

## АНАЛИЗ И ПРОГНОЗ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ РОБОТА, РАБОТАЮЩЕГО СОВМЕСТНО С ЧЕЛОВЕКОМ

Д.А. Мастеренко<sup>1</sup>, М.М. Стебулянин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ «СТАНКИН», г. Москва, Российская Федерация

При совместном функционировании робототехнического комплекса и человека-оператора возникает задача обеспечения предотвращения столкновений звеньев роботов и тела человека. Решение этой задачи требует не только знания их положений в каждый момент времени, но и прогноз на некоторое время вперед. Однако управляющие программы и реализуемые ими законы движения могут быть известны не для всех элементов робототехнического комплекса. В настоящей статье рассматривается метод прогнозирования положения звена робототехнического комплекса, не требующий наличия априорной информации о его структуре и законах движения звеньев. Метод основан на канонизации матричных структур, построенных по накопленной наблюдательной информации о предыдущих положениях звена, то есть нахождении матричных делителей нуля и единицы. Он может применяться к робототехническим комплексам с системами управления, описываемыми линейными уравнениями. Выполнена вычислительная реализация метода в среде Matlab. Приведены результаты математического моделирования предлагаемого решения для некоторых структур механизмов робота.

*Ключевые слова:* коллаборативные роботы; прогноз траекторий; идентификация линейной системы; канонизация матриц; матричный делитель нуля.

### Введение

Одной из важных задач управления коллаборативными роботами является предотвращение контакта или столкновения между звеньями робота и телом человека. Для решения этой задачи в следящей системе требуется постоянная проверка условий нахождения частей робота и тела человека в одной и той же области, причем не только в непосредственно взятый момент времени, но и на некоторую перспективу, что требует прогнозирования движения обоих объектов.

Задача усложняется, когда в совместной работе принимают участие роботы, не входящие в постоянный состав робототехнического комплекса (роботы – контрагенты). Например, это могут быть транспортные или складские роботы, лишь время от времени выполняющие определенные операции совместно с производственным роботом и человеком-оператором. В таких условиях система управления робототехническим комплексом может не располагать полной информацией о запрограммированном движении всех звеньев робота, временно участвующего в совместной работе, и даже информацией о количестве его звеньев. Доступным наблюдению является лишь положение последнего звена робота, которое и совершает рабочие операции. Сказанное можно отнести и к движениям человека, выполняющего операции совместно с роботом.

Далее в этой статье будем говорить о «движении звена», понимая под этим как звено робота, так и части руки человека (предплечья, плеча) или даже его корпуса, считая, что корпус аппроксимирован цилиндром, ось которого и рассматривается в качестве движущегося звена. Для обеспечения безопасности совместного функционирования человека и роботов в описанных условиях следящая система должна прогнозировать положение их движущихся звеньев по накопленной наблюдательной информации о предшествующих положениях.

Задачи прогнозирования движения наблюдаемых объектов имеют большое практическое значение и рассматриваются со второй половины XX века в радиолокации [1], при слежении за движущимся объектом в видимом диапазоне [2], при управлении движением [3, 4] и посадкой [5] летательного аппарата.

В радиолокации, согласно [1], применяют такую последовательность приемов прогнозирования движения. При первом появлении информации о движущемся объекте и подтверждении его присутствия на нескольких последующих кадрах осуществляют оценивание параметров его траектории методом наименьших квадратов, полагая, что траектория описывается полиномом невысокой (3 – 4) степени. При этом каждая из координат объекта оценивается независимо от других. По мере накопления информации рекомендуется переходить на использование калмановской фильтрации, при которой вектор состояния и матрица перехода имеют вид, характерный для равноускоренного движения точки.

Полиномиальная подгонка траекторий вполне оправдывает себя при наблюдении за точечными объектами. Она возможна и в задачах анализа траекторий звеньев. Этот способ является привлекательным также с точки зрения возможности робастного оценивания параметров траекторий, то есть защиты от резко выделяющихся наблюдений [6]. Однако трудности, связанные с несоответствием вращательного движения звена представлению траектории в виде полинома невысокой степени, требуют определенных ухищрений, например, введения того или иного способа «устаревания» полученных наблюдений.

Что касается применения дискретного фильтра Калмана – Бьюси в классическом форме для систем вида

$$\mathbf{x}_{i+1} = A\mathbf{x}_i + B\mathbf{u}_i + \mathbf{v}_i \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i = C\mathbf{x}_i + \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}_i$  – вектор состояния системы,  $\mathbf{y}_i$  – вектор наблюдаемых величин,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{w}_i$  – случайные шумы управления и наблюдения, соответственно, то здесь требуется, чтобы были известны матрицы эволюции (перехода от текущего состояния системы к последующему)  $A$  и наблюдения  $C$  (при наличии управления – еще и матрицы управления  $B$ ).

Движения всех звеньев робота сводятся к композиции некоторого количества вращательных и поступательных движений, описываемых линейными преобразованиями пространственных координат от предыдущего положения к последующему. Исходя из этого, сделаем предположение, что запись движения звена в виде (1,2) принципиально может быть осуществлена, в том числе и при ускоренном движении всех или отдельных звеньев. Для этого требуется, как минимум, знание всей структуры робота, в частности, количества и размеров всех предшествующих звеньев, что как раз и не выполняется для роботов, временно участвующих в операциях. Не зная количества предшествующих звеньев, невозможно даже определить порядок системы, то есть размерность фазового пространства (пространства, в котором изменяется вектор состояния).

