решении задач Навье – Стокса с потоком массы через границу области. В этом случае изменится только правая часть системы (18) на этапе выполнения условия Дирихле (10). Достоинством предлагаемого метода является отсутствие двух недостатков, указанных во введении, т. е. в необходимости создания промежуточных граничных условий [4, 5] и в построении на криволинейных границах [2, 3, 8, 9] дополнительных дифференциальных операторов, ортогональных контуру границы.

Несмотря на двукратное увеличение размера матрицы (18), практика ее решения показывает, что сходимость по нелинейности задачи на каждом шаге по времени существенно выше, чем при последовательном решении задач [7]. Точность восстановления значения функции завихренности ω в данном способе определения граничных условий в целом зависит от порядка и вида используемого конечного элемента, вида интерполяционных и весовых функций формы. И хотя точность граничного условия ω непосредственно связана с интерполяционными характеристиками конечного элемента, требуются дополнительные исследования для элементов высокого порядка по влиянию операции перехода от распределенной к диагональной матрицы масс при модификации уравнений (19).

3. Дискретный аналог для стационарной задачи Навье – Стокса

Используем метод конечных элементов в формулировке Петрова – Галеркина. Разобьем расчетную область Ω на трехузловые конечные элементы Ω_e , $\Omega^h = \cup_e \Omega_e$. Введем на конечном элементе функции формы [11] N_α :

$$N_\alpha = a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y \quad (20)$$

и их частные производные

$$b_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x}, \quad c_\alpha = \frac{\partial N_\alpha}{\partial y}, \quad (21)$$

коэффициенты которых выражаются как

$$\begin{cases} a_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2S}, & b_1 = \frac{y_2 - y_3}{2S}, & c_1 = \frac{x_3 - x_2}{2S} \\ a_2 = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2S}, & b_2 = \frac{y_3 - y_1}{2S}, & c_2 = \frac{x_1 - x_3}{2S} \\ a_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2S}, & b_3 = \frac{y_1 - y_2}{2S}, & c_3 = \frac{x_2 - x_1}{2S} \end{cases}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix},$$

где x_k, y_k – координаты вершин (узлов) конечного элемента, S – площадь конечного элемента. Определим аппроксимацию искомых функций на конечном элементе

$$\Phi^h = N_\beta \Phi_\beta, \quad \omega^h = N_\beta \omega_\beta, \quad \beta = \overline{1, 3}, \quad (22)$$

где $\Phi_\beta, \omega_\beta, V_\beta, W_\beta$ – значения искомых полей в узлах конечного элемента. Для противоточной стабилизации дискретного аналога задачи воспользуемся методом Петрова – Галеркина (SUPG) [10] с весовыми функциями $L_\alpha \in H_2^1$:

$$L_\alpha = N_\alpha + ah(A_x b_\alpha + A_y c_\alpha), \quad (23)$$

где $A_x = \frac{c_\alpha \Phi_\alpha}{\sqrt{(b_\alpha \Phi_\alpha)^2 + (c_\alpha \Phi_\alpha)^2}}, \quad A_y = -\frac{b_\alpha \Phi_\alpha}{\sqrt{(b_\alpha \Phi_\alpha)^2 + (c_\alpha \Phi_\alpha)^2}}, \quad h = 0,5\sqrt{S}, \quad 0 \leq a \leq 1.$

Используя интерполяцию (20) – (23), преобразуем интегральные тождества слабой формулировки для уравнения Навье – Стокса

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^h} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \Phi^h}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \Phi^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^h} N_\alpha \omega^h d\Omega + \int_{\Gamma_1^h} N_\alpha V_g d\Gamma = 0, \\ & \int_{\Omega^h} \left(\rho L_\alpha \left(\frac{\partial \Phi^h}{\partial y} \frac{\partial \omega^h}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^h}{\partial x} \frac{\partial \omega^h}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \omega^h}{\partial x} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \omega^h}{\partial y} \right) \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

