

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СОЕДИНЕНИЯХ ТРУБОПРОВОДОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТКРЫТОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

*В.А. Рукавишников<sup>1</sup>, О.П. Ткаченко<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Хабаровск, Российская Федерация

Представлены результаты численного моделирования методом конечных элементов (МКЭ) в среде FreeCAD, подтверждающие гипотезу о возникновении сингулярности напряжений в L-образном изгибе трубопровода. Исследование проводилось на двух трехмерных моделях: гладком соединении труб с разрывом кривизны оси и угловом соединении с бесконечно большой кривизной на стыке. Разработанный алгоритм МКЭ позволил в единой трехмерной геометрии смоделировать оба типа соединений. Найден критический радиус кривизны, при котором напряжения в модели гладкого соединения достигают уровня напряжений в модели углового соединения. Результаты численного моделирования, представленные в статье, демонстрируют влияние геометрии соединения на распределение напряжений и подтверждают наличие сингулярности в гладких соединениях при малых радиусах кривизны. Работа способствует развитию методов анализа напряжений в сложных трубопроводных системах.

*Ключевые слова:* сингулярность напряжений; L-образный изгиб; метод конечных элементов; FreeCAD; численное моделирование; трубопроводы.

### Введение

Современные трубопроводы представляют собой сложные системы, включающие множество трубных соединений, изгибов и врезок. Определение напряжений в этих системах – задача, требующая комплексного подхода, что подтверждается исследованиями [1, 2]. Необходимость трехмерного моделирования трубопроводных конструкций была обоснована в работе [3], где определены границы применимости стержневых и оболочечных моделей в контексте задач туннелирования. В этом подходе трубопровод рассматривается как трехмерная структура, взаимодействующая со средой.

Наличие стыков между трубами приводит к сингулярности в решении уравнений теории упругости, как указывает А.Л. Гольденвейзер [4]. Современные исследования в этой области применяют математическое моделирование трубопроводов в рамках теории оболочек слабой регулярности [5], где сингулярность заложена в саму геометрию недеформированной трубы.

Выбор подходящего инструмента для численного анализа таких задач представляет собой отдельную проблему для исследователей и инженеров. Например, взаимодействие изогнутой трубы с потоком жидкости моделировалось в работе [6] с использованием пакета SolidWorks (о возможностях другого широко применяемого пакета см. [7]). Альтернативой коммерческим пакетам являются свободно распространяемые аналоги, такие как FreeCAD [8], который может рассматриваться как визуальная оболочка для пакета CalculiX, использующего метод конечных элементов [9]. Этот пакет предназначен для решения трехмерных, двумерных и одномерных задач теории упругости в стандартной постановке.

Металлические трубы в современных трубопроводах играют ключевую роль и могут рассматриваться как протяженные оболочки [10]. В данной работе исследуются два типа соединений: (А) гладко соединенные моментные оболочки с разрывом кривизны на стыке [11]; (Б) трубы, соединенные под углом, с разрывом производной по нормали на стыке и бесконечно большой кривизной [12]. Решение таких задач осложняется наличием сингулярности [13, 14], что требует разработки новых методов конечных элементов [15, 16], а также новых численных методов в гидродинамике [17, 18] и теории упругости [19, 20].

Целью настоящей работы является проверка гипотезы о формировании сингулярности напряжений в L-образном изгибе трубопровода с помощью численного моделирования в рамках единой трехмерной геометрии. Для достижения этой цели предполагается решить следующие задачи:

1. Теоретическое выдвижение гипотезы о формировании сингулярности поля эквивалентных напряжений в стенке трубы в условиях уменьшения радиуса кривизны ее оси.

2. Разработка алгоритма метода конечных элементов для численного моделирования соединений труб в среде FreeCAD.

3. Численное определение критического радиуса кривизны оси трубы, при котором напряжения в модели непрерывного изгиба (задача А) достигают значений, сопоставимых с напряжениями в модели углового стыка (задача Б).

В первом параграфе рассматривается теоретическая постановка задачи и проводится ее предварительный анализ. Представлены две трехмерные математические модели: модель гладкого соединения труб с разрывом кривизны оси из статьи [11] и модель углового соединения труб с условиями сопряжения на особой линии, построенная в работе [12]. Описаны принципиальные различия между этими моделями, а также преимущества первой модели. Выдвигается гипотеза о возникновении сингулярности в решении задачи, основанной на первой модели, и формулируются условия на геометрию области, при которых это явление может проявляться. Также описывается сингулярность, возникающая во второй модели. Второй параграф посвящен методике численного анализа. Рассмотрена САЕ-система FreeCAD, показана связь предложенных математических моделей с моделями МКЭ, реализованными в данной среде, а также представлен алгоритм численного моделирования и визуализации его результатов в этой среде. Описаны этапы построения геометрии трехмерных моделей для обеих задач, создание сеток МКЭ и наложение внешних ограничений на модели. Третий параграф содержит описание результатов численного моделирования. Представлены выбранные численные примеры, результаты которых наиболее наглядно иллюстрируют особенности исследуемых задач. Приведены полученные численные результаты и подведены итоги численного исследования. В заключении обобщены результаты исследования и сформулированы основные выводы.

