

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СТАИ РЫБ В ОДНОРОДНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

*Д.Ю. Князьков*, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
г. Москва, Российская Федерация

Исследуется поле возмущений от движущейся на постоянной глубине стаи промысловых рыб. Жидкость считается идеальной и однородно стратифицированной. Стая рыб моделируется группой одинаковых точечных массовых источников. Источники движутся горизонтально прямолинейно с одинаковой скоростью или по одинаковым синусоидальным траекториям со случайным сдвигом фазы. Также моделируется поворот стаи на 90 градусов. Было установлено, что результат решения задачи существенно отличается от известных асимптотик вблизи стаи, а также в случае быстрого изменения скорости движения рыб; движение же рыб по синусоидальным траекториям мало влияет на характер возмущений по сравнению с прямолинейным движением. Исследовалось влияние расстояния между рыбами на возмущение полей скорости жидкости. Было установлено существенное влияние расстояния между рыбами в стае на характер возмущения на расстояниях порядка нескольких размеров стаи, тогда как в дальней зоне характер возмущения жидкости не зависел от расстояния между рыбами и был сходен с характером возмущения от точечного массового источника.

*Ключевые слова:* внутренние волны в океане; стратифицированная жидкость; стая рыб; поле скоростей; численное моделирование.

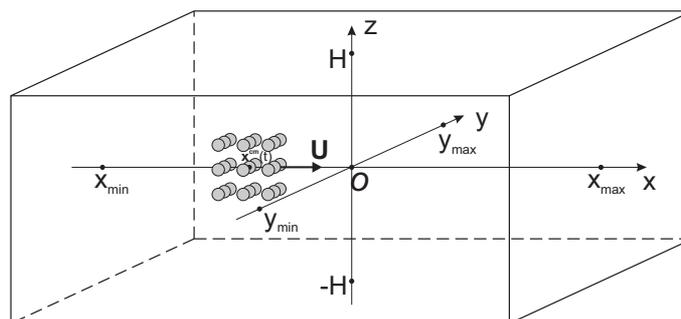
### Введение

Задача поиска стай промысловых рыб представляет собой большой практический интерес. Поиск косяков рыбы может осуществляться непосредственно, когда возможно идентифицировать скопление рыбы гидро-акустическими методами по анализу отраженного стаей звукового сигнала [1], в оптическом диапазоне [2] или по косвенным признакам, когда наблюдения ведутся за ключевыми параметрами среды обитания рыбы, температурой и количеством растворенного кислорода [3], а также по более сложным моделям, включающим в себя данные зондирования температуры поверхности, солености, толщины слоя перемешивания, концентрации планктона [4, 5]. Когда скопление рыбы найдено, в эту область направляются рыболовецкие средства. В настоящей статье проводится моделирование движения стаи рыб в толще океана. Вышедшее на поверхность возмущение от движущейся стаи рыб может быть затем зарегистрировано средствами аэрокосмического зондирования.

### 1. Постановка задачи

В настоящей работе океан моделируется идеальной несжимаемой стратифицированной жидкостью. Стая рыб моделируется набором из одинаковых массовых точечных источников. Заметим, что линии тока вокруг отдельного источника возмущения имеют вытянутую вдоль линии движения форму, сходную с формой тела рыбы. Таким образом, масса отдельного источника возмущения может быть подобрана из соображения, чтобы размер эффективного обтекаемого тела (то есть ограниченного нулевой линией тока) соответствовал размеру отдельной рыбы. Далее будет исследоваться распространение возникающего в результате движения стаи рыб возмущения различных физических полей. Для вопросов поиска промысловых стай рыб, в первую очередь, интерес представляет вертикальное смещение жидкости в горизонтальной плоскости, если регистрация возмущения производится на дне водоема (например, по колебаниям солености) [6] или горизонтальные компоненты скорости жидкости в горизонтальном сечении, когда регистрация возмущения осуществляется средствами

радиометрии поверхности океана [7, 8]. В последнем случае взаимодействие вышедших на поверхность течений с ветровой рябью может быть рассчитано по методу, предложенному в [9, 10].



**Рис. 1.** Расчетная область  $\Omega$ . Схематически показана стая из 27 рыб, центр масс стаи находится в точке  $\mathbf{x}^{\text{cm}}(t)$

Для описания движения жидкости будем использовать приближение Буссинеска [11, 12], запишем уравнение на внутренний потенциал  $\psi(\mathbf{x}, t)$  в области  $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [-H, H]$

$$\Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + N^2 \Delta_{xy} \psi = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

с граничным условием

$$\psi = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где  $N$  – частота плавучести. Считается, что область  $\Omega$  (см. рис. 1) достаточно велика, так что граничное условие (2) и отраженная от границы волна возмущения не влияют на результаты расчета вблизи источника возмущения. В начальный момент времени

$$\psi|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) является уравнением соболевского типа [13], точные утверждения о разрешимости задачи (1) – (3) для случая  $N = \text{const}$  можно найти в [14].

Пусть стая состоит из  $M$  одинаковых рыб, тогда правая часть (1) представляет собой сумму  $\sum_{i=1}^M B \delta_i(\mathbf{x}_i(t))$ , где  $\delta(\cdot)$  –  $\delta$ -функция Дирака. Для упрощения численного счета будем задавать  $f(\mathbf{x}, t)$  в виде

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad (4)$$

где  $\mathbf{x}_i(t)$  – положение  $i$ -й рыбы в момент времени  $t$ , функция  $f_i$  определяется константами  $A_i, B_i$ :

$$f_i(x, y, z) = \frac{B_i A_i^3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-A_i^2(x^2+y^2+z^2)}. \quad (5)$$

Заметим, что  $\int_{\mathbb{R}^3} f_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = B_i$ .