в дискретный аналог задачи

$$\begin{bmatrix} -K_{\alpha\beta} & M_{\alpha\beta} \\ 0 & \rho C_{\alpha\beta\gamma}\Phi_\gamma + \mu K_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_\alpha \\ \omega_\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (24)$$

здесь

$$K_{\alpha\beta} = (b_\alpha b_\beta + c_\alpha c_\beta)S, \quad M_{\alpha\beta} = \frac{S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_\alpha = V_g l \left(\frac{1}{1} \right) \Big|_{\Gamma_1^h},$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = (E_\alpha + ah(A_x b_\alpha + A_y c_\alpha))(c_\gamma b_\beta - b_\gamma c_\beta)S, \quad E_\alpha = (1/3, 1/3, 1/3),$$

где $K_{\alpha\beta}$ – матрица жесткости/диффузии, $C_{\alpha\beta\gamma}$ – матрица конвекции, $M_{\alpha\beta}$ – матрица масс, Q_α – правая часть конечно-элементного дискретного аналога, l – длина граничного конечного элемента. Отметим, что метод сборки глобальной системы алгебраических уравнений из дискретного аналога для задачи Навье – Стокса (24) и предложенный способ выполнения граничных условий для функции завихренности одинаков с задачей Стокса, рассмотренной в разделе 3. Для восстановления поля скорости по формуле (5) на конечном элементе по узловым значениям функции тока определялись значения компонент скорости

$$V^e = c_\alpha \Phi_\alpha, \quad W^e = -b_\alpha \Phi_\alpha,$$

которые далее методом линейной интерполяции разносились в узлы расчетной области Ω^h .

4. Результаты расчетов

Ниже приведены результаты расчетов, которые подтверждают эффективность предложенного метода удовлетворения граничного условия для завихренности при решении задач вынужденной конвекции в случае стационарной постановки (6) – (10).

Верификация расчетов была произведена путем сравнения с результатами других авторов для расчетной области Ω^h , представленной на рис. 1 а). Рассмотрим конвективное движение жидкости в прямоугольной каверне со сторонами 1 м. Горизонтальное движение верхней границы каверны происходит с постоянной скоростью $V_g = 1$ м/с.

Жидкость в каверне имеет постоянную по области вязкость, величина которой определяется вариантом задачи и может принимать значение 1: $\mu = 10$; 2: $\mu = 1$; 3: $\mu = 5/16$ кг/мс. Соответственно, числа Рейнольдса для получаемых решений имеют следующие значения $Re = 1$: 100, 2: 1000, 3: 3200 и согласуются с работами [1, 3]. Расчеты для данной расчетной области выполнялись на сетках 125×125 . На рис. 2 в качестве демонстрации выполненных расчетов приведено поле модуля скорости полученное для $Re = 1000$. На рис. 2 также приведены вертикальная линия 1 и горизонтальная линия 2, проходящие через геометрический центр каверны. Вдоль этих линий будет выполняться сравнение полученных расчетных данных с результатами других авторов. На рис. 3, 4 сплошными кривыми 1 приведены скорости для V вдоль вертикальных линий y (рис. 2, линия 1) и скорости W вдоль горизонтальных линий x (рис. 2, линия 2).

Нулевые оси этих графиков для различных значений Re были смещены для наглядности профилей. Из этих профилей видно, что с увеличением числа Рейнольдса происходит истончение пограничных слоев стенки, хотя скорость этого истончения невелика из-за малого диапазона изменения числа Re .

