УДК 517.642.8 DOI: 10.14529/mmp260103

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ЗАДАННЫХ НА КОНЕЧНЫХ СВЯЗАННЫХ КВАНТОВЫХ ГРАФАХ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ РЕБРАМИ

С.И. Кадченко, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация

Разработка новых вычислительно эффективных методов решения спектральных задач для дискретных полуограниченных дифференциальных операторов, заданных на графах с изменяющимися во времени параметрами, связано с развитием новых технологий в науке и технике. В статье, на примере уравнений параболического типа, разработаны алгоритмы вычисления собственных чисел начально-краевых задач для дифференциальных операторов в частных производных, заданных на конечных связанных графах с изменяющимися во времени ребрами. Приведены аналитические формулы, позволяющие находить приближенные значения собственных чисел этих операторов в необходимые моменты времени. Разработанный метод позволяет распространить полученную ранее методику решения обратных спектральных задач, заданных на квантовых графах с постоянной геометрией, на квантовые графы с изменяющейся во времени геометрией.

В математической среде Maple проведены численные эксперименты по вычислению собственных чисел модельных задач. Результаты экспериментов позволяют сделать выводы о хорошей вычислительной эффективности разработанной методики.

Ключевые слова: начально-краевые задачи; связные графы; собственные числа и собственные функции операторов; дискретные и полуограниченные операторы; метод Галеркина; метод регуляризованных следов.

Введение

Интерес к решению спектральных задач, заданных на связанных квантовых графах, геометрические параметры которых меняются во времени, в последнее время возрастает [1–4]. Для построения математических моделей, в основе которых лежат спектральные задачи, часто требуется находить собственные числа дифференциальных операторов в частных производных, заданных на этих графах. В статьях [5–7] построены алгоритмы решения подобных задач, заданных на графах типа звезда. В них граничные условия позволяют найти решения в аналитическом виде. Для связанных графов, из-за граничных условий, нахождение аналитических решений спектральных задач связано с большими трудностями, даже когда количество ребер небольшое. Поэтому возникает необходимость в разработке алгоритмов решения этих задач с использованием ЭВМ.

В статье изложена методика решения спектральных задач, заданных на конечных связанных квантовых графах, геометрические параметры которых меняются во времени. По данной методике найдены собственные значения дискретного оператора, заданного на связном ориентированном трех-реберном квантовом графе с циклом и изменяющейся во времени геометрией. При этом использовались разработанные ранее методы численного решения прямых спектральных задач, заданных на квантовых графах с не изменяющейся геометрией [8]. Построенный в статье метод позволит распространить ранее полученную методику решения обратных спектральных задач, заданных на квантовых графах с постоянной геометрией, на графы с изменяющейся геометрией.

Рассмотрим связный ориентированный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$. Обозначим через $\mathbf{V} = \{V_i\}_{i=1}^{i_0}$ множество вершин графа $\mathbf{G}$, а через $\mathbf{E} = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$ – множество его ребер. Каждое ребро E_j графа $\mathbf{G}$ в начальный момент времени имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения $d_j > 0$. При этом дины ребер и их площади поперечного сечения могут изменяются во времени.

В дальнейшем нас будут интересовать два вида графов, когда для одного $\mathbf{G}_0$ длины ребер и площадь их поперечного сечения постоянные и равны l_j, d_j сответственно, а для другого $\mathbf{G}_t$ длины ребер L_j и их площади поперечного сечения D_j изменяются во времени по законам

$$L_j = l_j L(t),\ D_j = d_j D(t),\ j = \overline{1, j_0}, \tag{1}$$

где $L(t)$ и $D(t)$ – дважды дифференцированные функции, такие, что длины и площади поперечных сечений ребер графа $\mathbf{G}_t$ всегда остаются положительными в любые моменты времени и при этом граф не разрушается. Отметим, что для графа $\mathbf{G}_0$ $L(t) \equiv D(t) \equiv 1$.