## 1. Постановка задачи. Математические модели и геометрия

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, изогнутую под прямым углом (рис. 1). Ее три сегмента соединены в плоскостях, проходящих через точки  $A$  и  $B$  и перпендикулярных осям трубы. Данная геометрия – частный случай геометрии [21], где она была введена для произвольно изогнутого трубопровода.

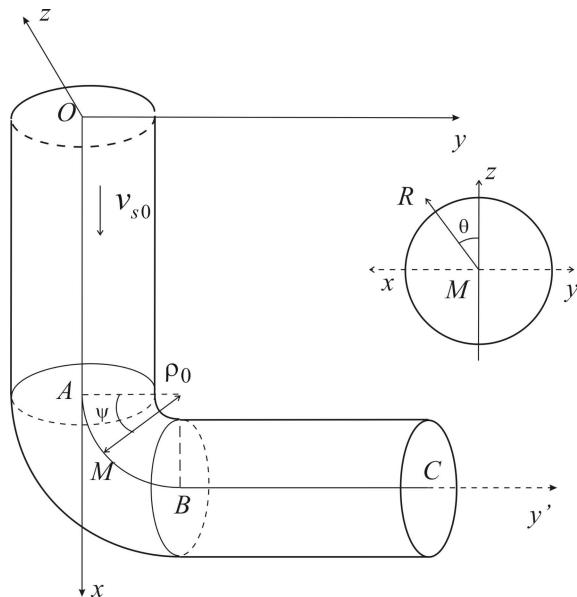


Рис. 1. Геометрия трубы и системы координат

Используя формулы (1) из [11] и определение кривизны, найдем:

$$\kappa(s) = \frac{1}{\rho_0}, \quad L_1 < s \leq L_1 + \frac{\pi}{2}\rho_0, \quad L_1 = |OA|, \quad \text{иначе } \kappa = 0; \quad \lambda = R_0 \max |\kappa|;$$

$$A = 1 + R_0 \kappa \sin \theta, \quad B = R_0; \quad k_1 = \frac{\kappa \sin \theta}{1 + \kappa R_0 \sin \theta}, \quad k_2 = \frac{1}{R_0}. \quad (1)$$

Здесь  $A, B$  – коэффициенты первой квадратичной формы;  $k_1, k_2$  – главные кривизны поверхности,  $\kappa$  – кривизна осевой линии,  $\rho_0$  – радиус кривизны осевой линии,  $R_0$  – радиус трубы,  $L$  – ее полная длина. Отсюда следует, что модель из [11] применима при  $\lambda < 1$ .

Данная геометрия интересна тем, что при стремлении  $\rho_0$  к нулю получаются две пересекающиеся под прямым углом трубы, рассмотренные как моментные оболочки в [12]. При больших  $\rho_0$  возникает случай, изученный в [10, 11]. Возникает вопрос: при каких значениях параметра  $\lambda$ , связанного с  $\kappa$  и  $\rho_0$ , наблюдается такой же рост напряжений, как в случае прямого стыка труб? При этом важно сохранить применимость системы координат  $(s, \theta, R)$ , изображенную на рис. 1 и подробно описанную в статьях [11, 21].

В рамках этой работы мы полагаем выполненным закон Гука:

$$p^{ij} = \lambda_l I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij}, \quad \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (\nabla^j w^i + \nabla^i w^j). \quad (2)$$

Здесь обозначения следуют [22]:  $p^{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\lambda_l, \mu$  – модули Ламе,  $I_1(\varepsilon)$  – первый инвариант тензора деформаций,  $g^{ij}$  – компоненты метрического тензора,  $\varepsilon^{ij}$  – компоненты тензора деформаций,  $w^i$  – компоненты вектора перемещений.