Скорость жидкости  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  может быть найдена как

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla + N^2 \nabla_{xy} \right) \psi, \quad (6)$$

давление  $p(\mathbf{x}, t)$ :

$$p(\mathbf{x}, t) = -\rho_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t), \quad (7)$$

вертикальное смещение жидкости  $\zeta(\mathbf{x}, t)$ :

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (8)$$

Для решения задачи (1) – (3) на языке программирования C++ была написана компьютерная программа, реализующая неявную разностную схему на равномерной расчетной сетке [15], где для решения системы линейных уравнений на каждом шаге по времени использовался обобщенный метод минимальных невязок [16]. Рассчитывались поля скорости (6), давления (7), вертикального смещения (8) жидкости. С использованием этой программы проводилось моделирование движения одиночного источника возмущения в однородной стратифицированной жидкости, при этом точечный массовый источник возмущения двигался равномерно горизонтально [17, 18] или под углом к горизонту [15, 19], корректность расчетов верифицировалась сравнением с известными асимптотическими решениями [20, 21], с результатами экспериментов [22]. Модифицированный вариант программы использовался для моделирования возмущения с условием свободной поверхности на верхней границы области  $\Omega$ ; в этом случае решалась задача типа (1) для вертикальной компоненты скорости  $v_z$  в области  $\Omega$ , а затем задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в каждой точке вертикальной границы  $z = H$  области  $\Omega$ , см. [23]. Вообще говоря, реализованный метод расчета позволяет проводить моделирование для изменяющейся по высоте частоты плавучести,  $N = N(z)$ , когда частота плавучести изменяется скачком [24] или непрерывно [15], однако далее в настоящей работе будем считать, что жидкость однородно стратифицированная,  $N = \text{const}$ . Исходный код расчетной программы доступен в интернете по адресу: <https://bitbucket.org/Jclash/inwaves>.

### 1.1. Численное моделирование движения стаи рыб

В настоящей главе численно исследуется возмущение от движущейся стаи рыб, его характерные отличия от возмущения, создаваемого отдельным точечным массовым источником. В частности, для интересов обнаружения стай промысловых рыб, представляет интерес изучение полей возмущения вблизи стаи рыб, а также возмущения, появившегося в результате резкого маневра стаи. Такие исследования требуют численного решения задачи (1) – (4), они не могут быть проведены аналитически или с использованием известных асимптотических формул [20, 21], верных в дальней зоне для устоявшихся присоединенных волн.

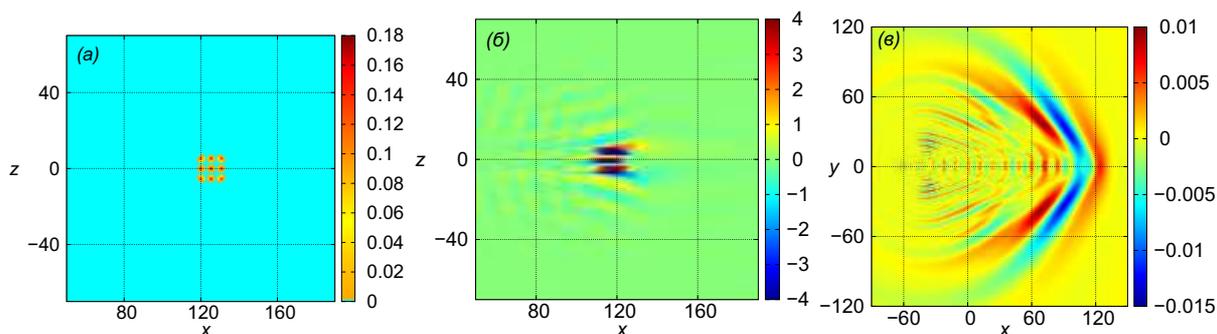
Будем считать, что стая состоит из  $M$  одинаковых рыб, расположенных в узлах правильной кубической сетки с шагом  $p$ . Схема такой стаи для  $M = 27$  показана на рис. 1. Функция  $f(\mathbf{x}, t)$  задающая правую часть (1) определяется формулами (4), (5). Далее в численных расчетах жидкость считалась равномерно стратифицированной, частота плавучести  $N = 1$ ; значение констант в (5) принималось равным  $A_i = B_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

#### 1.1.1. Движение с постоянной горизонтальной скоростью

В случае, когда все особи движутся с одинаковой и постоянной по величине и направлению скоростью  $\mathbf{U} = (a, b, c)$ , для положения  $i$ -й рыбы в момент времени  $t$  имеем:

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_0^i + \mathbf{U}t, \quad (9)$$

где  $\mathbf{x}_0^i$  – начальное положение  $i$ -й рыбы.



**Рис. 2.** Функция  $f$ , задающая правую часть (1), в вертикальном сечении  $y = 0$  (а), нормированное вертикальное смещение жидкости  $\hat{\zeta}(x, 0, z)$  в вертикальном сечении  $y = 0$  (б), горизонтальное сечение функции вертикального смещения жидкости  $\zeta(x, y, h)$ , сечение находится на расстоянии  $h = 20m$  от плоскости движения центра масс стаи (с). От момента начала движения прошло  $t = 82, 6$  с

