

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ С ТОНКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Е. А. Ефимов, Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, Российская Федерация

Рассматривается пространственная модель упругой блочной среды с тонкими прослойками. Тонкие прослойки представлены в виде внутренних граничных условий для блоков. На примере решения задачи о распространении плоских монохроматических волн в среде с упругим слоем показано, что предлагаемая модель прослойки вполне подходит для описания сред с достаточно тонкими податливыми слоями. Для решения пространственных задач в средах с блоками в виде параллелепипедов разработан алгоритм, основанный на методе расщепления. Одномерные расщепленные задачи решаются с применением схемы с контролируемой диссипацией. Рассмотрено блочное полупространство с крупным упругим включением. Генерируемый на свободной поверхности импульс отражается от включения и возвращается на поверхность. Параметры блочной среды влияют на качество отраженного сигнала. При достаточной толщине и податливости прослоек волны рассеиваются и отраженный сигнал почти невозможно обнаружить.

Ключевые слова: блочные среды; тонкие прослойки.

Введение

Одним из наиболее ярких примеров блочных сред являются горные породы. Концепция блочного иерархического строения горных пород была развита М.А. Садовским [1]. В соответствии с данной концепцией массивы пород состоят из вложенных друг в друга блоков, разделенных достаточно тонкими прослойками. Прослойки обладают сложными реологическими свойствами и являются более податливыми, чем блоки. В блочных средах с податливыми прослойками наблюдаются различные динамические эффекты, например, маятниковые волны, возникающие преимущественно за счет деформирования прослоек. Характер волн, распространяющихся в блочной среде, зависит от толщины прослоек и их податливости. Чем податливее и толще прослойки, тем выше амплитуда и ниже частота колебаний, возникающих за фронтом кратковременного импульса. Когда блоки значительно жестче прослоек, среду можно описывать в виде дискретно-периодической решетки жестких масс, соединенных упругими элементами. Дискретные модели блочных сред хорошо исследованы численно и аналитически Н.И. Александровой [2].

Если пренебречь деформациями блоков нельзя, то один из очевидных подходов состоит в представлении и блоков, и прослоек в виде упругих тел. Однако поскольку прослойки являются достаточно тонкими, возможно их описание в виде внутренних граничных условий для блоков. Уравнения для таких прослоек получаются путем усреднения уравнений теории упругости по толщине прослойки. Именно такая модель прослоек была использована В.М. Садовским при решении задач динамики блочных сред с учетом сложных реологических свойств [3, 4]. Расчеты по двумерным и трехмерным моделям сред с упругими блоками и тонкими вязкоупругими прослойками показали вполне удовлетворительное соответствие с лабораторным экспериментом [5, 6], опубликованным в статье [7]. Неточность модели прослойки проявляется в нефизичных отражениях в случае, когда блоки и прослойки описываются одними и теми же упругими параметрами [5].

1. Отражение и преломление плоских волн в среде с тонкой прослойкой

Рассмотрим задачу об отражении и преломлении плоской продольной монохроматической волны в среде с упругим слоем толщиной δ . При решении задачи используется стандартный метод представления поля перемещений через скалярный и векторный потенциалы [8]. Неограниченная упругая среда описывается уравнениями Ламе, а вектор перемещений представляется в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющих:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \quad \vec{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \vec{\psi}, \quad (1)$$

где $\varphi(t, x_1, x_2, x_3)$ – скалярный, а $\vec{\psi}(t, x_1, x_2, x_3)$ – векторный потенциал перемещений. В плоской задаче потенциал $\psi = \psi_3$ будет скалярным, а компоненты вектора перемещений запишутся в виде:

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \quad (2)$$

Подстановка последнего выражения в уравнения Ламе после некоторых преобразований приведет, как известно, к системе из двух независимых волновых уравнений для продольных и поперечных волн со скоростями $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$, соответственно. Будем рассматривать частный случай решения в виде плоских монохроматических волн. Пусть под углом θ_p на прослойку и на слой ($x_2 \geq \delta$) падает плоская продольная монохроматическая волна с частотой ω единичной амплитуды:

$$\varphi_0 = e^{i(\omega t + \xi_p x_1 - \eta_p x_2)}.$$

Здесь и далее для сокращения выкладок введены обозначения для волн снаружи слоя: $\xi_{p,s} = k_{p,s} \sin \theta_{p,s}$, $\eta_{p,s} = k_{p,s} \cos \theta_{p,s}$, где $k_{p,s} = \omega/c_{p,s}$ – волновое число, аналогично для волн внутри слоя: $\xi'_{p,s} = k'_{p,s} \sin \theta'_{p,s}$, $\eta'_{p,s} = k'_{p,s} \cos \theta'_{p,s}$, где $k'_{p,s} = \omega/c'_{p,s}$.