В приближении теории технической оболочки В.З. Власова [23], получим систему уравнений, описывающую обе поставленные задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial s} - \frac{1-\nu}{B} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta} + (1-\nu) \left( k_1 k_2 u - \frac{k_2}{A} \frac{\partial w}{\partial s} \right) &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} X, \\ \frac{1}{B} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{A} \frac{\partial \chi_0}{\partial s} + (1-\nu) \left( k_1 k_2 v - \frac{k_1}{B} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} Y, \\ - (k_1 + k_2) \cdot I^{(0)} + \frac{1-\nu}{AB} \left[ 2AB k_1 k_2 w + \frac{\partial}{\partial s} (B k_2 u) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A k_1 v) \right] - & \\ - \frac{h^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{h^2}{12} \nabla^2 [(k_1^2 + k_2^2) w] &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} Z, \quad (3) \\ \nabla^2 &= \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} \right) \right]. \\ I^{(0)} &= \frac{1}{A} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{A}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \kappa \cos \theta \right) + \frac{1}{A} \left( \frac{A}{R_0} + \kappa \sin \theta \right) w - \frac{1}{2A^2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right], \\ \chi_0 &= \frac{1}{2AB} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (B v) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A u) \right], \\ \frac{1}{h} X &= -\rho_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{h} \Phi_t (\vartheta_{s0}), \\ \frac{1}{h} Y &= -\rho_t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{2\mu u^* \cos \theta}{h R_0 \left( 0,5 - \ln \left| \frac{\gamma \rho_e u^*}{\mu} R_0 \right| \right)}, \\ \frac{1}{h} Z &= -\rho_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{h} (p - p_e), \end{aligned}$$

где обозначено:  $u, v, w$  – перемещения срединной поверхности трубы вдоль координат  $s, \theta, R$ ;  $X, Y, Z$  – компоненты внешних объемных сил, действующих вдоль координат  $s, \theta, R$ ;  $p_e$  – давление внешней среды;  $A, B$  определены формулами (1).

**Замечание 1.** Различие между задачами (A) и (B) при формулировке системы уравнений заключается в следующем: в случае гладкого стыка с разрывом только кривизны (A) система уравнений (3) сформулирована во всей области целиком, тогда как в задаче (B), содержащей линии излома, область определения уравнений требует разбиения на две или более частей вдоль этих линий. Для обеспечения согласованности решений на линиях излома необходимо ввести дополнительные условия сопряжения.

Заметим, что в задаче (B) срединные поверхности цилиндрических труб соединены по эллипсу:

$$x = L_1 + R_0 \sin \theta, \quad y = -R_0 \sin \theta, \quad z = R_0 \cos \theta. \quad (4)$$

На этой линии определяются векторы касательной  $\mathbf{t}$ , нормали  $\mathbf{n}$  и бинормали  $\mathbf{b}$  к линии соединения  $\mathcal{L}$ , здесь они определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} (\cos \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}), \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos^2 \theta}} (\sin \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} + 2 \cos \theta \mathbf{k}), \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Далее на линии соединения накладываются геометрические и силовые условия сопряжения, что ведет к задаче с сингулярностью. Подробно постановка задачи описана в статье [12].

Математическая постановка задачи (A) заключается в наложении краевых условий на уравнения (3), задании правых частей и кривизны  $\kappa$  в (1), и описана в статье [11].

Основная сложность численного решения задачи (B) связана с необходимостью разделения на две системы уравнений и обеспечения выполнения условий согласования на линии (4). В то же время, на практике чаще встречаются угловые соединения с плавным переходом, как в задаче (A). Это позволяет сформулировать следующую гипотезу.

**Предложение 1.** Существуют такие значения параметров  $\lambda, R_0, h, \kappa$ , при которых распределение напряжений в угловом соединении в задаче (A) приближается к распределению напряжений в задаче (B).

Поскольку понятие близости значений напряжений не имеет строгого определения и может интерпретироваться по-разному в зависимости от приложения, введем следующее формальное определение.

**Определение 1.** В рамках настоящей работы максимальные напряжения считаются близкими, если их значения отличаются не более чем на 10%, при условии, что большее из них превышает 343 МПа.

Данный критерий выбран с учетом того, что при численном моделировании рассматривается материал с пределом текучести  $\sigma_T = 343$  МПа. Из приведенного определения следует, что диапазон близких к  $\sigma_T$  значений напряжений составляет  $309 \text{ МПа} \leq \sigma_z \leq 378 \text{ МПа}$ . При выборе вместо  $\sigma_T$  другого контрольного значения этот интервал изменится.

Рассмотрим предельные значения параметра  $\lambda$ . В работах [10, 11] использовалось предположение  $\lambda \ll 1$ . В нашем случае требуется большее значение этого параметра, однако из формул (1) следует ограничение  $\lambda < 1$ , поскольку знаменатель в выражении для  $k_1$  не должен обращаться в ноль. Необходимо также учитывать, что труба представляет собой трехмерное тело, что исключает возможность самопересечения ее поверхности. Математически это условие выражается следующим неравенством:

$$\lambda \leq \frac{R_0}{R_0 + 0,5h} \iff \rho_0 \geq R_0 + 0,5h. \quad (5)$$

Данное соотношение следует из физического смысла введенных величин:  $\rho_0$  – радиус осевой линии трубы,  $R_0$  – радиус ее срединной поверхности,  $h$  – толщина стенки.