В моменты времени $t = t_*$, на множестве $\mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{G}_0 \times (0, t_*)$, введем гильбертово пространство $L^{2,1}(\mathbf{\Gamma}_0)$ со скалярным произведением

$$\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \rangle_{L^{2,1}(\mathbf{\Gamma}_0)} = \frac{1}{t_*} \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int\limits_0^{t_*} \int\limits_0^{l_j} g_j(z,t) h_j(z,t) dz dt,$$

а на множестве $\mathbf{\Gamma}_{t_*} = \mathbf{G}_{t_*} \times (0, t_*)$ гильбертово пространство $L^{2,1}(\mathbf{\Gamma}_{t_*})$ со скалярным произведением

$$\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \rangle_{L^{2,1}(\mathbf{\Gamma}_{t_*})} = \frac{1}{t_*} \sum_{j=1}^{j_0} \int\limits_0^{t_*} D_j(t) \int\limits_0^{L_j(t)} g_j(z,t) h_j(z,t) dz dt.$$

Сужением функции $\boldsymbol{u(z,t)}$ на ребра E_j графа $\mathbf{G}$ обозначим через $u_{E_j}(z,t)$. Интеграл по графу $\mathbf{G}$ от функции $\boldsymbol{u(z,t)}$ определим как сумму интегралов от сужений $u_{E_j}(z,t)$ по каждому ребру E_j, т. е.

$$\int\limits_{\mathbf{G}} \boldsymbol{u(z,t)} d\boldsymbol{z} = \sum_{j=1}^{j_0} \int\limits_{E_j} u_{E_j}(z,t) dz.$$

1. Спектральные задачи

Рассмотрим методы вычисления собственных чисел начально-краевых задач заданных, на связных квантовых графах $\mathbf{G}_t$ с изменяющейся во времени геометрией ребер, на примере вектор-оператора $\mathbf{F} = \Big(F_1, F_2, ..., Fj_0\Big)$ параболического типа

$$\begin{gathered} \mathbf{F}(\mathbf{\Psi}) = \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}^2} + \mathbf{P}_1 \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}_0 \mathbf{\Psi},\ \mathbf{P}_i = \Big(p_{i1}(x_1,t), p_{i2}(x_2,t) \dots, p_{ij_0}(x_{j_0},t)\Big), \\ \mathbf{\Psi} = \Big(\psi_1(x_1,t), \psi_2(x_2,t), \dots, \psi_{j_0}(x_j,t)\Big),\ \mathbf{x} = \Big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{j_0}(t)\Big),\ i = \overline{0,1} \end{gathered} \tag{2}$$

с областью определения $D_{\mathbf{F}} = L^{2,1}(\mathbf{\Gamma}_t)$.

Для нахождения собственных чисел вектор-оператора $\mathbf{F}$ необходимо рассмотреть следующие спектральные задачи заданные на ребрах E_j графа $\mathbf{G}_t$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_j^2} + p_{1j}(x_j,t) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} + p_{0j}(x_j,t)\psi_j = \mu \psi_j,\ x_j \in \Big(0, L_j\Big),\ j = \overline{1, j_0}, \tag{3}$$

$$\sum_{E_k\in E^{\alpha}(V_s)} D_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k}\Big|_{x_k=0} - \sum_{E_m\in E^{\omega}(V_s)} D_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m}\Big|_{x_m=L_m} = 0,$$
$$E_i, E_k \in E^{\alpha}(V_s),\ E_m, E_h \in E^{\omega}(V_s),\ i,k,m,h,s \in N, \tag{4}$$

$$\psi_i(0,t) = \psi_k(0,t) = \psi_m(L_m,t) = \psi_h(L_h,t), \tag{5}$$

$$\psi_j(x_j,0) = \varphi(x_j). \tag{6}$$

Через $E^{\alpha}(V_s)$ в (4) обозначено множество дуг с началом в вершине V_s, а через $E^{\omega}(V_s)$ – множество дуг с концом в вершине V_s. Условия (4) означают, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а (5) – что решение $\mathbf{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{j_0})$ в каждой вершине должно быть непрерывным. Функции входящие в (3) – (6) должны быть непрерывные и иметь соответствующие непрерывные частные производные на графе $\mathbf{G}_t$.