В среде над верхней границей $x_2 \geq \delta$ упругого слоя распространяется волна φ_0 , продольная отраженная φ_R и поперечная отраженная ψ_R :

$$\varphi_0 = e^{i(\omega t + \xi_p x_1 - \eta_p x_2)}, \quad \varphi_R = R_p e^{i(\omega t + \xi_p x_1 + \eta_p x_2)}, \quad \psi_R = R_s e^{i(\omega t + \xi_s x_1 + \eta_s x_2)}. \quad (3)$$

Внутри слоя $0 < x_2 < \delta$ продольные φ_L и поперечные ψ_L представляются в виде суперпозиции волн:

$$\varphi_L = A_p e^{i(\omega t + \xi'_p x_1 - \eta'_p x_2)} + B_p e^{i(\omega t + \xi'_p x_1 + \eta'_p x_2)}, \quad \psi_L = A_s e^{i(\omega t + \xi'_s x_1 - \eta'_s x_2)} + B_s e^{i(\omega t + \xi'_s x_1 + \eta'_s x_2)}.$$

В среде под нижней границей слоя $x_2 \leq 0$ волновая картина складывается из прошедших продольных φ_T и поперечных волн ψ_T :

$$\varphi_T = T_p e^{i(\omega t + \xi_p x_1 - \eta_p x_2)}, \quad \psi_T = T_s e^{i(\omega t + \xi_s x_1 - \eta_s x_2)}. \quad (4)$$

Задача состоит в нахождении коэффициентов T_p , T_s , R_p и R_s , которые определяются из условий непрерывности перемещений u_1 , u_2 и напряжений σ_{22} , σ_{12} на границах слоя $x_2 = 0$ и $x_2 = \delta$:

$$[u_1] = 0, \quad [u_2] = 0, \quad [\sigma_{22}] = 0, \quad [\sigma_{12}] = 0.$$

Выражая в терминах потенциалов φ и ψ перемещения по формуле (2), а напряжения через определяющие уравнения для изотропной упругой среды, получим систему линейных алгебраических уравнений с вектором неизвестных $\vec{x} = (R_p, R_s, A_p, A_s, B_p, B_s, T_p, T_s)$:

$$A\vec{x} = \vec{f}. \quad (5)$$

Условия, задаваемые тонкой упругой прослойкой, запишутся в виде внутренних граничных условий:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} &= \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta}, & \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} &= \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-}{2} &= (\lambda' + 2\mu') \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta}, & \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} &= \mu' \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь знаками «+» и «-» обозначены величины по обе стороны от границы, δ – толщина прослойки, штрихами обозначены параметры материала прослойки. Данные уравнения получаются путем осреднения по толщине уравнений движения и закона Гука. Для тонкой прослойки решение будет записано в виде (3) при $x_2 > 0$ и (4) при $x_2 \leq 0$. Данная система после выражения напряжений и скоростей перемещений через потенциалы φ и ψ также преобразуется к системе линейных алгебраических уравнений (5) с вектором неизвестных $\vec{x} = (\tilde{R}_p, \tilde{R}_s, \tilde{T}_p, \tilde{T}_s)$. Матрицы полученных систем уравнений имеют довольно громоздкий вид, еще более громоздким будет символьное решение. Поэтому для построения зависимостей коэффициентов отражения и преломления от θ_p и δ нужно каждый раз решать системы линейных уравнений (5).

Ниже сравниваются модули R_p, R_s, T_p, T_s для среды со слоем и модули $\tilde{R}_p, \tilde{R}_s, \tilde{T}_p, \tilde{T}_s$ для среды с тонкой прослойкой. Пусть параметры материалов среды и слоя связаны следующим образом: $\rho'/\rho = c'_p/c_p = c'_s/c_s = 0,71$, коэффициент Пуассона $\nu = \nu' = 0,25$. На рис. 1 показаны зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения для продольных волн от относительной толщины прослойки δ/l , где $l = 2\pi c_p/\omega$ – длина продольной монохроматической волны. Пунктирными линиями показано решение для модели тонкой прослойки, сплошными линиями изображено решение для упругого слоя. В упругом слое возможна интерференция, а в тонкой прослойке она не учитывается, поэтому толщина прослойки не должна превышать четверти длины волны. Для коэффициентов отражения и преломления поперечных волн R_s и T_s получатся схожие кривые.

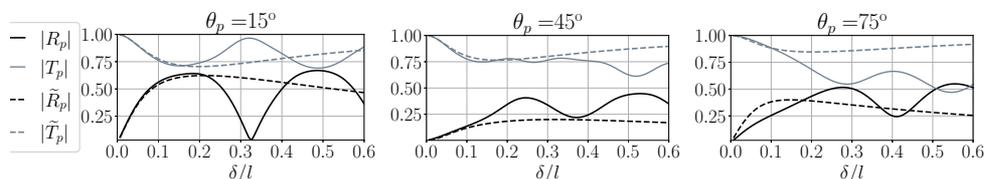


Рис. 1. Коэффициенты отражения и преломления продольных волн в зависимости от толщины прослойки при падении плоской продольной волны под фиксированным углом при $\nu = \nu' = 0,25$