Пунктирными кривыми 2 на рис. 3 и рис. 4 представлены результаты вычислений, выполненных в работе [12] на сетках 129×129 скалярными разностными схемами

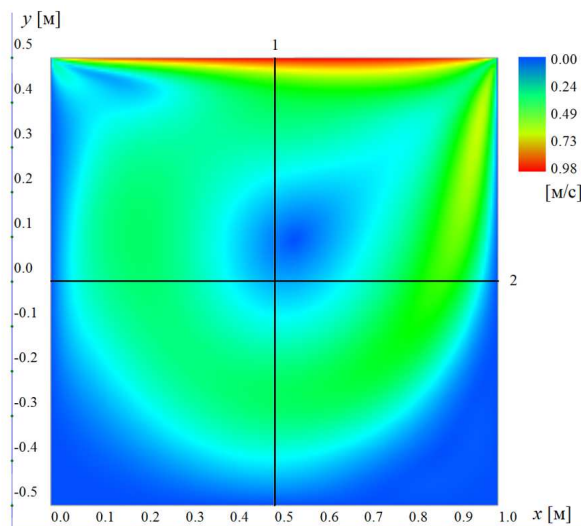


Рис. 2. Модуль поля скорости, полученный в расчетах при $Re=1000$; 1, 2 – вертикальная и горизонтальная линии, проходящие через геометрический центр каверны

3-го порядка. Для скорости V точечными множествами на рис. 3 приведены результаты, полученные Агарвалом [1] с помощью точных разностных схем третьего порядка на сетках 121×121 . Для скорости W точечными множествами на рис. 4 приведены результаты, полученные Налласами и К.К. Прасадом в работе [12].

Из сравнения полученных результатов видно, что, несмотря на третий порядок разностных схем, использованных в работах [1] и [12], и первый порядок интерполяции, использованный в данной работе, полученные результаты хорошо согласуются с решениями, опубликованными в работах [1] и [12].

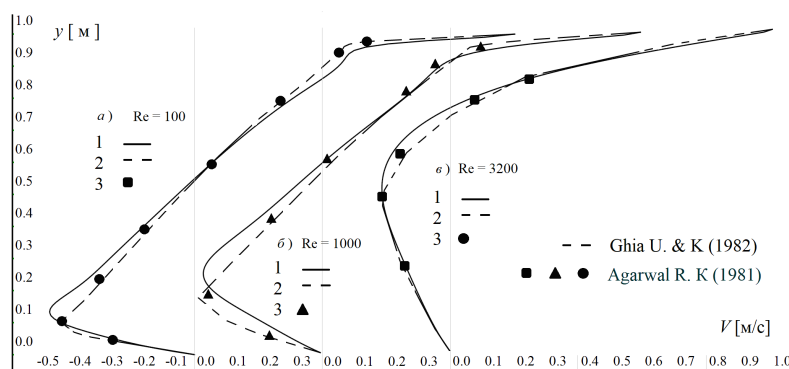


Рис. 3. Сравнение горизонтальных скоростей V вдоль вертикальной линии, проходящей через геометрический центр каверны для различных чисел Рейнольдса

В качестве демонстрации применимости предложенного алгоритма по выполнению граничного условия для поля завихренности, при решении задач в расчетных областях, имеющих сложную геометрическую форму, рассмотрим полученные результаты для расчетной области Ω , геометрия которой представлена на рис. 1 (б). Вынужденное конвективное движение жидкости в каверне с параболическим дном задается горизонтальным движением верхней границы каверны Γ_1 , с постоянной скоростью $V_g = 0,1$ м/с.

Жидкость в каверне имеет постоянную по области Ω вязкость, величина которой определяется вариантом задачи и может принимать значения 1: $\mu = 0$; 2: $\mu = 0,02$;