Для вычисления собственных значений $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ начально-краевых задач (3) – (6) перейдем к соответствующим задачам для графа с постоянной ребрами, сделав замену переменных

$$\begin{cases} y_j = \dfrac{x_j}{L_j}, \\ t_1 = t. \end{cases} \tag{7}$$

Выразим производные, входящие уравнение (3) по переменным x_j, через производные по переменным y_j и запишем граничные условия и начальное условие для (4) – (6) для графа $\mathbf{G}_0$, как это сделано в статьях [8]. В результате получим

$$\frac{\partial \psi_j(y_j,t)}{\partial t} - \frac{1}{L_j^2}\frac{\partial^2 \psi_j(y_j,t)}{\partial y_j^2} + \frac{1}{L_j}\Big[p_{1j}(y_j,t) - y_j\frac{dL_j}{dt}\Big]\frac{\partial \psi_j(y_j,t)}{\partial y_j} +$$
$$+ p_{0j}(y_j,t)\psi_j(y_j,t) = \mu\psi_j(y_j,t),\ j = \overline{1, j_0}, \tag{8}$$

$$\sum_{E_k\in E^{\alpha}(V_s)} \frac{d_k}{l_k}\frac{\partial \psi_k}{\partial y_k}\Big|_{y_k=0} - \sum_{E_m\in E^{\omega}(V_s)} \frac{d_m}{l_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial y_m}\Big|_{y_m=l_m} = 0,$$
$$E_i, E_k \in E^{\alpha}(V_s),\ E_m, E_h \in E^{\omega}(V_s),\ i,k,m,h,s \in N, \tag{9}$$

$$\psi_i(0,t) = \psi_k(0,t) = \psi_m(l_m,t) = \psi_h(l_h,t), \tag{10}$$

$$\psi_j(y_j,0) = \varphi(y_j). \tag{11}$$

Для нахождения собственных чисел $\{\mu_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ задач (8) – (11) воспользуемся методом, разработанным в статьях. Следуя ему, рассмотрим спектральную задачу для дискретного полуограниченного дифференциального оператора U, заданного в гильбертовом пространстве H

$$Uu = \nu u,\ Gu|_{\Gamma} = 0. \tag{12}$$

Построим последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств, которая будет полной в H. Если известны ортонормированные базисы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ пространств $H_n \subseteq H$, удовлетворяющие граничным условия (12), то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Приближенные собственные значения $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ спектральной задачи (12) находятся по линейным формулам

$$\tilde{\nu}_n = \langle U\varphi_n, \varphi_n\rangle + \tilde{\delta}_n,\ n \in N, \tag{13}$$

где $\tilde{\delta}_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}[\tilde{\nu}_k(n-1) - \tilde{\nu}_k(n)]$, $\tilde{\nu}_k(n)$ – n-е приближение по Галеркину к соответствующим значениям ν_k спектральной задачи (12). При этом $\lim\limits_{n\to\infty}|\tilde{\delta}_n| = 0$.

Использование теоремы 1 для вычисления $\mu_n(t)$ требует найти заданные на графе $\mathbf{G}_t$ ортонормированные системы функций $\{\omega_{jk}(y_j,t)\}_{k=1}^{n}$, которые удовлетворят граничным условиям (9) – (10) и являются базисами пространств $\mathbf{H}_n \in \mathbf{G}_t$.

Если такие системы функций известны $\{\mathbf{\Omega}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathbf{\Omega}_n = (\omega_{1n}, \omega_{2n}, \ldots, \omega_{j_0,n})$, то приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_n$ оператора $\mathbf{F}$ в момент времени t_* находятся по формулам

$$\tilde{\mu}_n(t_*) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{\Omega}_n), \mathbf{\Omega}_n \rangle_{L^{2,1}(\mathbf{\Gamma}_0)} + \tilde{\delta_n}(t_*) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{t_*}\int_0^{l_j} \mathbf{F}(\mathbf{\Omega}_n)\mathbf{\Omega}_n dy_j dt +$$
$$+ \tilde{\delta}_n(t_*) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{t_*}\int_0^{l_j} \Big[\frac{\partial \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial t} - \frac{1}{L_j^2(t)} \frac{\partial^2 \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial y_j^2} + \tag{14}$$
$$+ \frac{1}{L_j(t)} \Big(p_{1j}(y_j,t) - y_j \frac{dL_j(t)}{dt} \Big) \frac{\partial \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial y_j} + p_{0j}(y_j,t)\omega_{jn}(y_j,t) \Big] \omega_{jn}(y_j,t) dy_j dt + \tilde{\delta}_n(t_*)).$$