Для оценки влияния податливости материала прослоек на границы применимости используемой модели предложено вычислить относительную погрешность

$$err = \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|}.$$

Здесь $\vec{x} = (|R_p|, |R_s|, |T_p|, |T_s|)$, $\vec{y} = (|\tilde{R}_p|, |\tilde{R}_s|, |\tilde{T}_p|, |\tilde{T}_s|)$ – решения для сред со слоем и прослойкой, соответственно. Компоненты векторов представляют собой функции от

θ_p , δ и коэффициента q , с помощью которого задаются упругие параметры прослойки $\rho' = \sqrt{q}\rho$, $c'_p = \sqrt{q}c_p$, $c'_s = \sqrt{q}c_s$. Относительная погрешность вычислена в норме

$$\|\vec{x}\| = \left(\int_0^{\pi/2} (|R_p|^2 + |R_s|^2 + |T_p|^2 + |T_s|^2) d\theta \right)^{1/2}.$$

На рис. 2 построены зависимости относительной погрешности $err(\delta/l, q)$ при $N_\theta \times N_q \times N_\delta = 90 \times 100 \times 100$. То есть для упругого слоя и модели тонкой прослойки системы вида (5) решались $N_\theta \times N_q \times N_\delta$ раз, где N_θ – количество точек равномерного разбиения отрезка $[0; \pi/2]$, N_q и N_δ – количество узлов равномерной сетки по осям q и δ/l , соответственно. Заметно, что характер распределения $err(\delta/l, q)$ меняется с изменением коэффициента Пуассона, хотя для всех случаев относительная погрешность мала, когда прослойка достаточно тонкая и податливая.

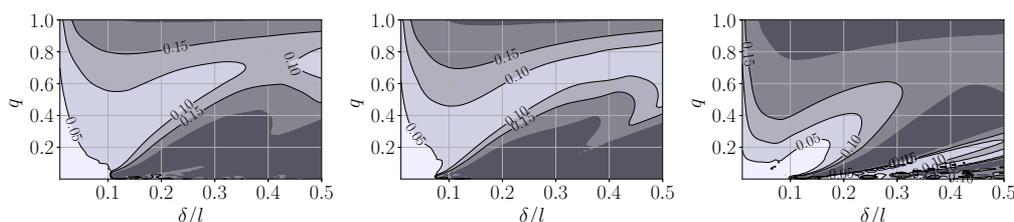


Рис. 2. Линии уровня относительной погрешности $err(\delta, q)$ для сред с $\nu = \nu' = 0, 05$ и $\nu = \nu' = 0, 25$ и $\nu = \nu' = 0, 45$

Если норма задается в виде $\|\vec{x}\| = \max_{\theta_p} (|R_p|, |R_s|, |T_p|, |T_s|)$, то полученные распределения ошибки $err(\delta, q)$ будут отличаться несущественно. Если задавать связь между упругими параметрами среды и слоя другим способом, то внешний вид поля распределения ошибки изменится в большей степени, но малая величина относительной погрешности будет все так же находиться в области малых значений толщины и податливости прослойки. Анализ решения в виде плоских монохроматических волн показал, что рассматриваемые уравнения тонких упругих прослоек с приемлемой точностью могут моделировать волновые процессы в средах с достаточно тонкими и в то же время податливыми прослойками. Предложенная модель тонких прослоек также пригодна для описания длинноволновых процессов.

2. Пространственная модель упругой блочной среды с тонкими прослойками

Предполагается, что среда состоит из однородных изотропных упругих блоков в форме прямоугольных параллелепипедов. Система уравнений для блоков имеет вид:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} = E_{ijkl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь $E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ – тензор модулей упругости, δ_{ij} – символ Кронекера. Для описания тонких упругих прослоек используются упрощенные дифференциально-разностные соотношения, записанные в виде внутренних граничных условий для блоков. Например, для прослоек толщиной δ_1 , которые соединяют

блоки в направлении x_1 , уравнения запишутся в аналогичном (6) виде:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v_1^+ + v_1^-}{2} = \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_2^+ + v_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, \rho' \frac{d}{dt} \frac{v_3^+ + v_3^-}{2} = \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta_1},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} = (\lambda' + 2\mu') \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} = \mu' \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}, \frac{d}{dt} \frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} = \mu' \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_1}.$$

Упругие параметры прослоек обозначаются штрихами, индексы «+» и «-» указывают на скорости и напряжения, относящиеся к границам взаимодействующих блоков. Подобным образом запишутся уравнения для прослоек в направлениях x_2 и x_3 .

По аналогии с [3] можно показать, что полученная модель термодинамически согласована и удовлетворяет интегральному закону сохранения энергии, который выражается в виде суммы кинетических и потенциальных энергий всех блоков и прослоек, равной потоку вектора Умова – Пойнтинга через границу блочного массива.