Рассмотрим пример численного моделирования горизонтального прямолинейного движения. Пусть стая из  $M = 27$  рыб движется горизонтально в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $\mathbf{U} = (1, 0, 0)$ , см. рис. 1. Расстояние между любыми двумя ближайшими рыбами  $p = 5$  м, то есть стая имеет размер  $10\text{ м} \times 10\text{ м} \times 10\text{ м}$ . В начальный момент времени центр масс стаи  $\mathbf{x}^{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}^i$ , находится в точке с координатами  $(-40, 0, 0)$ . Схема стаи и функция  $f(\mathbf{x}, t)$  показаны на рис. 1 и рис. 2 а соответственно, результаты численного решения задачи (1) – (5), (9) приведены на рис. 2 б и рис. 2 в. На рис. 2 б показано нормированное вертикальное смещение жидкости  $\hat{\zeta}(x, y, z, t) = \frac{2\pi a}{N^2 B_1} \zeta(x, y, z, t)$  в вертикальном сечении  $y = 0$ , проходящем через центр стаи. Видна картина обтекания рыб стаи, находящихся на уровнях глубины  $z = -p, z = 0, z = p$ . На рис. 2 в показано вертикальное смещение жидкости  $\zeta(x, y, 20)$  в горизонтальной плоскости, находящейся на уровне  $z = 20$ , то есть на расстоянии  $15$  м от стаи по вертикали. В картине возмущения на рис. 2 в видно влияние формы стаи по сравнению с картиной возмущения от одиночного точечного источника [20]. Один такой расчет, то есть моделирование движения стаи из точки  $(-40, 0, 0)$  до момента ее выхода на границу области  $\Omega$ , занимал примерно трое суток на одном вычислительном узле (два процессора Intel Xeon 3 ГГц, 192 Мб ОЗУ) суперкомпьютера МВС-10П Центра коллективного пользования вычислительными ресурсами МСЦ НИЦ Курчатовский институт. Для расчета использовалась разностная сетка размером  $300 \times 300 \times 300$  точек, было сделано 90 шагов по времени.

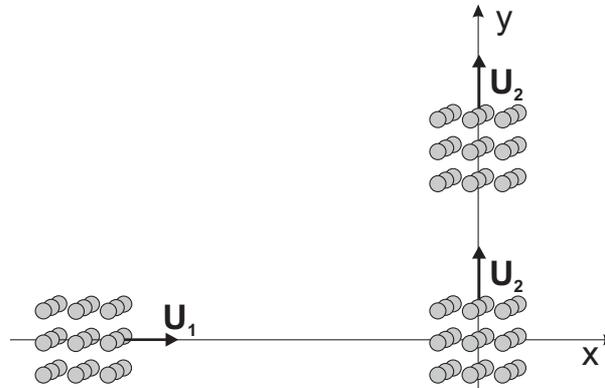
### 1.1.2. Движение в горизонтальной плоскости с поворотом на $90^\circ$

Пусть стая рыб начинает движение в момент времени  $t = 0$  так, что каждая рыба движется в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $\mathbf{U}_1 = (a_1, 0, 0)$ . Центр масс стаи в начальный момент времени находится в точке с координатами  $\mathbf{x}_0^{\text{cm}} = (x_0^{\text{cm}}, 0, 0)$ ,  $x_0^{\text{cm}} < 0$ . В момент времени, когда центр масс достигает плоскости  $x = 0$ , скорость каждой рыбы мгновенно становится равной  $\mathbf{U}_2 = (0, b_2, 0)$ . Таким образом, скорость изменяется со временем следующим образом:

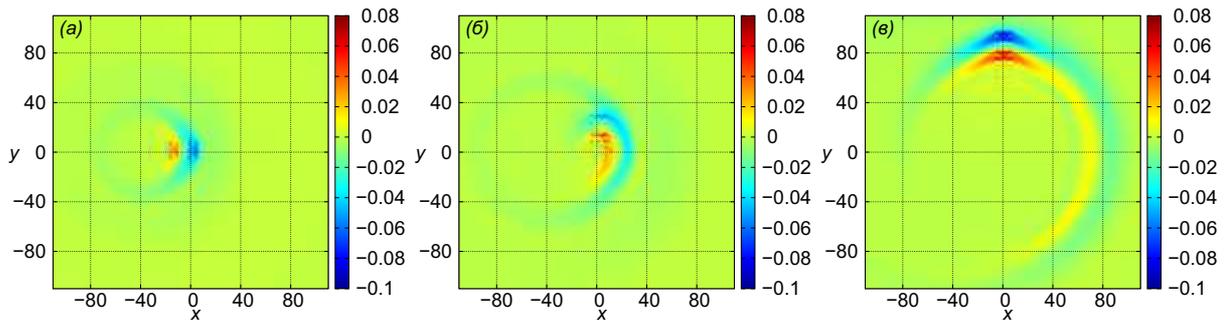
$$\mathbf{U}(t) = \begin{cases} \mathbf{U}_1 = (a_1, 0, 0), & 0 \leq t \leq -x_0^{\text{cm}}/a_1, \\ \mathbf{U}_2 = (0, b_2, 0), & t > -x_0^{\text{cm}}/a_1. \end{cases} \quad (10)$$

Далее показаны результаты моделирования поворота на  $90^\circ$  для скоростей  $a_1 = b_2 = 1$  м/с. Стая состоит из  $M = 27$  одинаковых рыб, расстояние между рыбами  $p = 5$  м. В начальный момент времени центр масс стаи  $\mathbf{x}_0^{\text{cm}} = \mathbf{x}_0^{14}$  находится в точке с координатами  $(-40\text{ м}, 0, 0)$ . Схема движения показана на рис. 3. Результаты численного

решения задачи (1) – (5), (9), (10) показаны на рис. 4. Показано горизонтальное сечение  $z = 1$  функции вертикального смещения жидкости  $\zeta(x, y, 1)$  в момент  $t = 39,8$  с непосредственно перед поворотом (рис. 4 а), в момент времени  $t = 63,7$  с (рис. 4 б), в момент времени  $t = 132,3$  с (рис. 4 в). Из рисунков видно, что сначала за движущейся стаей формируется картина присоединенных волн. После скачкообразного изменения направления скорости происходит деформация картины возмущения в горизонтальной плоскости, а затем, со временем, за продолжающей движение вдоль оси  $Oy$  стаей формируется классическая картина присоединенных волн; одновременно с этим продолжается (с меньшей интенсивностью) распространение возмущения по первоначальному направлению, а именно вдоль оси  $Ox$ .