В описанных обстоятельствах имеет смысл рассмотреть использование методов идентификации моделей линейных динамических систем [7], опирающихся на понятия псевдообращения [8] и сингулярного разложения [9] матриц, а также идейно близких им методов, связанных с вычислением матричных канонизаторов и делителей нуля [10–14]. Отметим, что аналогичные подходы применяются и к изучению и прогнозированию процессов, протекающих в других системах, в том числе не связанных с механическим движением [13, 15, 16].

Методы идентификации линейных систем направлены на нахождение всех матриц системы вида (1,2) по имеющейся информации о входных (управляющих) и выходных (наблюдаемых) сигналах системы. В книге [7] приведены решения трех классов задач:

1. Идентификация при наличии измерений управляющих и наблюдаемых величин на протяжении некоторого времени, но без стохастических составляющих.
2. идентификация при отсутствии управления по информации о наблюдаемых величинах при наличии стохастических составляющих в формулах (1) и (2).
3. идентификация при наличии как управления, так и стохастических составляющих, по измерениям управляющих и наблюдаемых величин.

Таким образом, для идентификации требуется знание не только наблюдаемых величин – координат точек, – но и управляющих воздействий за тот же промежуток времени. Однако в нашей задаче матрицы в явном виде вычислять не обязательно, главное – уметь предсказывать следующие значения наблюдаемых координат по предшествующим. Поэтому обратимся к методам, в различных аспектах представленным в [10–14] и других публикациях того же коллектива авторов. Заметим, что, несмотря на довольно большое число этих публикаций, некоторые моменты их методики описаны не вполне ясно, к тому же разбросаны по различным источникам, поэтому ниже довольно подробно рассмотрим действия, необходимые для прогнозирования положения звена, лишь с небольшой модификацией обозначений.

## 1. Движение звена как процесс в линейной динамической системе

Рассмотрим в настоящей статье задачу прогнозирования движения звена, пренебрегая случайными составляющими, то есть попробуем представить его движение в виде

$$\mathbf{x}_{i+1} = A\mathbf{x}_i + B\mathbf{u}_i, \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_i = C\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где вектор состояния  $\mathbf{x}_i$  содержит  $n$  элементов: координаты точек  $P_0$  – начала звена и  $P_1$  – конца звена в  $i$ -й момент времени, а также их производные до некоторого неизвестного порядка:

$$\mathbf{x}_i = (P_{0i}^1 \ P_{0i}^2 \ P_{0i}^3 \ P_{1i}^1 \ P_{1i}^2 \ P_{1i}^3 \ \dot{P}_{0i}^1 \ \dot{P}_{0i}^2 \ \dots \ \dots)^\top.$$

Матрицы  $A$  (размера  $n \times n$ ) и  $B$  (размера  $n \times k$ ) постоянны и неизвестны, матрица  $C$  ( $6 \times n$ ) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

так что

$$\mathbf{y}_i = C\mathbf{x}_i = (P_{0i}^1 \ P_{0i}^2 \ P_{0i}^3 \ P_{1i}^1 \ P_{1i}^2 \ P_{1i}^3)^\top,$$

то есть координаты точек начала и конца звена наблюдаемы, а их производные – нет. Важно, что ранг матрицы  $C$  равен количеству наблюдаемых координат, то есть в нашем случае шести. Векторы управления  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^k$  неизвестны при всех  $i = 1, 2, \dots$ , числа  $n$  и  $k$  также неизвестны.

В первую очередь упростим запись системы (3), (4), избавившись от неизвестного управления. В [5] это сделано путем рассмотрения системы управления как линейной динамической системы, обладающей своим собственным вектором состояния, в зависимости от которого и формируется управляющее воздействие в каждый момент времени. Вектор состояния системы управления присоединяется к вектору состояния системы, и относительно полученного расширенного вектора состояния записываются дальнейшие уравнения.

В нашем случае такое рассмотрение недостаточно, поскольку управление в робототехнике и мехатронике формируется обязательно с учетом сигналов обратной связи. В распространенном линейном приближении это можно выразить формулой

$$\mathbf{u}_{i+1} = A_u\mathbf{u}_i + H(\mathbf{g}_i - \mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $\mathbf{g}_i$  – вектор задающего воздействия, содержащий желаемые для  $i$ -го момента времени значения координат, а также, возможно, скоростей и производных более высокого порядка, дополненный, если требуется, нужным количеством нулей до размерности  $n$ ,  $H$  – матрица размера  $k \times n$ , формирующая сигнал обратной связи по рассогласованию  $\mathbf{g}_i - \mathbf{x}_i$ .