2.1. Численный метод решения

Численный метод решения строится на основе алгоритма двуциклического расщепления по пространственным переменным [9], который обеспечивает второй порядок сходимости при условии, что для решения одномерных расщепленных задач используются разностные схемы с порядком не ниже второго. Хотя для задач теории упругости существуют процедуры расщепления и более высоких порядков [10], их особенность состоит в том, что необходимо решать расщепленные задачи с шагами «назад во времени». Данные методы применяются со схемами повышенного порядка для решения одномерных задач.

Расщепленные одномерные системы распадаются на независимые подсистемы плоских продольных и поперечных волн. Построим разностную схему по методу Г.В. Иванова [11] для системы плоских волн, распространяющихся в однородной среде

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7)$$

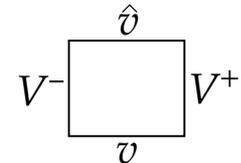


Рис. 3. Ячейка разностной сетки

Введем для x равномерную разностную сетку x_j ($j = 1, \dots, N$) с шагом $x_{j+1} - x_j = h = \text{const}$, и равномерную сетку для t с шагом τ . Значения на текущем временном слое j -ой ячейки регулярной сетки $v^{j-1/2}$ записываются с «крышкой» \hat{v} , значения на левой и правой границах соответственно обозначены V^- и V^+ , а значение с предыдущего временного слоя $v_{j-1/2}$ обозначим v . На рис. 3 изображена ячейка сетки с введенными обозначениями.

Запишем разностные уравнения шага «корректор» в ячейках прямоугольной пространственно-временной сетки:

$$\rho \frac{\hat{v} - v}{\tau} = \frac{\Sigma^+ - \Sigma^-}{h}, \quad \frac{1}{\rho c^2} \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} = \frac{V^+ - V^-}{h}. \quad (8)$$

Домножим первое уравнение системы (8) на $(\hat{v} + v)/2$, а второе на $(\hat{\sigma} + \sigma)/2$, после суммирования получим дискретный аналог закона сохранения:

$$\frac{1}{\tau} \left(\rho \frac{\hat{v}^2 - v^2}{2} + \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{2\rho c^2} \right) + D^h = \frac{\Sigma^+ V^+ - \Sigma^- V^-}{h},$$

где мощность схемной диссипации

$$D^h = \frac{V^+ - V^-}{h} \left(\frac{\Sigma^+ + \Sigma^-}{2} - \frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} \right) + \frac{\Sigma^+ - \Sigma^-}{h} \left(\frac{V^+ + V^-}{2} - \frac{\hat{v} + v}{2} \right). \quad (9)$$

Будем полагать, что значения скорости в ячейке, вычисленные как полусуммы значений в соседних узлах по времени и пространству, совпадают, а для напряжений в первых скобках (9) введем параметр схемной диссипации γ :

$$v_0 = \frac{V^+ + V^-}{2} = \frac{\hat{v} + v}{2}, \quad \frac{\gamma}{h}(V^+ - V^-) = \frac{\Sigma^+ + \Sigma^-}{2} - \frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, в формуле (9) второе слагаемое равно нулю, и мощность диссипации можно определить как квадратичную форму вида:

$$D^h = \frac{\gamma}{h^2}(V^+ - V^-)^2,$$

которая будет неотрицательной, если параметр $\gamma \geq 0$. При $\gamma = 0$ схема будет полностью консервативна. Учитывая (8), замыкающие уравнения схемы на шаге «предиктор» запишем в виде системы

$$\Sigma^+ - \Sigma^- = \frac{\rho h}{\tau}(V^+ + V^- - 2v), \quad \Sigma^+ + \Sigma^- = \frac{\rho c^2 \tau + 2\gamma}{h}(V^+ - V^-) + 2\sigma. \quad (11)$$

Складывая и вычитая уравнения в (11), получим

$$\begin{aligned} 2\Sigma^+ &= (a + b)V^+ + (a - b)V^- + 2\sigma^{j-1/2} - 2av_{j-1/2}, \\ 2\Sigma^- &= (b - a)V^+ + (-b - a)V^- + 2\sigma^{j+1/2} + 2av_{j+1/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $a = \rho h/\tau$, $b = \rho c^2 \tau/h + 2\gamma/h$. Имея в виду, что на границах ячеек значения скорости $V^+ = V^j$, $V^- = V^{j-1}$, для внутренних узлов ($j = 1 \dots N - 1$) получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$AV^{j+1} + CV^j + BV^{j-1} = F_j, \quad (13)$$

где $A = B = a - b$, $C = 2(a + b)$, $F_j = 2a(v_{j+1/2} + v_{j-1/2}) + 2(\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2})$.