**Рис. 3.** Схема движения стаи из  $M = 27$  одинаковых рыб. Движение происходит в горизонтальной плоскости  $z = 0$ . Сначала стая движется вдоль оси  $Ox$ . В момент, когда центр стаи оказывается в начале координат, направление скорости изменяется на 90 градусов, далее стая движется вдоль оси  $Oy$



**Рис. 4.** Горизонтальное сечение  $z = 1$  функции вертикального смещения жидкости  $\zeta(x, y, 1)$  в момент непосредственно перед поворотом  $t = 39,8$  с, в момент времени  $t = 63,7$  с, в момент времени  $t = 132,3$  с (слева направо)

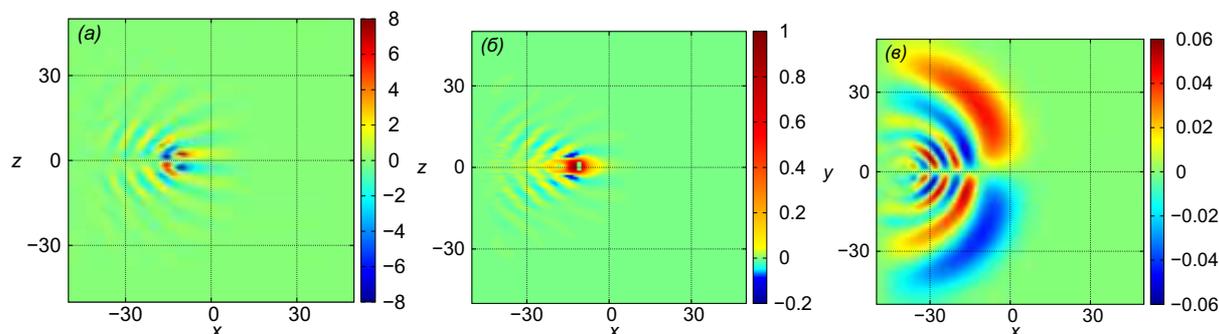
### 1.1.3. Движение рыб по синусоидам

В расчетах, результаты которых приведены выше стая рыб двигалась поступательно как целое, с постоянным расстоянием между рыбами, причем каждая отдельная рыба двигалась прямолинейно с постоянной скоростью. Однако в природе каждая рыба движется по изогнутой траектории, а расстояние между рыбами постоянно меняется. Про моделируем такое более сложное движение. Пусть координаты  $i$ -й рыбы изменяются по следующему закону,  $i = 1, \dots, M$ :

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_{0i} + at, \\ y_i(t) &= y_{0i} + d \sin\left(\frac{2\pi a}{l_f}t + \phi_i\right), \\ z_i(t) &= z_{0i}. \end{aligned} \tag{11}$$

то есть, траектория  $i$ -й рыбы лежит в горизонтальной плоскости  $z_i = z_{0i}$  и представляет собой сдвинутую на случайную величину  $\phi_i \in [0, 2\pi]$  синусоиду с периодом  $l_f$  и амплитудой  $d$ , при этом проекция скорости рыбы на ось  $Ox$  постоянна и равна  $a$ .

На рис. 5 показаны результаты расчета движения стаи рыб из  $M = 125$  особей. Каждая рыба движется по закону (11) с параметрами  $l_f = 1$  м,  $d = 0,2$  м, центр масс стаи движется в положительном направлении оси  $Ox$  со средней скоростью  $a = 1$  м/с. Точки  $(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i})$ ,  $i = 1, \dots, 125$  (то есть координаты рыб в начальный момент времени, если бы все случайные сдвиги фаз  $\phi_i$  были равны нулю) находятся в вершинах кубической сетки  $5 \times 5 \times 5$  с шагом 1 м и с центром в точке с координатами  $(-40, 0, 0)$ .



**Рис. 5.** Моделирование синусоидального движения рыб в стае. Показаны нормированное вертикальное смещение  $\hat{\zeta}(x, 0, z)$  в вертикальном сечении  $y = 0$  м (а), горизонтальная компонента скорости  $v_y$  в вертикальной плоскости  $z = 1$  м (б) и в горизонтальной плоскости  $z = 10$  м (с) в момент времени  $t = 28,8$  с после начала движения

Сравнивались результаты расчетов для случаев движения рыб по синусоидам (11) и их прямолинейного движения, то есть когда  $d = 0$  в (11). Сравнение результатов проводилось в горизонтальном сечении  $z = z_0$ ,  $-H < z_0 < H$ , в области  $\Omega_{z_0} = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ . В качестве меры отличия использовалась величина  $\varepsilon(g^s, g^r)$ :

$$\varepsilon(g^s, g^r) = \frac{\|g^s(x) - g^r(x)\|_{L_2(\Omega_{z_0})}}{\|g^r(x)\|_{L_2(\Omega_{z_0})}},$$

где  $\|g\|_{L_2(\Omega_{z_0})} = \sqrt{\int_{\Omega_{z_0}} g(x, y, z_0)^2 dx dy}$ ,  $g^s$  – некоторая гидромеханическая характеристика для синусоидального движения рыб,  $g^r$  – та же характеристика, но для случая прямолинейного движения рыб. Расчеты показали, что для горизонтальных компонент скорости, для вертикального смещения жидкости величины отличия  $\varepsilon(v_x^s, v_x^r)$ ,  $\varepsilon(v_y^s, v_y^r)$ ,  $\varepsilon(\zeta_x^s, \zeta_x^r)$  составляют не более 1%. Таким образом, при рассмотренных нами значениях параметров результирующие поля возмущений для случаев синусоидального и прямолинейного движения рыб в стае отличаются несущественно.