## 2. Метод и алгоритм численного анализа

Система FreeCAD, распространяемой под лицензией GNU LGPL, предназначена для решения задачи теории упругости методом конечных элементов. Уравнения равновесия деформируемого твердого тела выводятся из общих уравнений для напряжений [22]:

$$\nabla_i \sigma^{ki} = \rho_t F^k, \quad (6)$$

где  $\sigma^{ki}$  – контравариантные компоненты тензора напряжений,  $\nabla_i$  – оператор ковариантного дифференцирования,  $\rho_t$  – плотность материала твердого тела,  $F^k$  – контравариантные компоненты вектора внешних сил. Встроенный решатель Calculix использует метод конечных элементов для получения численного решения трехмерной задачи теории упругости, полученной из уравнений (6) (см. [9]).

С другой стороны, уравнения (3) также получены из (6) (см. [11]). Их решения отличаются от точного решения линейной задачи теории упругости не более чем на 5%, что соответствует точности теории оболочек [23]. Следовательно, выполнено следующее

**Предложение 2.** *Решение уравнений (3), дополненных соответствующими граничными условиями, может быть с достаточной точностью аппроксимировано решением, полученным методом конечных элементов в среде CAE FreeCAD, для качественного анализа задачи.*

Предложение 2 позволяет утверждать, что на основе вышеупомянутого численного решения МКЭ можно достоверно определить наличие особенностей в решении уравнений (3), при условии корректного построения конечно-элементной модели.

Для решения задачи разработан алгоритм численного анализа методом конечных элементов в выбранной среде моделирования. Рассмотрены два случая:

- А)  $0,95 > \lambda > 0,5$  (плавное соединение труб),
- Б)  $\lambda \rightarrow \infty$  (соединение труб под углом).

Математическая модель для плавно соединенных труб подробно описана в работах [10, 11], а для труб, соединенных под углом, – в [12]. В последнем случае было показано, что при соединении труб под углом наблюдается быстрый рост напряжений, что требует особого внимания при проектировании таких конструкций. В данной работе явление роста напряжений исследовано в пакете CAE FreeCAD с использованием трехмерных тетраэдрических элементов, которые обеспечивают высокую точность расчетов.

### Алгоритм решения задачи в FreeCAD:

#### 1. Построение 3D-модели:

- Использование инструментов Scetcher для создания эскизов.
- Применение инструментов Part Design для построения трехмерной геометрии модели.

#### 2. Создание конечно-элементной модели:

- Создание контейнера анализа (Analysis) для хранения данных о модели.
- Построение сетки МКЭ (Mesh) с использованием автоматических или ручных настроек для обеспечения оптимального качества сетки.

#### 3. Задание условий:

- Выбор материала (Material for Solid) из встроенной библиотеки или задание пользовательских свойств материала.
- Наложение граничных условий и нагрузок (Mechanical Constraints) для учета реальных условий работы конструкции.

#### 4. Решение задачи:

- Генерация исходных данных для решателя Calculix (Solver job control).

- Запуск расчета (Solve, Run) и мониторинг процесса решения.
5. Визуализация результатов:
- Использование инструментов Results, Show Results для анализа напряжений, деформаций и других параметров.
  - Визуализация результатов с помощью инструмента Results, Pipeline для наглядного представления данных.

### 3. Результаты численного анализа

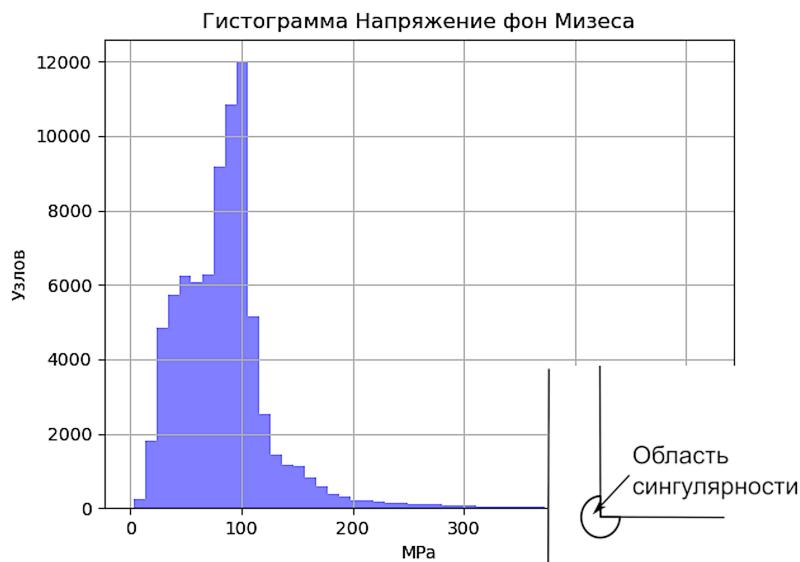
Из ряда решенных задач были выбраны два тестовых примера.