К системе уравнений добавляются граничные условия $V^0 = V(t + \tau/2, x_0)$, $V^N = V(t + \tau/2, x_N)$ в случае, если известны скорости. Если известны напряжения $\Sigma^0 = \sigma(t + \tau/2, x_0)$, $\Sigma^N = \sigma(t + \tau/2, x_N)$, то согласно (12) в узлах $j = 0$ и $j = N$ получим уравнения

$$\begin{aligned} (-b - a)V^0 + (b - a)V^1 &= -2av_{1/2} - 2\sigma_{1/2} + 2\Sigma^0, \\ (a - b)V^{N-1} + (a + b)V^N &= 2av_{N-1/2} - 2\sigma_{N-1/2} + 2\Sigma^N. \end{aligned}$$

Таким образом, на шаге «предиктор» схемы получается трехдиагональная система, которая решается методом прогонки. Уравнения на шаге «корректор» примут вид:

$$\hat{v} = V^+ + V^- - v, \quad \frac{1}{\rho c^2} \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} = \frac{V^+ - V^-}{h}. \quad (14)$$

Здесь первое уравнение следует из первого уравнения (10).

В среде с прослойками система на шаге «предиктор» решается для $N = N_b + N_l$ ячеек, где N_b – количество узлов, выделенное для решения в блоках, N_l – количество прослоек. При дискретизации расчетной области для каждой прослойки выделяется одна дополнительная ячейка разностной сетки. Создаются вспомогательные массивы из N_l элементов для хранения скоростей и напряжений в прослойке с предыдущего

шага по времени, которые нужны для вычисления скоростей на межблочных границах. Вычисления в прослойках происходит с коэффициентами со штрихами, и вместо шага сетки h подставляется толщина прослойки δ .

Неотрицательность мощности диссипации ($\gamma \geq 0$) обеспечивает равномерную устойчивость решения, то есть выполняется неравенство $\|(\hat{v}, \hat{\sigma})\| \leq \|(v, \sigma)\|$ в энергетической норме. Данная схема является безусловно устойчивой, что позволяет выбирать большие шаги по времени и сократить время вычислений. Однако расчет волновых процессов с большими градиентами при крупных шагах по времени приводит к потере точности решения [11]. Еще одно преимущество схемы состоит в возможности регулировки схемой диссипации. При $\gamma = 0$ схема полностью консервативна, имеет второй порядок аппроксимации и немонотонна. При γ порядка h схема монотонна и имеет первый порядок. При γ порядка h^2 и выше, схема будет также иметь второй порядок, но останется немонотонной. Схема с малым параметром γ или даже бездиссипативный вариант применимы для вязкоупругих сред, в которых физическая вязкость подавляет осцилляции, вызванные немонотонностью схемы. При расчетах распространения волн в упругих телах введение γ порядка h^2 хоть и не обеспечивает монотонности, но значительно снижает амплитуды осцилляций решения.

Алгоритм разработан для многопроцессорных вычислительных систем кластерной архитектуры с распределенной памятью с использованием технологии MPI (Message Passing Interface). Расчеты выполнялись на кластере серии МВС Института вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск). При распараллеливании алгоритма используется трехмерная декомпозиция расчетной области с равномерным распределением узлов сетки между $p = p_1 \times p_2 \times p_3$ процессами. Обмен данными происходит при решении одномерных задач на шаге «предиктор». Основная трудность связана с наличием трехдиагональной системы (13). Один из подходов заключается в распараллеливании алгоритма прогонки методом Яненко и Коновалова [12]. Второй подход, предложенный в [13], является более простым и предполагает вычисление значений в граничных точках процессов по схеме Годунова с дальнейшим итерационным пересчетом этих значений. В граничных узлах значения скоростей вычисляются по формулам, соответствующим шагу «предиктор» схемы Годунова:

$$V^j = \frac{v_{j+1/2} + v_{j-1/2}}{2} + \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{2\rho c}. \quad (15)$$

Значения, вычисленные по формулам (15), играют роль граничных условий. Затем V^j на границах процессов пересчитывается по формуле, которая выражается из (13):

$$V^j = \frac{F_j - B_j V^{j-1} - A_j V^{j+1}}{C_j}. \quad (16)$$

Полученная формула является выражением итерационного метода Якоби для системы с трехдиагональной матрицей. Затем в параллельном режиме каждым отдельным процессом вычисляется решение трехдиагональной системы методом прогонки.

Приближение, найденное по формулам (15), является достаточно точным, и после однократного применения процедуры (16) можно достичь второго порядка аппроксимации для бездиссипативной схемы ($\gamma = 0$) при достаточно большом количестве ячеек сетки в каждом MPI-процессе. Теоретическая оценка количества итераций в зависимости от количества ячеек, обрабатываемых каждым процессом, представляет собой отдельную задачу. Если в каждом узле сетки на шаге «предиктор» происходит итерационный пересчет значений V^j по формулам (15), (16), а на шаге «корректор» решается система (14), то, как показывают вычислительные эксперименты, для достижения второго порядка сходимости требуется 5 – 7 итераций. Это приводит к весьма длительному времени вычислений.

Масштабируемость параллельного алгоритма зависит от размерности исходной задачи. Зависимость ускорения параллельного алгоритма от числа процессоров p сначала линейна, затем переходит в насыщение, и дальнейшее увеличение процессоров не дает преимуществ. При расчете задач с достаточно мелкой сеткой насыщение происходит при больших p , чем в задачах с крупной сеткой. Эмпирически было обнаружено, что когда на процесс приходится примерно $40^3 - 50^3$ ячеек и меньше, ускорение перестает расти.