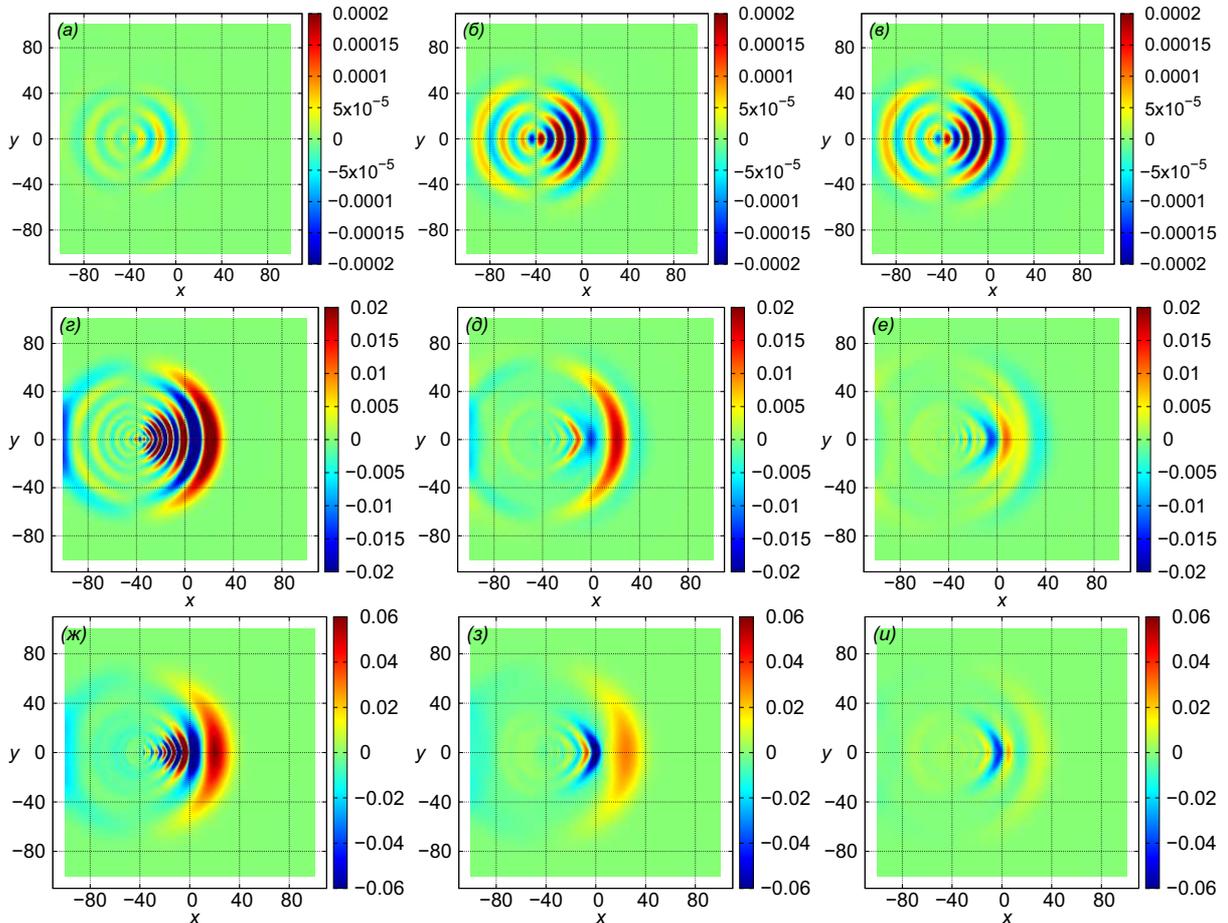
#### 1.1.4. Исследование зависимости характера возмущения от расстояния между рыбами в стае

Изучим влияние расстояния между рыбами на картину возмущения при горизонтальном поступательном движении стаи. Пусть стая рыб состоит из  $M = 125$  одинаковых рыб, находящихся в начальный момент времени в точках с координатами

$$\mathbf{x}^{i,j,k} = (x_0^{cm} + i \cdot p, y_0^{cm} + j \cdot p, z_0^{cm} + k \cdot p), \quad i, j, k = -2, -1, 0, 1, 2,$$

где  $(x_0^{cm}, y_0^{cm}, z_0^{cm})$  – координаты центра масс стаи в момент времени  $t = 0$ , а именно,  $x_0^{cm} = -40$ ,  $y_0^{cm} = z_0^{cm} = 0$ . Каждая рыба движется с горизонтальной скоростью

$U_i = (1, 0, 0)$ ,  $i = 1, \dots, 125$ . Результаты моделирования для различных значений расстояния между рыбами  $p$  показаны на рис. 6. Показаны возмущение поля горизонтальной компоненты скорости  $v_x$  в горизонтальных сечениях  $z = 10$  м (рис. 6 ж, 6 з, 6 и),  $z = 20$  м (рис. 6 г, 6 д, 6 е) и  $z = 70$  м (рис. 6 а, 6 б, 6 в) в момент времени  $t = 43,8$  с. Расстояние между рыбами  $p$  принимало значения 1 м (рис. 6 ж, 6 г, 6 а), 1,5 м (рис. 6 з, 6 д, 6 б) и 2 м (рис. 6 и, 6 е, 6 в). Результаты расчетов показывают, что вблизи движущейся стаи характер возмущения гидродинамических полей существенно зависит от расстояния между рыбами, тогда как на достаточно большом расстоянии от косяка рыб картина возмущения уже не зависит от расстояния между рыбами и близка к картине устоявшихся присоединенных волн в дальней зоне [20].