Покажем, что и в этом случае можно записать уравнения системы с одной расширенной матрицей эволюции. Сформируем расширенный вектор состояния

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{g}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+k},$$

с использованием которого (5) можно представить в виде

$$\mathbf{u}_{i+1} = \begin{pmatrix} -H & A_u & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{g}_i \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Что касается последовательности задающих векторов  $\mathbf{g}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , то она является не вполне произвольной: для того, чтобы звено робота принципиально могло совершать движение в соответствии с этой последовательностью, она должна удовлетворять некоторому разностному уравнению, которое для широкого набора физически реализуемых траекторий можно считать линейным:

$$\mathbf{g}_{i+1} = A_g \mathbf{g}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

причем матрица  $A_g$  для следящей системы также неизвестна.

Объединив (3), (6) и (7), получаем уравнение

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}}_i, \quad (8)$$

с расширенной матрицей  $\tilde{A}$  размера  $(2n + k) \times (2n + k)$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ -H & A_u & H \\ 0 & 0 & A_g \end{pmatrix}.$$

Вместо (4) запишем уравнение

$$\mathbf{y}_i = \tilde{C} \tilde{\mathbf{x}}_i, \quad (9)$$

где расширенная матрица  $\tilde{C}$  получается из  $C$  просто добавлением нужного количества нулевых столбцов, и ее размер равен  $6 \times (2n + k)$ .

Теперь формализуем процесс накопления наблюдательной информации. Запишем значения вектора наблюдаемых величин системы на протяжении нескольких шагов, предшествующих  $i$ -му:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i-\nu} &= \tilde{C} \tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu}, \\ \mathbf{y}_{i-\nu+1} &= \tilde{C} \tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu+1} = \tilde{C} \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mathbf{y}_{i-1} &= \tilde{C} \tilde{\mathbf{x}}_{i-1} = \tilde{C} \tilde{A}^{\nu-1} \tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu}, \\ \mathbf{y}_i &= \tilde{C} \tilde{\mathbf{x}}_i = \tilde{C} \tilde{A}^{\nu} \tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu}. \end{aligned}$$

Если выписать компоненты векторов наблюдений  $\mathbf{y}_{i-\nu}$ ,  $\mathbf{y}_{i-\nu+1}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{y}_i$  в один столбец

$$Y_i^{\nu,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{i-\nu} \\ \mathbf{y}_{i-\nu+1} \\ \dots \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6(\nu+1)},$$

то вышеприведенные соотношения можно записать как одно матричное равенство

$$Y_i^{\nu,1} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu} \quad (10)$$

с блочной матрицей  $\mathbf{C}$   $(\nu + 1) \times (n + k)$ :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}^{\nu} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Число  $\nu$  должно быть выбрано не менее индекса наблюдаемости системы, то есть такого значения, начиная с которого ранг матрицы (11) перестает увеличиваться. Тогда для матрицы (11) справедливо каноническое разложение [17]

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^L \\ \bar{\mathbf{C}}^L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $I$  – единичная матрица размера, равного рангу матрицы (11),  $0$  – матрица соответствующих размеров, состоящая из нулей.  $\tilde{\mathbf{C}}^L$  называется левым делителем единицы (левым канонизатором), а  $\bar{\mathbf{C}}^L$  – левым делителем нуля для матрицы  $\mathbf{C}$ , то есть сформированная из них матрица размера  $(\nu + 1) \times (n + k)$  удовлетворяет условию

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^L \\ \bar{\mathbf{C}}^L \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}.$$

О способе вычисления матричных делителей единицы и нуля будет сказано далее, в данный момент он не требуется.

С учетом (10) равенство (8) принимает вид

$$Y_i^{\nu,1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^L \\ \bar{\mathbf{C}}^L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu},$$

что равносильно

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^L \\ \bar{\mathbf{C}}^L \end{pmatrix} Y_i^{\nu,1}, \quad (13)$$

откуда можно в явном виде выразить расширенный вектор состояния через набор значений вектора наблюдаемых величин

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu} = \tilde{\mathbf{C}}^L Y_i^{\nu,1}. \quad (14)$$

Применим (14) к следующему моменту времени  $\tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu+1} = \tilde{\mathbf{C}}^L Y_{i+1}^{\nu,1}$ , причем  $\tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu+1} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_{i-\nu}$ , откуда с учетом (13) получаем

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{C}}^L Y_i^{\nu,1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^L \\ \bar{\mathbf{C}}^L \end{pmatrix} Y_{i+1}^{\nu,1}$$

или же

$$Y_{i+1}^{\nu,1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^L \\ \bar{\mathbf{C}}^L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{C}}^L Y_i^{\nu,1}.$$

Обозначая через  $\mathbf{A}$  матрицу размера  $6(\nu + 1) \times 6(\nu + 1)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^L \\ \tilde{\mathbf{C}}^L \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{C}}^L,$$

получаем связь между предыдущими и последующими наблюдениями в следующей простой форме:

$$Y_{i+1}^{\nu,1} = \mathbf{A} Y_i^{\nu,1}. \quad (15)$$

Выразим накопление наблюдательной информации о системе следующим образом: объединим векторы  $Y_i^{\nu,1}$ , полученные за некоторое количество  $h + 1$  последовательных шагов, в матрицу  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$ :

$$\mathbf{Y}_i^{\nu,h} = \begin{pmatrix} Y_{i-\nu-h} & Y_{i-\nu-h+1} & \dots & Y_{i-\nu} \\ Y_{i-\nu-h+1} & Y_{i-\nu-h+2} & \dots & Y_{i-\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{i-h} & Y_{i-h+1} & \dots & Y_i \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Теперь можно записать связь между совокупностями наблюдений в моменты с  $i - \nu - h$  по  $i$  и с  $i - \nu - h + 1$  по  $i + 1$ :