Отсюда

$$\tilde{\mu}_n(t_*) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{t_*}\int_0^{l_j} \Big\{ \frac{\partial \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial t} - \frac{1}{L_j^2(t)} \frac{\partial^2 \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial y_j^2} +$$
$$+ \frac{1}{L_j(t)} \Big[p_{1j}(y_j,t)(y_j,t) - y_j \frac{dL_j(t)}{dt} \Big] \frac{\partial \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial y_j} + \tag{15}$$
$$+ p_{0j}(y_j,t)\omega_{jn}(y_j,t) \Big\} \omega_{jn}(y_j,t) dy_j dt + \tilde{\delta}_n(t_*), \ t_* \in R_+.$$

Используя формулы (15), можно вычислять приближенные значения собственных чисел дискретных полуограниченных операторов, заданных на графах $\mathbf{G}_t$ с необходимыми порядковыми номерами в необходимые моменты времени. Формулы, по которым находятся собственные числа начально-краевых задач, заданных на квантовых графах $\mathbf{G}_t$, с изменяющейся во времени геометрией ребер для вектор-операторов гиперболического типа, находятся аналогично, по приведенной выше методике. Полученные формулы (14) позволяют применять разработанную ранее методику решения обратных спектральных задач на графах с неизменной геометрией к обратным спектральных задачам на квантовых графах $\mathbf{G}_t$ с изменяющейся геометрией.

2. Вычислительные эксперименты

Для иллюстрации методики вычисления собственных значений дифференциального оператора $\mathbf{F}$ рассмотрим связный ориентированный трех-реберный $j_0 = 3$ квантовый граф с циклом $\mathbf{G}_3$ и множеством вершин $\mathbf{V}_3 = \{V_i\}_{i=1}^{3}$, множеством дуг $\mathbf{E}_3 = \{E_j\}_{j=1}^{3}$. Вычислим собственные числа вектор-оператора $\mathbf{F}$, заданного на графе $\mathbf{G}_3$, используя формулы (14).

Для этого надо найти системы функций $\{\mathbf{\Omega}_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрев начально-краевые задачи

$$\frac{\partial \omega_j(y_j,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \omega_j(y_j,t)}{\partial y_j^2} = 0, \ y_j \in (0, l_j), \ j = \overline{1,3}, \tag{16}$$

$$\omega_1(l_1,t) = \omega_2(0,t) = \omega_3(l_3,t), \quad \omega_2(l_2,t) = \omega_3(0,t), \tag{17}$$

$$\frac{\partial \omega_1(y_1,t)}{\partial y_1}\Big|_{y_1=0} = 0, \quad q_2 \frac{\partial \omega_2(y_2,t)}{\partial y_2}\Big|_{y_2=l_2} = q_3 \frac{\partial \omega_3(y_3,t)}{\partial y_3}\Big|_{y_3=0},$$
$$-q_1 \frac{\partial \omega_1(y_1,t)}{\partial y_1}\Big|_{y_1=l_1} + q_2 \frac{\partial \omega_2(y_2,t)}{\partial y_2}\Big|_{y_2=0} - q_3 \frac{\partial \omega_3(y_3,t)}{\partial y_3}\Big|_{y_3=l_3} = 0, \tag{18}$$

$$\omega_j(y_j,0) = \phi(y_j). \tag{19}$$

Здесь $q_j = \dfrac{d_j}{l_j}$.

Решение задач (15) – (18) ищем с помощью метода разделения переменных, полагая

$$\omega_j = Y_j(y_j)T_j(t). \tag{20}$$

Подставляя (19) в (15), найдем

$$\frac{d^2Y_j(y_j)}{dy_j^2} + \lambda^2 Y_j(y_j) = 0,\ \frac{dT_j(t)}{dt} + \lambda^2 T_j(t) = 0. \tag{21}$$