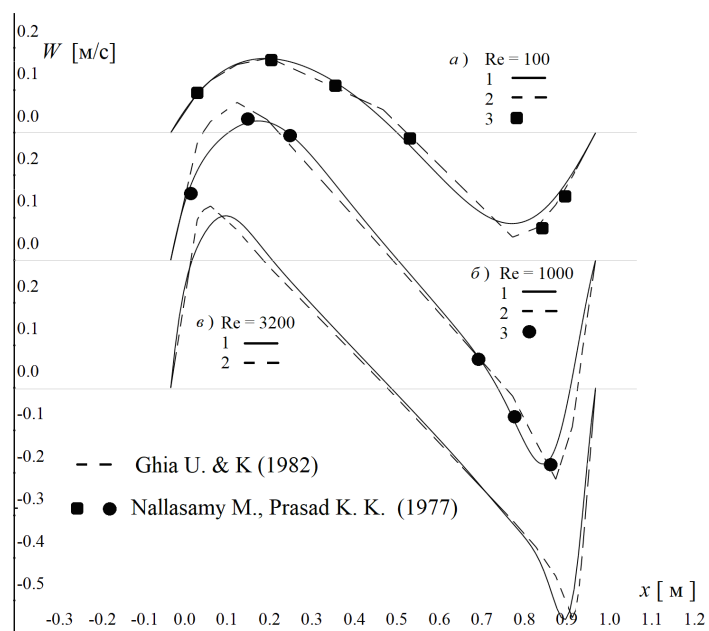


Рис. 4. Сравнение вертикальных скоростей W вдоль горизонтальной линии, проходящей через геометрический центр каверны для различных чисел Рейнольдса

3: $\mu = 0,00625$ кг/мс. Соответственно, числа Рейнольдса для получаемых решений имеют следующие значения $Re = 1: 100, 2: 1000, 3: 3200$. Расчеты для данной расчетной области выполнялись на нерегулярных сетках в 15000 узлов.

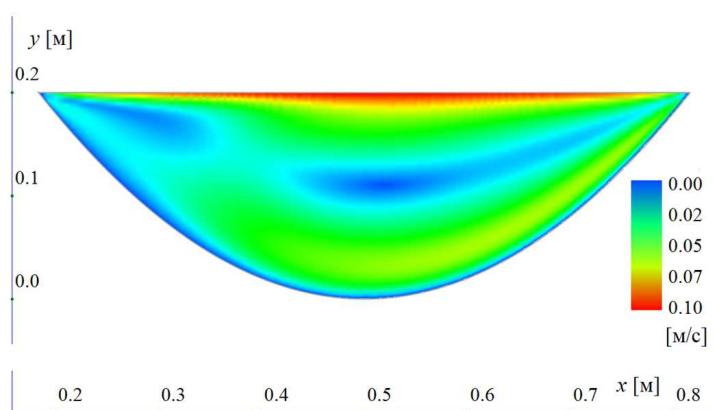


Рис. 5. Модуль поля скорости, полученный в расчета при $Re = 1000$

На рис. 5 в качестве демонстрации выполненных расчетов приведено поле модуля скорости, полученное для $Re = 1000$. На рис. 6 кривыми 1–3 приведены скорости для V для различных значений числа Re вдоль вертикальной линии y , расположенной на оси симметрии каверны. Поскольку для данной расчетной области (являющейся прототипом створа речного канала) отсутствуют данные, сторонние для сравнения, нулевые оси этих графиков не смещались. Изменение профилей при увеличении числа Рейнольдса происходит аналогично изменениям, описанным для первой задачи.

Однако в отличие от первой задачи получить установившийся профиль скорости для $Re = 3200$ (рис. 6, кривая 3) не удалось из-за образовавшегося в левом углу области пульсирующего вихря. На рис. 6 это выражается в том, что значение вычисленной скорости V на границе не согласуется с граничной скоростью V_g . При этом профиль скорости (кривая 3) постоянно изменяется при итерациях по нелинейности/(псевдо–

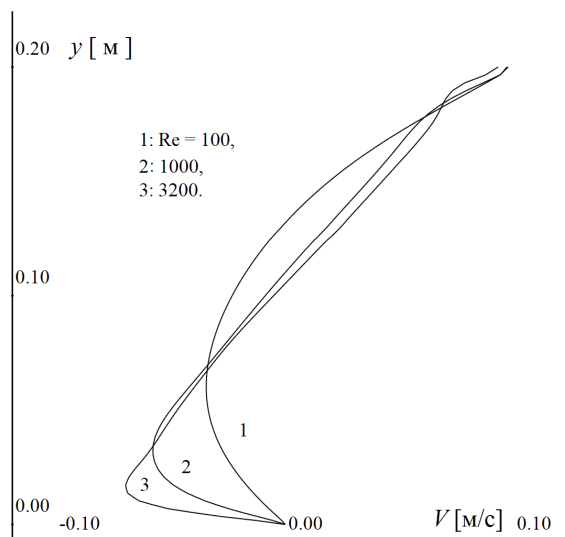


Рис. 6. Горизонтальные скорости V вдоль вертикальной линии y , проходящей через геометрический центр параболической каверны, для различных чисел Рейнольдса