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{\nu,h} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_i^{\nu,h}. \quad (17)$$

Полученное выражение можно рассматривать как матричное уравнение относительно матрицы  $\mathbf{A}$ , решив которое при некотором накоплении наблюдений, можно в дальнейшем осуществлять требуемое прогнозирование. А именно, нужно построить матрицу  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$  по наблюдениям, попавшим в окно, и применить (17). В матрице  $\mathbf{Y}_{i+1}^{\nu,h}$ , как видно из (16), будет содержаться прогнозируемый вектор  $\mathbf{y}_{i+1}$ .

Однако в данном случае явное решение матричного уравнения не требуется. Вместо этого воспользуемся тем, что, согласно [11, 17], уравнение (17) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{\nu,h} \cdot \overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R = 0, \quad (18)$$

где  $\overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R$  – так называемый правый делитель нуля для матрицы  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$ , то есть такая матрица, что каждый ее столбец ортогонален каждой строке матрицы  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$ :

$$\mathbf{Y}_i^{\nu,h} \cdot \overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R = 0. \quad (19)$$

Число строк в матрице  $\overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R$  равно числу столбцов в матрице  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$ . Что касается числа столбцов, то оно определяется рангом матрицы  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$ . Следует также отметить, что если матричный делитель нуля существует и содержит более одного столбца, то он не единственен. В самом деле, если составить матрицу из части столбцов делителя нуля, то полученная матрица, очевидно, также будет удовлетворять условию вида (19). Поэтому условимся понимать под  $\overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R$  матричный делитель нуля наибольшего размера.

Выделим в матрице  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$  два блока: последний столбец и все предыдущие, то есть представим ее в виде

$$\mathbf{Y}_i^{\nu,h} = \left( \mathbf{Y}_{i-1}^{\nu,h-1} \quad Y_i^{\nu,1} \right),$$

и ее делитель нуля  $\overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R$

$$\overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R = \begin{pmatrix} R_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где через  $r_i$  обозначена последняя строка матрицы  $\overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R$ , на которую в (17) умножается последний столбец матрицы  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$ , а через  $R_{i-1}$  – вся остальная часть матрицы, так что (19) можно более подробно представить как

$$\mathbf{Y}_{i+1}^{\nu,h} \cdot \overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{i-1}^{\nu,h-1} & \mathbf{Y}_i^{\nu,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_{i-1}^{\nu,h-1} R_{i-1} + \mathbf{Y}_i^{\nu,1} r_i = 0.$$

Соотношение (18) означает, что при перемножении любой блочной строки матрицы  $\mathbf{Y}_{i+1}^{\nu,h}$  на  $\overline{\mathbf{Y}_i^{\nu,h}}^R$  получается нулевая матрица. Для целей прогнозирования нас интересует последняя блочная строка этой матрицы, содержащая  $\mathbf{y}_{i+1}$ , которую можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{i-h+1} & \mathbf{y}_{i-h+2} & \dots & \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_i^{1,h-1} & \mathbf{y}_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

При умножении (21) на (20), согласно (18), получается нулевая матрица:

$$\begin{pmatrix} Y_i^{1,h-1} & \mathbf{y}_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix} = Y_i^{1,h-1} R_{i-1} + \mathbf{y}_{i+1} r_i = 0,$$

откуда

$$\mathbf{y}_{i+1} r_i = -Y_i^{1,h-1} R_{i-1}.$$

Чтобы получить значение  $\mathbf{y}_{i+1}$ , умножим обе части последнего уравнения справа на  $r_i^\top$ , разделенное на число  $r_i \cdot r_i^\top$ . Для вектора-строки  $r_i$  такая операция означает псевдообращение [8]:

$$r_i^+ = \frac{1}{r_i \cdot r_i^\top} r_i^\top,$$

поэтому в итоге получаем

$$\mathbf{y}_{i+1} = -Y_i^{1,h-1} R_{i-1} r_i^+. \quad (22)$$

Это и есть формула прогнозирования вектора наблюдаемых величин на шаге  $i+1$  по массиву наблюдений до  $i$ -го шага  $Y_i^{1,h-1} = (\mathbf{y}_{i-h+1} \ \mathbf{y}_{i-h+2} \ \dots \ \mathbf{y}_i)$ . Отметим, что в ней не содержится никаких неизвестных величин, матриц, векторов состояния и управления, а присутствуют лишь векторы наблюдений за некоторый промежуток времени. Однако для формирования матрицы  $\mathbf{Y}_i^{\nu,h}$  требуется задать два параметра: индекс управляемости  $\nu$  и ширину окна наблюдения  $h$ . Поскольку структура всей системы и характер движения звеньев предполагаются неизвестными, эти параметры следует либо выбирать с запасом, либо подбирать во время работы. В нижеприведенных примерах показано, чему могут быть равны их значения.

## 2. Вычисление матричных делителей нуля

Чтобы воспользоваться вышеприведенной процедурой прогнозирования положения звена, нужно иметь способ вычисления правого матричного делителя нуля.