Используя (20), (19), (16) и (17), получим краевые задачи для нахождения функций $Y_j(y_i)$

$$\frac{d^2Y_j(y_j)}{dy_j^2} + \lambda^2 Y_j(y_j) = 0, \tag{22}$$

$$Y_1(l_1) = Y_2(0) = Y_3(l_3), \quad Y_2(l_2) = Y_3(0), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \frac{dY_1(y_1)}{dy_1}\Big|_{y_1=0} = 0, \quad q_2\frac{dY_2(y_2)}{dy_2}\Big|_{y_2=l_2} = q_3\frac{dY_3(y_3)}{dy_3}\Big|_{y_3=0}, \\ -q_1\frac{dY_1(y_1)}{dy_1}\Big|_{y_1=l_1} + q_2\frac{dY_2(y_2)}{dy_2}\Big|_{y_2=0} - q_3\frac{dY_3(y_3)}{dy_3}\Big|_{y_3=l_3} = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Нетривиальные решения дифференциальных уравнений (21) имеют вид

$$Y_j(y_j) = C_{j1}\sin(\lambda y_j) + C_{j2}\cos(\lambda y_j),\ j = \overline{1,3}. \tag{25}$$

Подставляя (24) в граничные условия (22), (23), получим систему уравнений для нахождения постоянных C_{j1} и C_{j2}:

$$\begin{cases} C_{11} = 0, \\ C_{22} - C_{12}\sin(\lambda l_1) = 0, \\ C_{12}\cos(\lambda l_1) - C_{31}\sin(\lambda l_3) - C_{32}\cos(\lambda l_3) = 0, \\ C_{32} - C_{21}\sin(\lambda l_2) - C_{22}\cos(\lambda l_2) = 0, \\ q_3C_{31} - q_2[C_{21}\cos(\lambda l_2) + C_{22}\sin(\lambda l_2)] = 0, \\ q_1C_{12}\sin(\lambda l_1) + q_2C_{21} - q_3[C_{31}\cos(\lambda l_3) - C_{32}\sin(\lambda l_3)] = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Преобразовывая уравнения из (25), путем исключения неизвестных, получим следующие трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений λ краевых задач (21) – (23) заданных квантовом графе $\mathbf{G}_3$:

$$\begin{gathered} q_1q_2\sin(\lambda l_1)\cos(\lambda l_2)\sin(\lambda l_3) + q_1q_3\sin(\lambda l_1)\sin(\lambda l_2)\cos(\lambda l_3) + \\ + q_2^2\cos(\lambda l_1)\sin(\lambda l_2)\sin(\lambda l_3) + q_3^2\cos(\lambda l_1)\sin(\lambda l_2)\sin(\lambda l_3) + \\ + 2q_2q_3[\cos(\lambda l_1) - \cos(\lambda l_1)\cos(\lambda l_2)\cos(\lambda l_3)] = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные значения краевых задач (21) – (23), занумерованные в порядке не убывания их величин. Собственные значения λ_k и соответствующие им собственные функции $Y_{jk}(y_j)$ вещественные.

Найденные C_{ji} $(j = \overline{1,3},\ i = 1,2)$ не выписаны из-за громоздкости их выражений. При этом надо отметить, что при большом числе ребер графа получить аналитические решения таких систем в ручную трудно. Поэтому написана программа в среде математического пакета Maple позволяющая записать подобные системы и найти их аналитические решения.

Общее решение второго уравнения (20), которое соответствует значению собственного числа λ_k имеет вид

$$T_{jk} = a_k e^{-\lambda_k^2 t}.$$

Коэффициенты a_n находятся по формулам

$$a_k = \sum_{j=1}^{j_0} \int_0^{l_j} \phi(y_j) Y_{jk}(y_j) dy_j, \ k \in \mathbb{N}.$$

И так были найдены функции

$$\omega_{jk}(y_j, t) = T_{jk}(t) Y_{jk}(y_j) = a_k e^{-\lambda_k^2 t} \Big[C_{j1} \sin(\lambda_k y_j) + C_{j2} \cos(\lambda_k y_j) \Big], \quad j = \overline{1,3}, \tag{28}$$

удовлетворяющие уравнениям (15) граничным и начальным условиям (16) – (18). Составим из этих функций систему $\{\mathbf{\Omega}_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\{\mathbf{\Omega}_n\}_{n=1}^{\infty} = \Big\{ (\omega_{1n}, \omega_{2n}, \omega_{3n}) \Big\}_{n=1}^{\infty}. \tag{29}$$