времени), однако максимальные наблюдаемые изменения в пограничных слоях потока не превышают 15 % от скорости крышки V_g . Из полученных результатов было сделано предположение, что для заданной геометрии расчетной области (рис. 1 б)) при числах $Re = 3200$ не существует стационарного решения задачи.

Заключение

Проведенная апробация алгоритма по выполнению граничного условия для завихренности при решении задачи Навье – Стокса (6) – (10) показывает его надежность и эффективность. Перспективным является развитие данного подхода для получения граничных условий для задач с более сложной геометрией, например при анализе вторичных потоков в створах рек.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 24-17-20009 и гранта Правительства Хабаровского края (соглашение № 108С/2024 от 31.07.2024 г.).

Литература

1. Agarwal, R.K. A Third-Order-Accurate Upwind Scheme for Navier–Stokes Solutions at High Reynolds Numbers / R.K. Agarwal // AIAA-81-0112 Paper. – 1981. – 14 p.
2. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980.
3. Ghia, U. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier–Stokes Equations and a Multigrid Method / U. Ghia, K.N. Ghia, C.T. Shin // Journal of Computational Physics. – 1982. – V. 48, № 3. – P. 387–411.
4. Тарунин, Е.Л. Анализ аппроксимационных формул для вихря скорости на твердой границе / Е.Л. Тарунин // Ученые записки Пермского государственного педагогического института. Гидродинамика. – 1976. – № 152, вып. 9. – С. 167–178.
5. Захаренков, М.Н. Проблемы моделирования отрывного обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью / М.Н. Захаренков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 5. – С. 840–854.

6. Мазо, А.Б. Вычислительная гидродинамика. Ч. 2. Сеточные схемы метода конечных элементов / А.Б. Мазо. – Казань: Казанский университет, 2018.
7. Шатров, О.А. Опыт использования метода Гаусса для решения разностных уравнений Навье–Стокса в переменных «функция тока – вихрь» / О.А. Шатров, О.В. Щерица, О.С. Мажорова // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2017. – № 50. – 24 с.
8. Потапов, И.И. Модель установившегося течения реки в поперечном сечении изогнутого русла / И.И. Потапов, Д.И. Потапов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – Т. 16, № 5. – С. 1163–1178.
9. Потапов, И.И. О движении речного потока в сечении изогнутого русла / И.И. Потапов, Д.И. Потапов, К.С. Королева // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. Механика. – 2024. – Т. 34, № 4. – С. 1–18.
10. Булгаков, В.К. Противопоточные конечно-элементные схемы высокого порядка для задачи теплопереноса / В.К. Булгаков, И.И. Потапов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 9. – С. 1409–1413.
11. Шабров, Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983.
12. Nallasamy, M. On Cavity Flow at High Reynolds Numbers / M. Nallasamy, K.K. Prasad // Journal Fluid Mechanics. – 1977. – V. 79. – P. 391–414.

Игорь Иванович Потапов, главный научный сотрудник, лаборатория вычислительной механики, Вычислительный центр ДВО РАН (г. Хабаровск, Российская Федерация), potapov2i@gmail.com.

Поступила в редакцию 2 июня 2025 г.