В [11] приведен следующий способ выполнения канонизации, то есть вычисления правых и левых делителей нуля, а также правых и левых канонизаторов матрицы. Пусть матрица  $M$  имеет размеры  $m \times n$ . Для начала процедуры канонизации нужно сформировать структуру типа «планшет», в которой слева матрица  $M$  дополнена единичной матрицей порядка  $m$ , а снизу – единичной матрицей порядка  $n$ :

$$\begin{matrix} I_m & M_{m \times n} \\ & I_n \end{matrix}.$$

Индексы при матрицах, как обычно в таких случаях, указывают на их размеры.

Далее к этой структуре следует применять элементарные операции с целью привести матрицу  $M$  к виду, в котором на главной диагонали находятся единицы в количестве, равном ее рангу, а все остальные элементы равны нулю. Это такие же операции

над строками и столбцами, как при реализации метода Гаусса: умножение на константы, сложение, перестановки. Подчеркнем, что над остальными частями «планшета», первоначально равными единичным матрицам, применяются те же самые операции, что и к строкам и столбцам матрицы  $M$ . В итоге «планшет» приводится к следующему виду:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_{r \times m}^L & I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ \bar{M}_{(m-r) \times m}^L & 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \\ & \tilde{M}_{n \times r}^R & \bar{M}_{n \times (n-r)}^R \end{array}$$

где  $\tilde{M}_{r \times m}^L$  и  $\tilde{M}_{n \times r}^R$  – левый и правый канонизаторы,  $\bar{M}_{(m-r) \times m}^L$  и  $\bar{M}_{n \times (n-r)}^R$  – левый и правый делители нуля исходной матрицы.

Описанная процедура канонизации реализована в виде функции `Matlab`. При этом упомянутая «планшетная» структура погружается в двумерный массив, левая нижняя часть которого не используется и только занимает оперативную память. В нашем случае можно не вычислять левые канонизатор и делитель нуля, что также высвободит некоторый объем памяти и сэкономит время вычислений. Таким образом, здесь имеется некоторый резерв для оптимизации программного обеспечения, который может потребоваться при работе с большими объемами данных в реальном времени.

### 3. Численные примеры прогнозирования положения звена

Чтобы убедиться в применимости вышеизложенной методики прогнозирования к движению звеньев робота, рассмотрим следующие простые примеры. Сначала возьмем механизм, состоящий из двух звеньев, осуществляющих вращательное движение: первое звено – в горизонтальной плоскости относительно неподвижного основания, второе – относительно конца первого звена в ортогональной ему вертикальной плоскости (рис. 1). Длины обоих звеньев примем равными по 1 м. В начальном положении первое звено направлено вдоль оси  $OX$ , второе – от конца первого звена в направлении оси  $OY$ . Точками  $P_0$  и  $P_1$  в данном примере являются начало и конец второго звена. Рассчитаем их последовательные положения в следующем режиме: оба вращения равномерные, первое звено поворачивается за один шаг наблюдения на  $0,05$  рад, второе – на  $0,02$  рад. Траектории точек показаны на рис. 2.

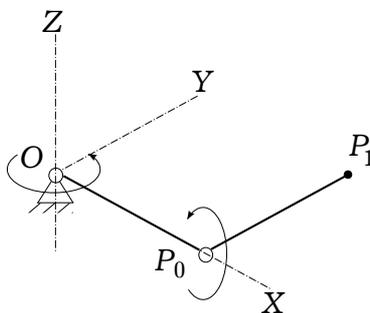


Рис. 1. Пример двухзвенного механизма

Вектор наблюдаемых величин в  $i$ -й момент, в соответствии с ранее сказанным, имеет вид

$$y_i = ( P_{0i}^1 \ P_{0i}^2 \ P_{0i}^3 \ P_{1i}^1 \ P_{1i}^2 \ P_{1i}^3 )^T.$$

Приведем фрагмент табл., в столбцах которой содержатся значения наблюдений в некоторые моменты (табл. 1).

Прогнозирование реализовано в `Matlab` в виде функции `PredictDiv0`, которая берет вышеприведенную табл. до заданного момента, строит необходимые матрицы, выполняет канонизацию и вычисляет по формуле (20) прогноз следующего значения

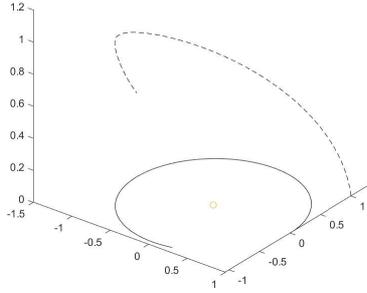


Рис. 2. Траектории точек  $P_0$  (сплошная линия) и  $P_1$  (пунктирная линия)

Таблица 1

Координаты точек второго звена

$i$	1	2	3	4	5	...	14	15	16	17	18
$P_{0i}^1$	1,0000	0,9988	0,9950	0,9888	0,9801	...	0,7961	0,7648	0,7317	0,6967	0,6600
$P_{0i}^2$	0,0000	0,0500	0,0998	0,1494	0,1987	...	0,6052	0,6442	0,6816	0,7174	0,7513
$P_{0i}^3$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	...	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$P_{1i}^1$	1,0000	0,9488	0,8953	0,8396	0,7820	...	0,2112	0,1457	0,0805	0,0158	-0,0483
$P_{1i}^2$	1,0000	1,0485	1,0940	1,1364	1,1756	...	1,3745	1,3793	1,3806	1,3787	1,3735
$P_{1i}^3$	0,0000	0,0200	0,0400	0,0600	0,0799	...	0,2571	0,2764	0,2955	0,3146	0,3335