**Рис. 6.** Возмущение поля горизонтальной компоненты скорости  $v_x$  в плоскостях  $z = 10$  м (нижний ряд),  $z = 20$  м (средний ряд) и  $z = 70$  м (верхний ряд) в момент времени  $t = 43,8$  с. Движение стаи из 125 особей происходит в горизонтальной плоскости. Каждая рыба движется прямолинейно со скоростью 1 м/с вдоль оси  $Ox$ . Расстояние между рыбами  $p$  равно 1, 1,5, 2 (слева направо)

## Заключение

В настоящей работе решалась задача моделирования движения стаи промысловых рыб в однородно стратифицированной идеальной жидкости. Стая моделировалась набором одинаковых точечных массовых источников, расположенных в узлах равномерной кубической решетки. Для моделирования распространения возмущения от движущейся стаи использовалась разработанная на языке программирования C++ компьютерная программа, позволяющая рассчитывать поля скорости, вертикального смещения, давления. При этом траектории и закон движения источников

возмущения могут задаваться произвольно, что позволило провести численное моделирование для случаев, когда невозможно использование известных асимптотик решения исходной задачи.

Было проведено моделирование движения стаи промысловых рыб из 27 или 125 особей. Стая двигалась горизонтально прямолинейно или с поворотом на 90 градусов. Величина скорости движения каждой рыбы была постоянна. В случае движения с поворотом, в момент поворота направление скорости мгновенно менялось на 90 градусов в горизонтальной плоскости. Было показано, что вблизи стаи и в момент изменения скорости движения (в момент начала движения, в момент поворота) картина возмущения существенно отличается от картины устоявшихся присоединенных волн в дальней зоне от одиночного источника возмущений.

Было проведено моделирование синусоидального движения рыб в стае, когда каждая рыба двигалась по синусоидальной траектории, которая имела одинаковые амплитуду и период для всех рыб, но сдвиг фазы для траектории каждой рыбы был случайной величиной. Такое движение точнее моделирует движение косяка рыб в природе. Было показано, что интересующие нас характеристики гидродинамических полей в рассмотренном диапазоне изменения параметров расчета отличаются незначительно для случаев синусоидального и поступательного движений.

Было проведено моделирование зависимости возмущения поля скоростей от расстояния между рыбами в стае. Было установлено, что на расстояниях порядка нескольких размеров стаи форма возмущения жидкости качественно зависит от расстояния между рыбами. Это делает возможным определить форму стаи, ее размеры в случае, когда картина возмущений может быть зарегистрирована непосредственно. Однако представляется, что на практике проще осуществить регистрацию результата влияния вышедшего на поверхность возмущения на спектр ветровой ряби, например, с помощью радиозондирования поверхности океана. Вопрос влияния формы стаи на спектр ветрового волнения и на результаты радиозондирования требует дополнительного исследования. Результаты моделирования показывают, что на достаточном расстоянии от движущейся группы массовых источников возмущение качественно сходно с возмущением от одиночного точечного источника некоторой эффективной мощности; вопрос возможности подбора такой эффективной массы также требует дополнительного исследования.

*Результаты расчетов, приведенные выше, были получены как на персональных компьютерах, так и с использованием вычислительных кластеров Центра коллективного пользования вычислительными ресурсами МСЦ НИЦ Курчатовский институт (ЦКП ВР МСЦ), г. Москва. Автор выражает глубокую признательность руководству и сотрудникам МСЦ, предоставившим возможность и техническую поддержку этих расчетов.*

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-61-00025, <https://rscf.ru/project/24-61-00025/>.*

## Литература

1. Dong Hoon Yi. Instantaneous 3D Continental-Shelf Scale Imaging of Oceanic Fish by Multi-Spectral Resonance Sensing Reveals Group Behavior During Spawning Migration / Dong Hoon Yi, Zheng Gong, J.M. Jech et al // Remote Sensing. – 2018. – V. 10, № 1. – P. 108–117.
2. Mueller, R.P. Video and Acoustic Camera Techniques for Studying Fish under Ice: a Review and Comparison / R.P. Mueller, R.S. Brown, H. Hop et al // Reviews in Fish Biology and Fisheries. – 2006. – V. 16, № 1. – P. 213–226.
3. Barkley, R.A. Skipjack Tuna, Katsuwonus Pelamis, Habitat Based on Temperature and Oxygen Requirements / R.A. Barkley, W.H. Neill, R.M. Gooding // Fishery Bulletin. – 1978. – V. 76, № 3. – P. 653–662.