3. Отражение сигнала от упругого включения в блочной среде

Рассматривается модельная задача об отражении сигнала от заглубленного упругого податливого включения в блочном полупространстве. Блочная среда имеет два иерархических уровня прослоек. Вычислительная область без учета прослоек представляет собой куб со сторонами $L = 48$ м и в каждом из направлений содержит $n' = 22$ прослойки первого иерархического уровня толщиной δ' и $n'' = 31$ прослойку второго уровня толщиной δ'' . Для вычисления решения в блоках отводится $N_b^3 = 720^3$ узлов сетки. Наиболее крупные блоки, по всем граням соединенные прослойками первого уровня, представляют собой кубы со стороной ≈ 2.09 м. Они содержат внутри себя блоки в форме параллелепипедов различных размеров, так как соотношение n''/n' количества прослоек на разных иерархических уровнях есть нецелое число, иначе бы получилась регулярная структура из кубических блоков. Все блоки описываются параметрами $\rho = 2400$ кг/м³, $c_p = 4500$ м/с, $c_s = 2700$ м/с.

На границе $x_1 = 0$ ставятся условия свободной поверхности $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$ за исключением круговой области $x_2^2 + x_3^2 \leq r^2$ радиусом $r = 1$ м, на которую воздействует импульс давления $\sigma_{11}(0, x_2, x_3) = p(t)$, показанный на рис. 4. В течение времени t_g давление линейно возрастает и на протяжении t_c держится постоянным.

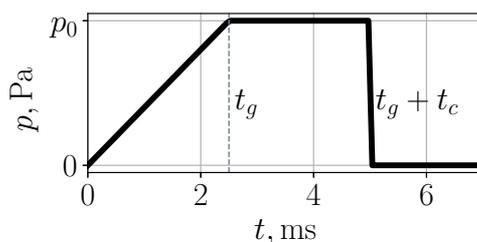


Рис. 4. Зависимость давления от времени

На границах $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ ставятся условия симметрии $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$, $v_2 = 0$ и $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, $v_3 = 0$. На остальных границах $x_1 = L$, $x_2 = L$ и $x_3 = L$ задаются простые слабоотражающие условия, состоящие в приравнении нулю инвариантов Римана, переносящих возмущения из-за границ вычислительной области.

Сравниваются волны на поверхности блочных сред с упругим включением и без него. Упругое включение, описываемое параметрами $\rho = 2200$ кг/м³, $c_p = 1800$ м/с, $c_s = 500$ м/с, имеющее размеры $6\text{ м} \times 27\text{ м} \times 27\text{ м}$, располагается на глубине 39 м. На рис. 5 показаны линии уровня скорости v_1 в блочной среде с включением и осциллограммы $v_1(t)$ на поверхности в точке $x_2 = 18$ м, $x_3 = 18$ м. Первая пунктирная линия показывает время прихода продольной волны по поверхности t_p , вторая линия показывает время прихода отраженного от включения сигнала t_p^* .

Для времени $t > t_p^*$ сигналы на поверхности сравниваются по формуле:

$$d = \frac{\max_{t > t_p^*} |v_1 - v_1^b|}{\max_{t > t_p^*} |v_1|}.$$

Здесь $v_1^b(t)$ и $v_1(t)$ вертикальные компоненты скорости перемещений на поверхности в среде с включением и без него, соответственно. В таблице показаны значения d в зависимости от толщины и податливости прослоек при разной длительности $t_{imp} = t_g + t_c$ и $t_g = t_c$.

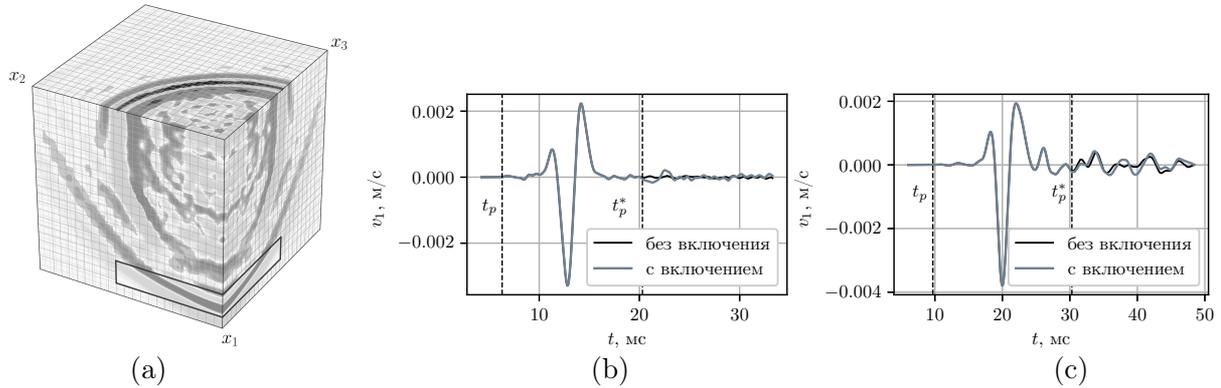


Рис. 5. Линии уровня v_1 в среде с упругим включением (а), осциллограммы поверхностных волн $v_1(t)$ (b), (с)