вектора наблюдений. Например, вызывая `PredictDiv0` для 15-го момента, видим, что полученный результат

```
ans =
0,7317
0,6816
0
0,0805
1,3806
0,2955
```

совпадает с предварительно рассчитанными значениями, указанными в столбце 16. Вызов для 17-го момента дает

```
ans =
0,6600
0,7513
0
-0,0483
1,3735
0,3335
```

Это совпадает с содержимым столбца 18, и так далее. Несколько усложним пример, добавив третье звено той же длины, вращающееся перпендикулярно второму, как показано на рис. 3.

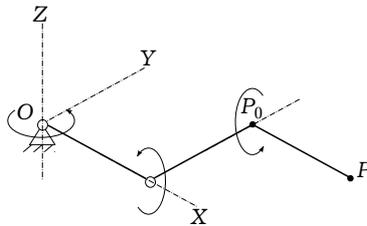


Рис. 3. Пример трехзвенного механизма

Теперь точки  $P_0$  и  $P_1$  – это начало и конец третьего звена. Рассчитанные траектории их движения показаны на рис. 4. Рассчитанные координаты точек частично приведены в табл. 2.

Отметим, что добавление нового звена означает увеличение размерности фазового пространства системы по меньшей мере на 3, однако вышеприведенная процедура прогнозирования никак не должна измениться.

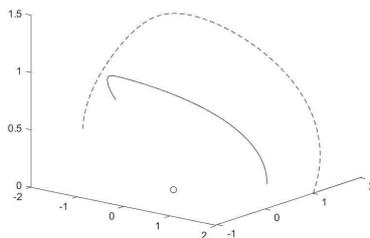


Рис. 4. Траектории точек  $P_0$  (сплошная линия) и  $P_1$  (пунктирная линия)

Таблица 2

Координаты точек третьего звена

$i$	1	2	3	4	5	...	14	15	16	17	18
$P_{0i}^1$	1,0000	0,9488	0,8953	0,8396	0,7820	...	0,2112	0,1457	0,0805	0,0158	-0,0483
$P_{0i}^2$	1,0000	1,0485	1,0940	1,1364	1,1756	...	1,3745	1,3793	1,3806	1,3787	1,3735
$P_{0i}^3$	0,0000	0,0200	0,0400	0,0600	0,0799	...	0,2571	0,2764	0,2955	0,3146	0,3335
$P_{1i}^1$	1,0000	0,9474	0,8896	0,8271	0,7602	...	1,0206	0,9300	0,8390	0,7481	0,6575
$P_{1i}^2$	1,0000	1,0981	1,1922	1,2820	1,3674	...	1,9067	1,9400	1,9679	1,9907	2,0084
$P_{1i}^3$	0,0000	0,0400	0,0799	0,1198	0,1596	...	0,5055	0,5419	0,5778	0,6132	0,6479

Применение той же самой функции PredictDiv0, например, для 14-го момента дает результат, совпадающий со столбцом 15:

```
ans =
0,1457
1,3793
0,2764
0,9300
1,9400
0,5419
```

Вычисление прогноза в другие моменты времени также дает результаты, совпадающие с соответствующими вычислениями координат.

Наконец, рассмотрим ускоренное вращение третьего звена: на каждом шаге будем увеличивать его поворот относительно предыдущего положения на 0.002 рад. Рассчитанные при таком условии координаты точек приведены в табл. 3.

Таблица 3

Координаты точек третьего звена при его ускоренном вращении

$i$	1	2	3	4	5	...	17	18	19	20	21	22
$P_{0i}^1$	1,0000	0,9488	0,8953	0,8396	0,7820	...	0,0158	-0,0483	-0,1115	-0,1737	-0,2347	-0,2945
$P_{0i}^2$	1,0000	1,0485	1,0940	1,1364	1,1756	...	1,3787	1,3793	1,3651	1,3356	1,3391	1,3217
$P_{0i}^3$	0,0000	0,0200	0,0400	0,0600	0,0799	...	0,3146	0,3335	0,3523	0,3709	0,3894	0,4078
$P_{1i}^1$	2,0000	1,9474	1,8895	1,8265	1,7585	...	0,6630	0,6639	0,4668	0,3724	0,2814	0,1945
$P_{1i}^2$	1,0000	1,0981	1,1920	1,2812	1,3651	...	1,7213	1,6796	1,6257	1,5598	1,4823	1,3939
$P_{1i}^3$	0,0000	0,0400	0,0839	0,1318	0,1834	...	0,9955	1,0625	1,1253	1,1829	1,2338	1,2771

Та же самая процедура позволяет получить прогноз и в этом случае. Например, для 18-го момента результат прогнозирования равен

```
ans =
-0,1115
1,3651
0,3523
0,4668
1,6257
1,1253
```

Различие между рассмотренными примерами состоит в том, что значение индекса наблюдаемости в первых двух примерах  $\nu = 1$ , а ширина окна  $h = 8$ , тогда как в последнем примере минимальные значения для вычисления прогноза  $\nu = 3$  и  $h = 14$ .