4. Филатов, В.Н. Миграции и формирование скоплений массовых пелагических гидробионтов (на примере тихоокеанской сайры) / В.Н. Филатов. – Ростов-на-Дону: ЮНЦ РАН, 2015.
5. Tung-Yao Hsu. Predicting Skipjack Tuna Fishing Grounds in the Western and Central Pacific Ocean Based on High-Spatial-Temporal-Resolution Satellite Data / Tung-Yao Hsu, Yi Chang, Ming-An Lee et al // *Remote Sensing*. – 2021. – V. 13, № 5. – 16 p.
6. Байдулов, В.Г. О решении обратной задачи движения источника в стратифицированной жидкости // Волны и вихри в сложных средах: 12 международная конференция – школа молодых ученых. – М.: ООО ИСПОпринт, 2021. – С. 31–35.
7. Нестеров, С.В. Методы, процедуры и средства аэрокосмической компьютерной радиотомографии приповерхностных областей Земли / С.В. Нестеров, А.С. Шамаев, С.И. Шамаев. – М.: Научный мир, 1996.
8. Jackson, C.R. Nonlinear Internal Waves in Synthetic Aperture Radar Imagery / C.R. Jackson, J.C.B. da Silva, G. Jeans et al // *Oceanography*. – 2013. – V. 26, № 2. – P. 68–79.
9. Зарубин, Н.А. Исследование взаимодействия поверхностных ветровых волн с течением / Н.А. Зарубин, А.С. Шамаев // *Морские интеллектуальные технологии*. – 2023. – Т. 62, № 4. – С. 93–99.
10. Князьков, Д.Ю. Математические методы моделирования аномалий ветровых волн на поверхности океана / Д.Ю. Князьков, А.С. Шамаев // *Прикладная математика и механика*. – 2024. – Т. 88, № 4. – С. 567–582.
11. Миропольский, Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане / Ю.З. Миропольский. – Л.: Гидрометеиздат, 1981.
12. Bulatov, V.V. A General Approach to Ocean Wave Dynamics Research: Modelling, Asymptotics, Measurements / V.V. Bulatov, Y.V. Vladimirov. – Moscow: OntoPrint, 2019.
13. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Научная книга, 1998.
14. Габов, С.А. Линейные задачи нестационарных внутренних волн / С.А. Габов, А.Г. Свешников – М.: Наука, 1990.
15. Князьков, Д.Ю. Моделирование влияния неоднородности стратификации на поле внутренних волн в океане / Д.Ю. Князьков // *Морские интеллектуальные технологии*. – 2024. – Т. 4, № 4. – С. 91–98.
16. Saad, Y. GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems / Y. Saad, M.H. Schultz // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. – 1986. – V. 7, № 3. – P. 856–869.
17. Baydulov, V.G. Motion of Mass Source in Stratified Fluid / V.G. Baydulov, D. Knyazkov, A.S. Shamaev // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2022. – V. 2224, № 1. – 8 p.
18. Князьков, Д.Ю. Прямые и обратные задачи динамики поверхностного волнения, вызванного обтеканием подводного препятствия / Д.Ю. Князьков, В.Г. Байдулов, А.С. Савин, А.С. Шамаев // *Прикладная математика и механика*. – 2023. – Т. 87, № 3. – С. 442–453.
19. Knyazkov, D. Simulation of the Propagation of Internal Gravitational Waves in a Stratified Fluid / D. Knyazkov, A. Shamaev // *AIP Conference Proceedings*. – 2026. – V. 3489. – 4 p.
20. Voisin, B. Internal Wave Generation in Uniformly Stratified Fluids. Part 2. Moving Point Sources / B. Voisin // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1994. – V. 261, № 1. – P. 333–374.
21. Scase, M.M. Internal Wave Fields and Drag Generated by a Translating Body in a Stratified Fluid / M.M. Scase, S.B. Dalziel // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2004. – V. 498, № 1. – P. 289–313.
22. Чашечкин, Ю.Д. Трансформация плотностного поля трехмерным телом, движущимся в непрерывно стратифицированной жидкости / Ю.Д. Чашечкин, Е.В. Гуменник, Е.Я. Сысоева // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1995. – № 1. – P. 20–32.
23. Князьков, Д.Ю. Моделирование поля скорости течения на свободной поверхности стратифицированной жидкости / Д.Ю. Князьков // *Прикладная математика и механика*. – 2024. – Т. 88, № 5. – С. 745–757.

24. Knyazkov, D. Rectilinear Motion of Mass Source in Non-Uniformly Stratified Fluid / D. Knyazkov, A. Shamaev // AIP Conference Proceedings. – 2024. – V. 3094, № 1. – 4 p.

Дмитрий Юрьевич Князьков, кандидат физико-математических наук, лаборатория механики управляемых систем, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (г. Москва, Российская Федерация), knyaz@ipmnet.ru.

Поступила в редакцию 14 октября 2025 г.

MSC 76B55, 76M20

DOI: 10.14529/mmp260107

## SIMULATION OF THE MOTION OF A SCHOOL OF FISH IN A UNIFORMLY STRATIFIED FLUID

*D. Knyazkov*, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation, knyaz@ipmnet.ru

The field of disturbances from a school of commercial fish moving at a constant depth is investigated. The fluid is considered to be ideal and uniformly stratified. A school of fish is modeled by a group of identical point mass sources. The sources move horizontally and rectilinearly at the same speed or along the same sinusoidal trajectories with a random phase shift. A 90-degree rotation of the flock is also simulated. It is found that the result of solving the problem differs significantly from the known asymptotics near the flock, as well as in the case of rapid changes in the speed of motion of the flock, while the motion of fish along sinusoidal trajectories has little effect on the character of disturbances compared to rectilinear motion. The effect of the change in the distance between the fishes on the velocity fields of the fluid is studied. A significant influence of the distance between fish in a flock on the disturbance pattern is found at distances of the order of several flock sizes, whereas in the far zone, the disturbance pattern of the fluid does not depend on the distance between the fish and is similar to the disturbance pattern from a point mass source.

*Keywords:* internal waves in the ocean; stratified fluid; school of fish; velocity field; numerical simulation.