**Задача 1** (Задача А): Труба с критическим изгибом профиля. Модель представляет собой соединение двух труб (внутренний радиус  $R_0 = 42,5$  мм, толщина стенки  $h = 5$  мм, длины  $L_1 = L_2 = 250$  мм) коленом в виде сегмента тора (радиус кольца  $\rho_0 = 45,1$  мм). Осевые линии труб расположены под углом  $90^\circ$  и шарнирно оперты на концах. На трубы действует внутреннее давление  $p_0 = 10$  МПа. Материал – сталь S335JO (модуль Юнга  $E = 210$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , предел текучести  $\sigma_T = 343$  МПа, предел прочности  $\sigma_B = 490$  МПа).

**Задача 2** (Задача Б): Труба с изломом профиля. Модель аналогична задаче 1, за исключением того, что трубы жестко соединены под углом  $90^\circ$ . Материал, условия закрепления и нагрузка идентичны задаче 1.

**Методика расчетов.** Исследование проводилось в два этапа. На первом этапе решалась задача 2 для определения предельных напряжений во входящем углу соединения труб. На втором этапе строились 3D-модели для задачи 1 с варьируемым параметром  $\lambda$  при постоянных значениях  $L_i$ ,  $R_0$  и  $h$ . Радиус  $\rho_0$  изменялся в интервале  $0,65 \leq \lambda < 1$ , так как при  $\lambda = 0,6$  напряжения оказались незначительными.

**Численное моделирование.** Для решения задачи 2 использовалась тетраэдральная сетка с 78 530 узлами и 40 600 объемными элементами. Распределение эквивалентных напряжений Мизеса по узлам сетки показано на рис. 2. Максимальные напряжения наблюдались в области сингулярности (отмеченной на рис. 2), а их значения, включая средние напряжения, приведены в таблице.



**Рис. 2.** Гистограмма распределения напряжений по узлам в эталонной задаче 2

Для задачи 1 использовалась более плотная тетраэдральная сетка с 224 135 узлами и 145 523 объемными элементами, что обусловлено необходимостью учета особенностей в области

изгиба (рис. 3). Критические напряжения Мизеса достигались при  $\lambda = 0,942$ , что соответствует условиям задачи 1. Распределение напряжений по узлам сетки МКЭ представлено на рис. 3.

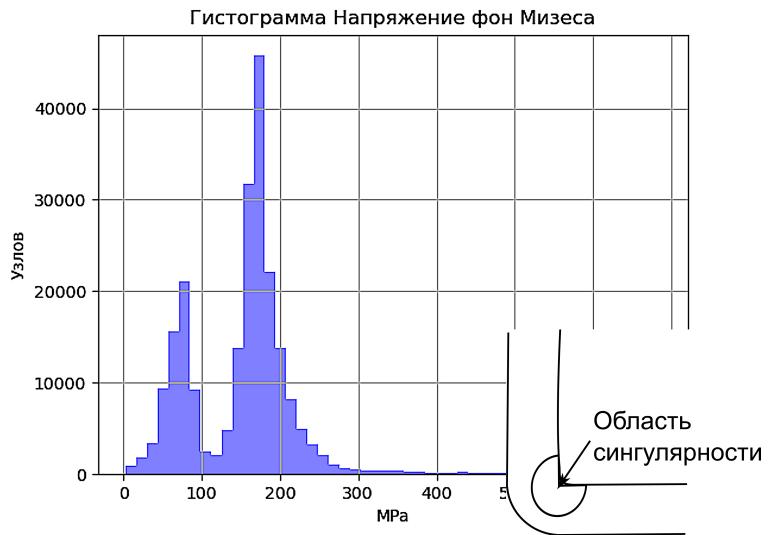


Рис. 3. Гистограмма распределения напряжений по узлам в тестовой задаче 1

Численные эксперименты показали, что значение  $\lambda = 0,942$  является максимально достижимым в системе FreeCAD для заданной геометрии. Условие отсутствия самопересечения трубы накладывает ограничение на геометрические параметры (5), что в данном случае соответствует  $\lambda_{lim} \leq 0,944(4)$ . Это условие необходимо для корректного применения системы координат [11].