MSC 65M60

DOI: 10.14529/mmp250303

ON THE FORMULATION OF BOUNDARY CONDITIONS WHEN SOLVING HYDRODYNAMIC PROBLEMS IN VORTICITY-STREAM FUNCTION VARIABLES

I.I. Potapov, Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation, potapov2i@gmail.com

When solving the Navier–Stokes problem in vorticity – current function variables, the scientist always faces the problem of redefined boundary conditions for the current function and their absence for the vorticity function. The classical approach to solving this problem is to construct an additional differential operator for the desired functions on the boundary of the domain, from the solution of which intermediate boundary conditions for the vorticity function can be determined. Despite the significant progress achieved in the implementation of this approach, it has two serious drawbacks. First, it requires the construction of a differential operator normal to the boundary at each boundary node of the computational domain, which significantly complicates algorithms for problems with curved boundaries. Secondly, it generates an additional iterative process even when solving the linear Stokes problem.

The paper proposes a new algorithm that makes it possible to determine boundary conditions in the finite element method when solving problems of hydrodynamics in variables vorticity as a function of current. In the proposed algorithm, the boundary values for vorticity on an arbitrary non-degenerate contour of the boundary of the computational domain are determined from the equation for the current function written in a weak integral form taking into account the Neumann conditions for the current function at the boundary of the domain. The algorithm does not require the construction of additional difference operators on the contour of the area to obtain the boundary conditions of the problem and allows using the vector formulation of the problem to solve the Stokes problem in one iteration. When solving Navier–Stokes problems in a vector formulation, the method makes it possible to obtain consistent vorticity fields and current functions at each time/nonlinearity step, which makes it possible to control the convergence processes of the problem being solved. The stability of the proposed algorithm is confirmed by numerical experiments.

Keywords: convection; weak problem formulation; boundary conditions; stream function – vorticity; finite element method.

References

1. Agarwal R.K. A Third-Order-Accurate Upwind Scheme for Navier–Stokes Solutions at High Reynolds Numbers. *AIAA-81-0112 Paper*, 1981, 14 p. DOI: 10.2514/6.1981-112
2. Roach P. *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, Hermosa Publishers, 1976.
3. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier–Stokes Equations and a Multigrid Method. *Journal of Computational Physics*, 1982, vol. 48, no. 3, pp. 387–411. DOI: 10.1016/0021-9991(82)90058-4
4. Tarunin E.L. Analysis of Approximation Formulas for the Velocity Vortex on a Solid Boundary. *Scientific Notes Perm State Pedagogical Institute. Hydrodynamics*, 1976, issue 9, no. 152, pp. 167–178. (in Russian)
5. Zakharchenkov M.N. Problems of Modeling Separated Flow of Viscous Incompressible Fluid around Bodies. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1998, vol. 38, no. 5, pp. 810–823.
6. Mazo A.B. *Computational Fluid Dynamics. Part 2. Grid Schemes of the Finite Element Method. Textbook*. Kazan, Kazan University, 2018.
7. Shatrov O.A., Shcheritsa O.V., Mazhorova O.S. Experience of Using the Gauss Method for Solving Difference Navier–Stokes Equations in the Variables “Stream Function – Vortex”. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*, 2017, no. 50, 24 p. DOI: 10.20948/prepr-2017-50
8. Potapov I.I., Potapov D.I. Model of Steady River Flow in the Cross-Section of a Curved Channel. *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 1163–1178. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-5-1163-1178
9. Potapov I.I., Potapov D.I., Koroleva K.S. On the Movement of a River Flow in the Cross-Section of a Curved Channel. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Sciences. Mechanics*, 2024, vol. 34, no. 4, pp. 1–18. DOI: 10.35634/vm240407
10. Bulgakov V.K., Potapov I.I. High-Order Counter-Flow Finite Element Schemes for Heat Transfer Problem. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 9, pp. 1409–1413.
11. Shabrov N.N. *Metod Konechnykh Jelementov v Raschetah Detalej Teplovyh Dvigatелеj* [Finite Element Method in Calculations of Heat Engine Parts]. Leningrad, Mechanical Engineering, 1983. (in Russian)
12. Nallasamy M., Prasad K.K. On Cavity Flow at High Reynolds Numbers. *Journal Fluid Mechanics*, 1977, vol. 79, pp. 391–414. DOI: 10.1017/S0022112077000214

Received June 2, 2025