## Заключение

Подтверждено сделанное предположение о том, что движение звена робота может быть описано линейной моделью эволюции и управления.

Рассмотренный метод прогнозирования положений звена, основанный на канонизации матриц, составленных из значений наблюдаемых величин, может использоваться при неизвестных структуре и законах движения других звеньев робота в приближении линейной динамической системы и в ситуациях, когда погрешностью измерения координат точек начала и конца звена можно пренебречь. В более общем случае требуется учитывать стохастические составляющие управления и наблюдения.

В целях проведения исследования вычислительная реализация метода, включая канонизацию матриц, выполнена в среде *Matlab*. При реализации в программном обеспечении робототехнических систем может быть осуществлена оптимизация по объему необходимой памяти и количеству вычислений.

При практической реализации метода следует обеспечить адаптацию по значениям индекса наблюдаемости и ширины окна наблюдений, используемых для прогнозирования.

*Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSFS-2024-0012).*

## Литература

1. Кузьмин, С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации / С.З. Кузьмин. – М.: Радио и связь, 1986.
2. Фисенко, В.Т. Обнаружение маневра объекта и прогнозирование его траектории в телевизионной следящей системе / В.Т. Фисенко, Л.Д. Вилесов, В.И. Можейко, Т.Ю. Фисенко // Известия вузов. Приборостроение. – 2009. – Т. 52, № 8. – С. 12–19.
3. Chekin, A. Nonparametric Method for Aircraft State Prediction / A. Chekin, Y. Bondarenko, V. Kosyanchuk, E. Zybin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – V. 476. – Article ID: 012003. – 6 p.
4. Косьянчук, В.В. Прогнозирование траектории полета летательного аппарата в условиях полной параметрической неопределенности / В.В. Косьянчук, В.В. Гласов, Е.Ю. Зыбин, Л. Тань // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2021. – № 1 (218). – С. 101–112.
5. Косьянчук, В.В. Непараметрический метод прогнозирования траектории движения активно маневрирующего судна посадки беспилотного летательного аппарата / В.В. Косьянчук, В.В. Гласов, Е.Ю. Зыбин, Л. Тань // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2021. – Т. 22, № 12. – С. 660–670.
6. Телешевский, В.И. Рекуррентное робастное оценивание параметров в автоматизированных информационно-измерительных системах / В.И. Телешевский, Д.А. Мастеренко // Измерительная техника. – 1997. – № 4. – С. 16–19.
7. DeMoor, B. Subspace Identification for Linear Systems: Theory. Implementation. Applications / B. DeMoor, P. VanOverschee. – Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
8. Альберт, А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Альберт. – М.: Наука, 1997.
9. Карчевский, Е.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии / Е.М. Карчевский, М.М. Карчевский. – СПб.: Издательство Лань, 2018.
10. Демидов, Н.Е. Параметризация обобщенных обратных матриц: алгоритмическое и программное обеспечение / Н.Е. Демидов // Программные продукты и системы. – 1998. – № 2. – С. 33–35.
11. Буков, В.Н. Решение линейных матричных уравнений методом канонизации / В.Н. Буков, В.Н. Рябченко, В.В. Косьянчук, Е.Ю. Зыбин // Вестник Киевского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2002. – № 1. – С. 19–28.

12. Буков, В.Н. Обращение и канонизация блочных матриц / В.Н. Буков, С.В. Горюнов // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, № 5. – С. 662–673.
13. Зыбин, Е.Ю. Об идентифицируемости линейных динамических систем в замкнутом контуре в режиме нормальной эксплуатации / Е.Ю. Зыбин // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 4 (165). – С. 160–170.
14. Зубов, Н.Е. Об одном подходе к идентификации дискретной системы на основе матричных делителей нуля / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, В.Н. Рябченко // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Приборостроение. – 2017. – № 3. – С. 20–32.
15. Буков, В.Н. Децентрализованное координированное управление ММО-подсистемами, основанное на технологии вложения систем / В.Н. Буков, А.М. Бронников, Н.И. Сельвесюк // Труды VIII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09. – 2009. – С. 1267–1280.
16. Мисриханов, М.Ш. Идентификация математической модели энергосистемы по дискретным данным системы мониторинга параметров режима / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 7. – С. 30–40.
17. Зыбин, Е.Ю. О минимальной параметризации решений линейных матричных уравнений / Е.Ю. Зыбин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2004. – № 6. – С. 127–131.

Дмитрий Александрович Мастеренко, доктор технических наук, профессор, кафедры «Измерительные информационные системы и технологии», ФГАОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» (г. Москва, Российская Федерация), d.masterenko@stankin.ru.

Михаил Михайлович Стебулянин, доктор технических наук, профессор, кафедра «Робототехника и мехатроника», ФГАОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» (г. Москва, Российская Федерация), mmsteb@rambler.ru.