**Анализ результатов.** Относительное отклонение напряжения в задаче 1 составило:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{395,5 - 360}{395,5} \cdot 100\% \approx 9\%.$$

Согласно определению 1, максимальное напряжение в задаче 1 близко к значению в задаче 2. Значения предельных напряжений приведены в таблице.

Таблица

Напряжения по Мизесу в угловом соединении труб

Эквивалентное напряжение	В вершине угла стыка	Среднее
Задача 1	360 МПа	158 МПа
Задача 2	395,5 МПа	85 МПа

Среднее напряжение  $\sigma_m$  рассчитывалось по формуле:

$$\sigma_m = \sum_{i=1}^M N_i \cdot \sigma_i / N,$$

где  $M$  – число интервалов на гистограммах (рис. 2, рис. 3),  $N_i$  – количество узлов на интервале,  $\sigma_i$  – эквивалентное напряжение на интервале,  $N$  – общее количество узлов сетки. Это значение характеризует напряженно-деформированное состояние образца в целом, учитывая вклад напряжений в области сингулярности.

Итак, несмотря на наличие особенности в области излома, напряженно-деформированное состояние в задаче 1 является более опасным, чем в задаче 2. Полученные результаты также показали, что достижение значений  $\lambda$ , близких к предельному  $\lambda_{lim} = 0,944(4)$ , в среде FreeCAD невозможно из-за ошибок при автоматическом построении сетки МКЭ со сгущением. Это указывает на необходимость разработки новых численных методов, не требующих сгущения сеток, аналогичных методу [19].

## Заключение

Установлено, что существует критическая кривизна профиля, при которой напряжения в задачах со слабой и сильной сингулярностью становятся сравнимыми, при этом сохраняются геометрия профиля и применимость системы координат, предложенной в [11]. При достижении предельного значения  $\lambda$  на поверхности трубы возникает особая точка, в которой пересекаются координатные линии, что приводит к образованию сингулярности. Данный подход позволяет исследовать задачу с сингулярностью без необходимости разбиения области решения на участки, как это требовалось в [12]. Установлен предел применимости комплекса программ FreeCAD для данного класса задач.

## Литература

1. Ye Tang. Progress on Dynamics and Control of Pipes Conveying Fluid. Review / Ye Tang, Hu-Jie Zhang, Li-Qun Chen, Qian Ding, Qiuyang Gao, Tianzhi Yang // Nonlinear Dynamics. – 2024. – V. 113. – P. 6253–6315.
2. Wenhao Ji. Reduced-Order Modeling and Vibration Transfer Analysis of a Fluid-Delivering Branch Pipeline that Consider Fluid-Solid Interactions / Wenhao Ji, Hongwei Ma, Wei Sun, Yinhang Cao // Frontiers of Mechanical Engineering. – 2024. – V. 19. – 10 p.
3. Klar, A. Shell Versus Beam Representation of Pipes in the Evaluation of Tunneling Effects on Pipelines / A. Klar, A.M. Marshall // Tunnelling and Underground Space Technology. – 2008. – V. 23, № 4. – P. 431–437.
4. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976.
5. Tambaca, J. A New Linear Naghdi Type Shell Model for Shells with Little Regularity / J. Tambaca, Z. Tutek // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – V. 40. – P. 10549–10562.
6. Muftah, A.M. CFD Modeling of Elbow and Orifice Meters / A.M. Muftah // Sirte University Scientific Journal (Applied Sciences). – 2017. – V. 7, № 1. – P. 15–32.
7. Hallquist, J.O. LS-DYNA. Theoretical Manual. Livermore Software Technology Corporation (LSTC). – URL: [https://www.academia.edu/23076592/LS\\_DYNA\\_Theory\\_Manual\\_LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY CORPORATION\\_LSTC](https://www.academia.edu/23076592/LS_DYNA_Theory_Manual_LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY CORPORATION_LSTC) (дата обращения 20.03.2025)
8. Collette, B. FreeCAD for Inventors: Practical Examples and Clear Descriptions / B. Collette. – Gurley: Purple Squirrel Productions LLC, 2018.
9. Sachidanand, J. FreeCAD Exercises: 200 Practice Exercises for FreeCAD and Other Feature-Based 3D Modeling Software / J. Sachidanand. – North Charleston: Independently Published, 2019.
10. Rukavishnikov, V.A. Dynamics of a Fluid-Filled Curvilinear Pipeline / V.A. Rukavishnikov, O.P. Tkachenko // Applied Mathematics and Mechanics. – 2018. – V. 39, № 6. – P. 905–922.
11. Rukavishnikov, V.A. Approximate Resolving Equations of Mathematical Model of a Curved Thin-Walled Cylinder / V.A. Rukavishnikov, O.P. Tkachenko // Applied Mathematics and Computation. – 2022. – V. 422. – Article ID: 126961, 20 p.
12. Rukavishnikov, V.A. Mathematical Model of the Pipeline with Angular Joint of Elements / V.A. Rukavishnikov, O.P. Tkachenko // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2020. – V. 43(13). – P. 7550–7568.
13. Рукавишников, В.А. О принадлежности  $R_\nu$ -обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  / В.А. Рукавишников, Е.В. Кузнецова // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 894–898.
14. Рукавишников, В.А. Существование и единственность  $R_\nu$ -обобщенного решения задачи Дирихле для системы Ламе с угловой сингулярностью / В.А. Рукавишников, Е.И. Рукавишникова // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 6. – С. 848–856.
15. Rukavishnikov, V.A. Weighted FEM for Two-Dimensional Elasticity Problem with Corner Singularity / V.A. Rukavishnikov // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – 2016. – V. 112. – P. 411–419.
16. Rukavishnikov, V.A. Error Estimate FEM for the Nikol'skij–Lizorkin Problem with Degeneracy / V.A. Rukavishnikov, E.I. Rukavishnikova // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. – V. 403. – Article ID: 113841, 12 p.
17. Rukavishnikov, A.V. New Numerical Approach for the Steady-State Navier–Stokes Equations with Corner Singularity / A.V. Rukavishnikov, V.A. Rukavishnikov // International Journal of Computational Methods. – 2022. – V. 19, № 9. – Article ID: 2250012.