## References

1. Dong Hoon Yi, Zheng Gong, J.M. Jech et al. Instantaneous 3D Continental-Shelf Scale Imaging of Oceanic Fish by Multi-Spectral Resonance Sensing Reveals Group Behavior during Spawning Migration. *Remote Sensing*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 108–117. DOI: 10.3390/rs10010108
2. Mueller R.P., Brown R.S., Hop H. et al. Video and Acoustic Camera Techniques for Studying Fish under Ice: a Review and Comparison. *Reviews in Fish Biology and Fisheries*, 2006, vol. 16, no. 1, pp. 213–226. DOI: 10.1007/s11160-006-9011-0
3. Barkley A., Neill W.H., Gooding R.M. Skipjack Tuna, *Katsuwonus pelamis*, Habitat Based on Temperature and Oxygen Requirements. *Fishery Bulletin*, 1978, vol. 76, no. 3, pp. 653–662.
4. Filatov V.N. *Migratsii i formirovaniye skopleniy massovykh pelagicheskikh gidrobiontov (na primere tikhookeanskoy sayry)* [Migration and Formation of Concentrations of Mass Pelagic Hydrobionts (Pacific Saury Being Exemplified)]. Rostov-on-Don, SSC RAS Publishers, 2015, 168 p. (in Russian)
5. Tung-Yao Hsu, Yi Chang, Ming-An Lee et al. Predicting Skipjack Tuna Fishing Grounds in the Western and Central Pacific Ocean Based on High-Spatial-Temporal-Resolution Satellite Data. *Remote Sensing*, 2021, vol. 13, no. 5, 16 p. DOI: 10.3390/rs13050861
6. Baydulov V.G. On Solving the Inverse Problem of Source Motion in a Stratified Fluid. *Volny i vikhri v slozhnykh sredakh: 12-ya mezhdunarodnaya konferentsiya – shkola molodykh uchenykh* [Proceedings of Waves and Vortices in Complex Environments: the 12th International Conference – School of Young Scientists]. Moscow, OOO ISOprint, 2021, pp. 31–35. (in Russian)

7. Nesterov S.V., Shamaev A.S., Shamaev S.I. *Metody, protsedury i sredstva aerokosmicheskoy komp'yuternoy radiotomografii pripoverkhnostnykh oblastey zemli* [Methods, Algorithms and Facilities of Aerospace Computer Radar Tomography of Earth Surface Regions]. Moscow: Nauchnyj Mir, 1996. (in Russian)
8. Jackson C.R., da Silva J.C.B., Jeans G. et al. Nonlinear Internal Waves in Synthetic Aperture Radar Imagery. *Oceanography*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 68–79. DOI: 10.5670/oceanog.2013.32
9. Zarubin N.A., Shamaev A.S. Investigation of the Model of Interaction of Wind Waves with the Sea Current. *Marine Intellectual Technologies*, 2023, vol. 62, no. 4, pp. 93–99. DOI: 10.37220/MIT.2023.62.4.070
10. Knyazkov D.Yu., Shamaev A.S. Mathematical Methods for Modeling Wind Wave Anomalies on the Ocean Surface. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, vol. 88, no. 4, pp. 567–582. DOI: 10.31857/S0032823524040055
11. Miropol'skiy Yu.Z. *Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean*. Leningrad: Springer, 2001. DOI: 10.1007/978-94-017-1325-2
12. Bulatov V.V., Vladimirov Y.V. A General Approach to Ocean Wave Dynamics Research: Modelling, Asymptotics, Measurements. Moscow, OntoPrint, 2019.
13. Demidenko G.V., Uspenskiy S.V. *Urvneniya i sistemy, ne razreshennyye otnositel'no starshey proizvodnoy* [Equations and Systems that are not Resolved with Respect to the Highest Derivative]. Novosibirsk, Nauchnaya kniga, 1998. (in Russian)
14. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. *Lineynyye zadachi nestatsionarnykh vnutrennikh voln* [Linear Problems of Theory of Transient Internal Waves]. Moscow, Nauka, 1990. (in Russian)
15. Knyazkov D. Modelling the Effect of the Heterogeneity of Stratification on the Field of Internal Waves in the Ocean. *Marine Intellectual Technologies*, 2024, vol. 4, no. 4, pp. 91–98. DOI: 10.37220/MIT.2024.66.4.082
16. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1986, vol. 7, no. 3, pp. 856–869. DOI: 10.1137/0907058
17. Baydulov V.G., Knyazkov D., Shamaev A.S. Motion of Mass Source in Stratified Fluid. *Proceedings of 2021 2nd International Symposium on Automation, Information and Computing. Journal of Physics Conference Series*, 2022, vol. 2224, no. 1, 8 p. DOI: 10.1088/1742-6596/2224/1/012038
18. Knyazkov D.Yu., Baydulov V.G., Savin A.S. et al. Direct and Inverse Problems of the Dynamics of Surface Waves Caused by the Flow Around an Underwater Obstacle. *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 58, no. 9, pp. 1725–1733. DOI: 10.31857/S0032823523030074
19. Knyazkov D., Shamaev A. Simulation of the Propagation of Internal Gravitational Waves in a Stratified Fluid. *AIP Conference Proceedings*, 2026, vol. 3489, 4 p.
20. Voisin B. Internal Wave Generation in Uniformly Stratified Fluids. Part 2. Moving Point Sources. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, vol. 261, no. 1, pp. 333–374. DOI: 10.1017/S0022112094000364
21. Scase M.M., Dalziel S.B. Internal Wave Fields and Drag Generated by a Translating Body in a Stratified Fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 498, no. 1, pp. 289–313. DOI: 10.1017/S0022112003006815
22. Chashechkin Y., Gumennik E., Sysoeva E. Transformation of a Density Field by a Three-Dimensional Body Moving in a Continuously Stratified Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1995, vol. 36, no. 1, pp. 19–29.
23. Knyazkov D.Yu. Simulation of the Flow Velocity Field on the Free Surface of a Stratified Fluid. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2024, vol. 88, no. 5, pp. 745–757. (in Russian) DOI: 10.31857/S0032823524050074
24. Knyazkov D., Shamaev A. Rectilinear Motion of Mass Source in Non-Uniformly Stratified Fluid. *AIP Conference Proceedings*, 2024, vol. 3094, no. 1, 4 p. DOI: 10.1063/5.0210166

Received October 14, 2025