При подстановки функций ω_{jn} из (28) в формулы (14), получим

$$\begin{gathered}
\tilde{\mu}_n(t_*) = \sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{t_*} \int_0^{l_j} \Big\{ \Big(1 - \frac{1}{L_j^2(t)} \Big) \frac{\partial^2 \omega_{jn}(y_j, t)}{\partial y_j^2} + \\
+ \frac{1}{L_j(t)} \Big[p_{1j}(y_j, t)(y_j, t) - y_j \frac{dL_j(t)}{dt} \Big] \frac{\partial \omega_{jn}(y_j, t)}{\partial y_j} + \\
+ p_{0j}(y_j, t) \omega_{jn}(y_j, t) \Big\} \omega_{jn}(y_j, t) dy_j dt + \tilde{\delta}_n(t_*), \ t_* \in R_+.
\end{gathered} \tag{30}$$

На основе (27) и (29) проведены многочисленные вычислительные эксперименты по нахождению приближенных значений первых N_0, собственных чисел $\{\hat{\mu}_n\}_{n=1}^{N_0}$ оператора $\mathbf{F}$, заданного на трех-реберном графе с циклом $\mathbf{G}_3$ и переменными ребрами. Для проверки вычислений, проведенных по формулам (29), использовался метод Галеркина. Приближенные собственные числа оператора $\mathbf{F}$, найденные методом Галеркина, обозначим через $\hat{\mu}$. В вычислениях параметры моделирования были выбраны следующие:

$$\begin{gathered}
l_1 = 0,8; \quad l_2 = 1,1; \quad l_3 = 0,6; \quad d_1 = 0,3; \quad d_2 = 0,5; \quad d_3 = 0,9; \\
L(t) = a_1 + b_1 \cos(\omega_1 t); \quad a_1 = 1,3; \quad b_1 = 1,2; \quad \omega_1 = \pi/2; \\
D(t) = a_2 + b_2 \sin(\omega_2 t); \quad a_2 = 0,5; \quad b_2 = 0,2; \quad \omega_2 = \pi/7; \\
p_{11} = (y_1^2 + 5y_1 - 1)\cos(t^2 + 3); \quad p_{12} = (y_2^2 + 6y_2 + 1)\sin(t + 4); \\
p_{13} = (y_3^2 + 3y_3 - 1)\sin(t^2 + 5t - 9); \\
p_{01} = 2(y_1^2 + 5y_1 - 1)\sin(2t^2 + 3); \quad p_{02} = (3y_2^2 + 6y_2 - 1)\cos(3t + 2); \\
p_{03} = (4y_3^2 + 3y_3 - 1)\cos(4t^2 + 4t - 5).
\end{gathered} \tag{31}$$

В таблице приведены результаты вычисления первых собственных чисел в момент времени $t_* = 5$.

Таблица

Результаты вычислений первых собственных чисел $\{\tilde{\mu}_n\}_{n=1}^{6}$ в момент времени $t_* = 5$

n	$\tilde{\mu}_n$	$\hat{\mu}_n$	$\lvert\tilde{\mu}_n - \hat{\mu}_n\rvert$
1	$-3,844$	$-2,848$	$0,996$
2	$-5,895$	$-5,035$	$0,860$
3	$-10,062$	$-9,157$	$0,905$
4	$-14,058$	$-14,021$	$0,037$
5	$-22,399$	$-20,100$	$2,299$
6	$-34,320$	$-36,742$	$2,422$

Проведенные исследования показали хорошую вычислительную эффективность разработанной методики нахождения собственных чисел дифференциальных операторов в частных производных, заданных на графах с меняющимися во времени ребрами.

Заключение

В статье предложена методика нахождения приближенных значений собственных чисел дискретных полуограниченных операторов, заданных на связанных с переменными ребрами графах. Формулы (30) позволяют в дальнейшем, используя теорию решения обратных спектральных задач на квантовых графах с неподвижными ребрами [8], разработать методику решения обратных спектральных заданных на квантовых графах с подвижными ребрами.