18. Rukavishnikov, V.A. Theoretical Analysis and Construction of Numerical Method for Solving the Navier–Stokes Equations in Rotation Form with Corner Singularity / V.A. Rukavishnikov, A.V. Rukavishnikov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2023. – V. 429. – P. 115218.
19. Rukavishnikov, V.A. Body of Optimal Parameters in the Weighted Finite Element Method for the Crack Problem / V.A. Rukavishnikov // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2021. – V. 7, № 4. – P. 2159–2170.
20. Rukavishnikov, V.A. Weighted Finite Element Method and Body of Optimal Parameters for Elasticity Problem with Singularity / V.A. Rukavishnikov, E.I. Rukavishnikova // Computers and Mathematics with Applications. – 2023. – V. 151. – P. 408–417.
21. Rukavishnikov, V.A. Numerical and Asymptotic Solution of the Equations of Propagation of Hydroelastic Vibrations in a Curved Pipe / V.A. Rukavishnikov, O.P. Tkachenko // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2000. – V. 41, № 6. – P. 1102–1110.
22. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. / Л.И. Седов. – СПб.: Лань, 2004.
23. Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Избранные труды. Том 1 / В.З. Власов. – М.: Издательство АН СССР, 1962.

Виктор Анатольевич Рукавишников, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, лаборатория «Математическое моделирование в физике и технике», Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук (г. Хабаровск, Российская Федерация), vark0102@mail.ru.

Олег Павлович Ткаченко, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, лаборатория «Математическое моделирование в физике и технике», Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук (г. Хабаровск, Российская Федерация), olegt1964@gmail.com.

Поступила в редакцию 13 марта 2025 г.

---

MSC 65N30, 65Y99

DOI: 10.14529/mmp250409

## FINITE ELEMENT ANALYSIS OF STRESSES IN PIPELINE JOINTS USING OPEN SOURCE SOFTWARE

**V.A. Rukavishnikov<sup>1</sup>, O.P. Tkachenko<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation  
E-mail: vark0102@mail.ru, olegt1964@gmail.com

The paper presents the results of numerical simulation using the finite element method (FEM) in the FreeCAD environment, confirming the hypothesis about the occurrence of a stress singularity in an L-shaped bend of a pipeline. The study was conducted on two three-dimensional models: a smooth pipe connection with a break in the curvature of the axis and an angular connection with an infinitely large curvature at the junction. The developed FEM algorithm made it possible to simulate both types of connections in a single three-dimensional geometry. The critical radius of curvature was found, at which the stresses in the smooth connection model reach the level of stresses in the angular connection model. The numerical simulation results presented in the article demonstrate the influence of the connection geometry on the stress distribution and confirm the presence of a singularity in smooth connections with small radii of curvature. The work contributes to the development of stress analysis methods in complex pipeline systems.

*Keywords:* stress singularity; L-bend; finite element method; FreeCAD; numerical simulation; pipelines.