*Поступила в редакцию 20 августа 2025 г.*

MSC 70E60, 93C05, 93B30, 93C85

DOI: 10.14529/mmp260110

## ANALYSIS AND PREDICTION OF MOTION TRAJECTORIES OF A COLLABORATIVE ROBOT

*D.A. Masterenko<sup>1</sup>, M.M. Stebulyanin<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Moscow State University of Technology “STANKIN”, Moscow, Russian Federation  
E-mail: d.masterenko@stankin.ru, mmsteb@rambler.ru

Collaboration of robotic complex and a human operator sets a task of prevention of contacts and collides between robotic links and human body. To solve this task one needs to know not only their positions at every moment but also a prediction for a certain time interval. However, control programs and motion laws fulfilled by the programs may be known not for all the parts of a robotic complex. In this article the method of prediction of a robotic complex link position is developed that does not demand a priori information on the complex structure and links motion laws. The method is based on so-called canonization of matrixes constructed from the accumulated information on previous link positions. Canonization means evaluation of matrix zero and unit deviders. The method is applicable to robotic complexes with linear control systems. The set of functions in Matlab environment are developed to evaluate the prediction. The examples of simulation for some robotic structures are given.

*Keywords: collaborative robots; trajectory prediction; linear system identification; matrix canonization; matrix zero divisor.*

## References

1. Kuz'min S.Z. *Osnovy proektirovaniya sistem tsifrovoi obrabotki radiolokatsionnoi informatsii* [Fundamentals of Design of Digital Radar Information Processing Systems]. Moscow: Radio and communications, 1986. (in Russian)
2. Fisenko V.T., Vilesov L.D., Mozheiko V.I., Fisenko T.Yu. [Object Maneuver Detection and Trajectory Prediction in a Television Tracking System]. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Instrument Engineering*, 2009, vol. 52, no. 8, pp. 12–19. (in Russian)
3. Chekin A., Bondarenko Y., Kosyanchuk V., Zybin E. Nonparametric Method for Aircraft State Prediction. *Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 476, article ID: 012003, 6 p. DOI: 10.1088/1757-899X/476/1/012003
4. Kosyanchuk V.V., Glasov V.V., Zybin E.Yu., Tan L. Trajectory Prediction of Aircraft Flight under Complete Parametric Uncertainty. *Southern Federal University Journal. Technical Sciences*, 2021, no. 1 (218), pp. 101–112. DOI: 10.18522/2311-3103-2021-1-101-112
5. Kosyanchuk V.V., Glasov V.V., Zybin E.Yu., Tan L. Nonparametric Method for Predicting the Trajectory of an Actively Maneuvering Landing UAV. *Mechatronics, Automation, Control*, 2021, vol. 22, no. 12, pp. 660–670. DOI: 10.17587/mau.22.660-670
6. Teleshevskii V.I., Mastrenko D.A. [Recursive Robust Parameter Estimation in Automated Information-Measurement Systems]. *Izmeritel'naya tekhnika* [Measurement Techniques], 1997, no. 4, pp. 16–19. (in Russian)
7. DeMoor B., VanOverschee P. *Subspace Identification for Linear Systems: Theory. Implementation. Applications*. Boston, London, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996.
8. Albert A. *Regression and the Moore-Penrose Pseudo-Inverse*. New York, Academy Press, 1997.
9. Karchevskii E.M., Karchevskii M.M. *Lektsii po lineinoi algebre i analiticheskoi geometrii* [Lectures on Linear Algebra and Analytical Geometry]. Saint Petersburg, Lan', 2018. (in Russian)
10. Demidov N.E. [Parameterization of Generalized Inverse Matrices: Algorithms and Software]. *Programmnye produkty i sistemy* [Software Products and Systems], 1998, no. 2, pp. 33–35. (in Russian)
11. Bukov V.N., Ryabchenko V.N., Kosyanchuk V.V., Zybin E.Yu. Solving Linear Matrix Equations Using Canonical Form Method. *Bulletin of Kiev University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2002, no. 1, pp. 19–28.
12. Bukov V.N., Goryunov S.V. Inversion and Canonical Form of Block Matrices. *Mathematical Notes*, 2006, vol. 79, no. 5, pp. 662–673. DOI: 10.4213/mzm2738
13. Zybin E.Yu. [On the Identifiability of Linear Dynamic Systems in Closed Loop under Normal Operating Conditions]. *Southern Federal University Journal. Technical Sciences*, 2015, no. 4 (165), pp. 160–170. (in Russian)
14. Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. On an Approach to the Identification of Discrete Systems Using Matrix Zero Divisors. *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Engineering*, 2017, no. 3, pp. 20–32. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-3-20-32
15. Bukov V.N., Bronnikov A.M., Selvesyuk N.I. Decentralized Coordinated Control of MIMO Subsystems Based on System Embedding Technology. *Proceedings 8th International Conference "System Identification and Control Problem"*, 2009, pp. 1267–1280. (in Russian)
16. Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. [Identification of a Mathematical Model of a Power System Based on Discrete Data from a Monitoring System]. *Southern Federal University Journal. Technical Sciences*, 2008, no. 7, pp. 30–40. (in Russian)
17. Zybin E.Yu., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. [On Minimal Parameterization of Solutions of Linear Matrix Equations]. *Bulletin of ISPU*, 2004, no. 6, pp. 127–131. (in Russian)

Received August 20, 2025