Таблица

Значения d в упругих блочных средах

ϵ	ρ' , кг/м ³	ρ'' , кг/м ³	c'_p , м/с	c''_p , м/с	c'_s , м/с	c''_s , м/с	δ' , мм	δ'' , мм	d	
									$t_{imp} = 5$ мс	$t_{imp} = 2$ мс
I	1350	1800	2531	3375	1519	2025	22	15	2,976	2,844
II	1014	1560	1901	2925	1141	1755	22	15	1,913	1,182
III	1350	1800	2531	3375	1519	2025	66	45	2,176	1,244
IV	1014	1560	1901	2925	1141	1755	66	45	1,221	0,783

Отраженный от податливого включения сигнал существенным образом зависит от параметров блочной среды. Чем больше толщина упругих прослоек и их податливость, тем сложнее обнаружить включение. В среде со слишком тонкими прослойками волны распространяются почти как в однородной среде. Вне зависимости от длительности и формы импульса в среде с прослойками, обладающими достаточной податливостью и толщиной, возможна ситуация, когда податливое включение практически невозможно обнаружить. Например, на рис. 5 (с) показаны поверхностные волны для среды с параметрами прослоек $\rho', c'_p, c'_s, \rho'', c''_p, c''_s$ соответствующими случаю (II). При этом количество прослоек в среде равно $n' = 37, n'' = 53$, а толщина прослоек на соответствующих иерархических уровнях $\delta' = 114$ мм и $\delta'' = 81$ мм. Заметно, что различия между волнами на поверхности сред с включением и без практически не наблюдаются. Волны многократно отражаются от границ блоков, и по мере дробления среды на большее количество блоков при фиксированных параметрах прослоек происходит более интенсивное рассеяние. Частоты и амплитуды маятниковых волн, возникающих в блочной среде вследствие кратковременного импульса, зависят от размеров и упругих параметров блоков и прослоек. Увеличение толщины и податливости прослоек приводит к увеличению амплитуд и уменьшению частоты колебаний за фронтом поверхностной волны. На этом фоне достаточно слабый отраженный от включения импульс становится менее выраженным.

Заключение

Для модели упругой прослойки, заданной в виде внутренних граничных условий, решена задача об отражении и преломлении плоской продольной монохроматической волны. Сравнение с решением в слое, описываемом как упругое тело, показало, что

модель тонкой прослойки пригодна для описания сред с достаточно податливыми прослойками. Для численного решения задач динамики блочных сред в пространственной постановке использован алгоритм расщепления. Для решения одномерных расщепленных задач использована разностная схема с контролируемой диссипацией. Параметры блочной среды существенным образом влияют на характер распространения волн. Показано, как в блочном полупространстве увеличение толщины и податливости прослоек препятствует обнаружению включения, размер которого намного больше блоков. Одним из перспективных направлений развития работы является моделирование волн в средах со сложными реологическими свойствами прослоек в трехмерной постановке. В частности это могут быть прослойки, описывающие разрушение материала на границах его структурных элементов-блоков.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2025-1606).

Литература

1. Садовский, М.А. Естественная кусковатость горной породы / М.А. Садовский // Доклады академии наук СССР. – 1979. – Т. 247, № 4. – С. 829–832.
2. Alexandrova, N.I. The Discrete Lamb Problem: Elastic Lattice Waves in a Block Medium / N.I. Alexandrova // Wave Motion. – 2014. – V. 51, № 5. – P. 818–832.
3. Sadovskii, V.M. Modeling of Elastic Waves in a Blocky Medium Based on Equations of the Cosserat Continuum / V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya // Wave Motion. – 2015. – V. 52. – P. 138–150.
4. Sadovskii, V.M. Modeling of Wave Processes in Blocky Media with Porous and Fluid-Saturated Interlayers / V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya, A.A. Lukyanov // Journal of Computational Physics. – 2017. – V. 345. – P. 834–855.
5. Efimov, E.A. Wave Propagation in a Blocky-Layered Medium with Thin Interlayers / E.A. Efimov, V.M. Sadovskii // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2025. – V. 18, № 1. – P. 119–129.
6. Ефимов, Е.А. Моделирование распространения волн в блочной среде с тонкими вязкоупругими прослойками в пространственной постановке / Е.А. Ефимов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2025. – Т. 27, № 4. – С. 20–33.
7. Сарайкин, В.А. Распространение волн в двумерной блочной среде с вязкоупругими прослойками (теория и эксперимент) / В.А. Сарайкин, А.Г. Черников, Е.Н. Шер // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 170–181.
8. Бреховских, Л.М. Акустика слоистых сред / Л.М. Бреховских, О.А. Годин. – М.: Наука, 1989.
9. Марчук, Г.И. Методы расщепления / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1988.
10. Голубев, В.И. Повышение порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления / В.И. Голубев, А.В. Шевченко, И.Б. Петров // Компьютерные исследования и моделирование. – 2022. – Т. 14, № 4. – С. 899–910.
11. Иванов, Г.В. Численное решение задач упругопластического деформирования твердых тел / Г.В. Иванов, Ю.М. Волчков, И.О. Богульский, С.А. Анисимов, В.Д. Кургузов. – Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2002.
12. Яненко, Н.Н. Об организации параллельных вычислений и распараллеливание прогонок / Н.Н. Яненко, А.Н. Коновалов, А.Н. Бугров, Г.В. Шустов // Численные методы механики сплошных сред. – 1978. – Т. 7, № 7. – С. 139–146.
13. Садовский, В.М. Одномерные разностные схемы для реализации метода расщепления осесимметричных уравнений динамики упругой среды / В.М. Садовский, О.В. Садовская, Е.А. Ефимов // Вычислительные методы и программирование. – 2021. – Т. 22, № 1. – С. 47–66.