## References

1. Ye Tang, Hu-Jie Zhang, Li-Qun Chen, Qian Ding, Qiuyang Gao, Tianzhi Yang. Recent Progress on Dynamics and Control of Pipes Conveying Fluid. Review. *Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 113, pp. 6253–6315. DOI: 10.1007/s11071-024-10486-1
2. Wenhao Ji, Hongwei Ma, Wei Sun, Yinhang Cao. Reduced-Order Modeling and Vibration Transfer Analysis of a Fluid-Delivering Branch Pipeline that Consider Fluid-Solid Interactions. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2024, vol. 19, 10 p. DOI: 10.1007/s11465-024-0781-7

3. Klar A. Marshall A.M. Shell Versus Beam Representation of Pipes in the Evaluation of Tunneling Effects on Pipelines. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2008, vol. 23, pp. 431–437. DOI: 10.1016/j.tust.2007.07.003
4. Gol'denveiser A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. Moscow, Nauka, 1976. (in Russian)
5. Tambaca J., Tutek Z. A New Linear Naghdi Type Shell Model for Shells with Little Regularity. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, vol. 40, pp. 10549–10562. DOI: 10.1016/j.apm.2016.07.007
6. Muftah A.M. CFD Modeling of Elbow and Orifice Meters. *Sirte University Scientific Journal (Applied Sciences)*, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 15–32.
7. Hallquist J.O. *LS-DYNA. Theoretical Manual*. Livermore Software Technology Corporation (LSTC). Available at: [https://www.academia.edu/23076592/LS\\_DYNA\\_Theory\\_Manual](https://www.academia.edu/23076592/LS_DYNA_Theory_Manual) LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY CORPORATION LSTC (accessed on 20.03.2025)
8. Collette B. *FreeCAD for Inventors: Practical Examples and Clear Descriptions*. Gurley, Purple Squirrel Productions LLC, 2018.
9. Sachidanand J. *FreeCAD Exercises: 200 Practice Exercises for FreeCAD and Other Feature-Based 3D Modeling Software*. North Charleston, Independently Published, 2019.
10. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Dynamics of a Fluid-Filled Curvilinear Pipeline. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, vol. 39, no. 6, pp. 905–922. DOI: 10.1007/s10483-018-2338-9
11. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Approximate Resolving Equations of Mathematical Model of a Curved Thin-Walled Cylinder. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, vol. 422, article ID: 126961, 20 p. DOI: 10.1016/j.amc.2022.126961
12. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Mathematical Model of the Pipeline with Angular Joint of Elements. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, no. 13, pp. 7550–7568. DOI: 10.1002/mma.5751
13. Rukavishnikov V.A., Kuznetsova E.V. The  $R_\nu$ -Generalized Solution of a Boundary Value Problem with a Singularity Belongs to the Space  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$ . *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no 6, pp. 913–917. DOI: 10.1134/S0012266109060147
14. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Existence and Uniqueness of an  $R_\nu$ -Generalized Solution of the Dirichlet Problem for the Lame System with a Corner Singularity. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no 6, pp. 832–840. DOI: 10.1134/S0012266119060107
15. Rukavishnikov V.A. Weighted FEM for Two-Dimensional Elasticity Problem with Corner Singularity. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 2016, vol. 112, pp. 411–419. DOI: 10.1007/978-3-319-39929-4\_39
16. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Error Estimate FEM for the Nikol'skij–Lizorkin Problem with Degeneracy. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, vol. 403, article ID: 113841. DOI: 10.1016/j.cam.2021.113841
17. Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A. New Numerical Approach for the Steady-State Navier–Stokes Equations with Corner Singularity. *International Journal of Computational Methods*, 2022, vol. 19, no. 9, article ID: 2250012. DOI: 10.1142/S0219876222500128
18. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Theoretical Analysis and Construction of Numerical Method for Solving the Navier – Stokes Equations in Rotation Form with Corner Singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2023, vol. 429, article ID: 115218. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115218
19. Rukavishnikov V.A. Body of Optimal Parameters in the Weighted Finite Element Method for the Crack Problem. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2021, vol. 7, no. 4, pp. 2159–2170. DOI: 10.22055/jacm.2021.38041.3142
20. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Weighted Finite Element Method and Body of Optimal Parameters for Elasticity Problem with Singularity. *Computers and Mathematics with Applications*, 2023, vol. 151, pp. 408–417. DOI: 10.1016/j.camwa.2023.10.021
21. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Numerical and Asymptotic Solution of the Equations of Propagation of Hydroelastic Vibrations in a Curved Pipe. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, no. 6, pp. 1102–1110. DOI: 10.1023/A:1026619009228
22. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. Tom 1.* [Continuum Mechanics. Volume 1]. Saint Petersburg, Lan, 2004. (in Russian)
23. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tekhnike. Izbrannye trudy* [General Theory of Shells and Its Applications in Engineering. Selected Works]. Moscow, USSR Academy of Sciences Publishing, 1962. (in Russian)

Received March 13, 2025