Литература

1. Провоторов, В.В. Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля на графе-звезде / В.В. Провоторов // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 10. – С. 105–126.
2. Keating, J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs / J.P. Keating // Quantum Graphs and Their Applications. Contemporary Mathematics.– 2006.– V. 415.– P. 191–200.
3. Matrasulov, D.U. Time-Dependent Quantum Graph / D.U. Matrasulov, J.R. Yusupov, K.K. Sabirov, Z.A. Sobirov // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2015. – V. 6, № 2. – P. 173–181.
4. Никифоров, Д.С. Модель квантовых графов с ребрами меняющейся длины: дис....канд. техн. наук / Д.С. Никифоров. – СПб., 2018. – 125 с.
5. Кадченко, С.И. Алгоритмы вычисления собственных чисел дискретных полуограниченных операторов операторов заданных на квантовых графах типа звезда с переменными ребрами / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2024. – Т. 17, № 4. – С. 51–65.
6. Кадченко, С.И. Алгоритмы вычисления собственных чисел начально-краевых задач для волнового дифференциального уравнения, заданного на графе с изменяющимися ребрами / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 29–34.
7. Kadchenko, S.I. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Parabolic Differential Operators on Quantum Star Graphs with Time-Varying Edges / S.I. Kadchenko, L.S. Ryazanova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2024. – V. 11, № 4. – P. 3–13.
8. Кадченко, С.И. Алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 6 (97). – С. 13–21.

Сергей Иванович Кадченко, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика», Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация), sikadchenko@mail.ru.

Поступила в редакцию 31 августа 2025 г.

MSC 47A10 **DOI: 10.14529/mmp260103**

CALCULATION OF EIGENVALUES OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS DEFINED ON FINITE CONNECTED QUANTUM GRAPHS WITH TIME-VARYING EDGES

S.I. Kadchenko, Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov, Magnitogorsk, Russian Federation

The development of new computationally efficient methods for solving spectral problems for discrete semi-bounded differential operators defined on graphs with time-varying parameters is associated with the advancement of new technologies in science and engineering. In this article, algorithms for calculating the eigenvalues of initial-boundary value problems for partial differential operators given on finite connected graphs with time-varying edges are developed using parabolic equations as an example. Analytical formulas are presented for finding approximate values of the eigenvalues of these operators at the required time instants. The developed method allows one to extend a previously obtained technique for solving inverse spectral problems defined on quantum graphs with constant geometry to quantum graphs with time-varying geometry.

Numerical experiments to calculate the eigenvalues of model problems were conducted in the Maple mathematical environment. The experimental results suggest the good computational efficiency of the developed technique.

Keywords: initial-boundary value problems; connected graphs; eigenvalues and eigenfunctions of operators; discrete and semi-bounded operators; Galerkin method; regularized trace method.

References

1. Provorotov V.V. Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem on a Star Graph. *Mathematical Collection*, 2008, vol. 199, no. 10, pp. 105–126. (in Russian)
2. Keating J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs. *Quantum Graphs and Their Applications. Contemporary Mathematics*, 2006, vol. 415, pp. 191–200.
3. Matrasulov D.U., Yusupov J.R., Sabirov K.K., Sobirov Z.A. Time-Dependent Quantum Graph. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 173–181.
4. Nikiforov D.S. *Model' kvantovyh grafov s rebrami menjajushhejsja dliny* [Model of Quantum Graphs with Edges of Varying Length]. PhD (Math) Thesis. St. Petersburg, 2018, 125 p. (in Russian)
5. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Computing the Eigenvalues of Discrete Semi-Bounded Operators Defined on Quantum Star-Type Graphs with Variable Edges. *Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2024, vol. 17, no. 4, pp. 51–65. (in Russian)
6. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Computing the Eigenvalues of Initial-Boundary Value Problems for a Wave Differential Equation Defined on a Graph with Variable Edges. *Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2024, vol. 16, no. 4, pp. 29–34. (in Russian)
7. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Parabolic Differential Operators on Quantum Star Graphs with Time-Varying Edges. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2024, vol. 11, no. 4, pp. 3–13.
8. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. An Algorithm for Finding the Values of Eigenfunctions of Perturbed Self-Adjoint Operators by the Regularized Trace Method. *Bulletin of Samara State University. Natural Science Series*, 2012, no. 6 (97), pp. 13–21. (in Russian)

Received August 31, 2025