Евгений Александрович Ефимов, инженер, отдел вычислительной механики деформируемых сред, Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск, Российская Федерация), efimov@icm.krasn.ru.

Поступила в редакцию 12 ноября 2025 г.

MSC 74B05, 74S20

DOI: 10.14529/mmp260106

NUMERICAL SIMULATION OF THE DYNAMICS OF AN ELASTIC BLOCKY MEDIUM WITH THIN INTERLAYERS

E.A. Efimov, Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation, efimov@icm.krasn.ru.

A spatial model of an elastic blocky medium with thin interlayers is considered. Thin interlayers are presented as internal boundary conditions for the blocks. Using the solution for plane monochromatic waves in a medium with an elastic layer, it is shown that the proposed interlayer model is quite suitable for describing media with sufficiently thin and compliant layers. An algorithm based on the splitting method is developed for solving spatial problems in media with parallelepiped-shaped blocks. One-dimensional splitting problems are solved using a scheme with controllable artificial dissipation. A blocky half-space with a large elastic inclusion is considered. A pulse generated on the free surface is reflected from the inclusion and returns back to the surface. The parameters of the blocky medium affect the quality of the reflected signal. If the layers are thick and compliant, the waves are scattered, and the reflected signal cannot be detected.

Keywords: blocky media; thin interlayers.

References

1. Sadovskiy M.A. Natural Lumpiness of a Rock. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1979, vol. 247, no. 4, pp. 829–832.
2. Alexandrova N.I. The Discrete Lamb Problem: Elastic Lattice Waves in a Block Medium. *Wave Motion*, 2014, vol. 51, no. 5, pp. 818–832. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.02.002
3. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Modeling of Elastic Waves in a Blocky Medium Based on Equations of the Cosserat Continuum. *Wave Motion*, 2015, vol. 52, pp. 138–150. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.09.008
4. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Lukyanov A.A. Modeling of Wave Processes in Blocky Media with Porous and Fluid-Saturated Interlayers. *Journal of Computational Physics*, 2017, vol. 345, pp. 834–855. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.06.001
5. Efimov E.A., Sadovskii V.M. Wave Propagation in a Blocky-Layered Medium with Thin Interlayers. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2025, vol. 18, no. 1, pp. 119–129.
6. Efimov E.A. Modeling of Wave Propagation in a Blocky Medium with Thin Viscoelastic Interlayers in a Spatial Setting. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2024, vol. 18, no. 4, pp. 656–668. DOI: 10.1134/S1990478924040033
7. Saraikin V.A., Chernikov A.G., Sher E.N. Wave Propagation in Two-Dimensional Block Media with Viscoelastic Layers (Theory and Experiment). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 688–697. DOI: 10.1134/S0021894415040161
8. Brekhovskih L.M., Godin O.A. *Akustika sloistykh sred* [Acoustics of Layered Media]. Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)
9. Marchuk G.I. *Metody rashchepeniya* [Splitting Methods]. Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)
10. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising Convergence Order of Grid-Characteristic Schemes for 2D Linear Elasticity Problems Using Operator Splitting. *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 899–910. DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-4-899-910

11. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogulskii I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoe reshenie zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tvyordyh tel* [Numerical Solution of Dynamic Elastic-Plastic Problems of Deformable Solids]. Novosibirsk, Siberian University Publishing House, 2002. (in Russian)
12. Yanenko N.N., Konovalov A.N., Bugrov A.N., Shustov G.V. Organization of Parallel Computing and the Thomas Algorithm Parallelization. *Numerical Methods in Continuum Mechanics*, 1978, vol. 9, no. 7, pp. 139–146.
13. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Efimov E.A. One-Dimensional Finite Difference Schemes for Splitting Method Realization in Axisymmetric Equations of the Dynamics of Elastic Medium. *Numerical Methods and Programming*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 47–66. DOI: 10.26089/NumMet.v22r104

Received November 12, 2025