

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЕКТОРИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Е.В. Бычков, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

В статье исследуется оптимальное управление решениями начально-краевой задачи для полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка с относительно секториальным оператором. Уравнение моделирует низкочастотные электромагнитные волны в дисперсной линии передачи с нелинейной емкостью. С использованием метода Галеркина, а также техники компактности и монотонности, доказаны существование и единственность решения на произвольном промежутке времени. Построено фазовое пространство задачи. В качестве приложения абстрактной теории рассмотрена математическая модель нелинейной эволюционной дисперсной линии; галеркинские суммы строятся по собственным функциям задачи Дирихле для оператора Лапласа. Кроме того, для данной модели решена задача оптимального управления с балансовым целевым функционалом.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; начально-краевая задача; метод Галеркина; *-слабая сходимость.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ и $T \in \mathbb{R}_+$. В цилиндре $C = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)x_{tt} - \alpha^2 \Delta x + \beta^2 \Delta^2 x - \Delta(|x|^{p-2}x) = u(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

с однородным граничным условием Дирихле

$$\Delta x(s, t) = x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

и начальными условиями Коши

$$x(s, 0) = x_0(s), \quad x_t(s, 0) = x_1(s), \quad s \in \Omega, \quad (3)$$

где $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Уравнение (1) возникает в связи с изучением низкочастотных электромагнитных уединенных волн в дисперсной линии передачи с нелинейной емкостью [1].

В работе [2] рассматриваются два модельных уравнения колебаний в диодных системах с распределенными параметрами. Для них построены интегральные уравнения и доказана локальная разрешимость методом сжимающих отображений. Для первого уравнения методом Похожаева получены оценки и условия разрушения решений за конечное время; для второго – методом Левина установлены условия разрушения при больших начальных данных. В работе [3] заложены основы теории полулинейных уравнений соболевского типа с относительно секториальным оператором. Вводится понятие относительно секториального оператора, определяются фазовое пространство и условия однозначной разрешимости задачи Коши.

В [4] исследуется линеаризованное уравнение Бенни – Люка с краевыми условиями Бенара, описывающее длинные волны на мелкой воде с учетом поверхностного натяжения. С помощью теории относительно секториальных операторов для уравнений соболевского типа высокого порядка доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи при любых значениях параметров модели. В [5] изучена проблема оптимального управления для абстрактных уравнений соболевского типа с относительно p -секториальным оператором и приведены примеры. С использованием авторской теории вырожденных полугрупп доказываются теоремы существования и единственности оптимального управления. Статья [6] посвящена смежному направлению – стабилизации решений линейного уравнения

соболевского типа с относительно секториальным оператором. Для полулинейных моделей соболевского типа первого порядка задача оптимального управления была исследована в [7].

Таким образом, здесь впервые будет рассмотрена разрешимость начально-краевой задачи для полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка с относительно секториальным оператором в виде галеркинской суммы, а также изучена задача оптимального управления. Задача управления ставится стандартно. Пусть $\mathfrak{U}$ – пространство управлений, выделим в нем непустое, замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$, которое назовем множеством допустимых управлений. Требуется найти минимум функционала на множестве $\mathfrak{U}_{ad}$.

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}. \quad (4)$$

Пространства и конкретный вид функционала зададим позднее, т.к. они зависят от решения неоднородного уравнения.

Обозначим $L = (\lambda - \Delta)$, $M = -\alpha^2 \Delta + \beta^2 \Delta^2$, $N(x) = -\Delta(|x|^{p-2}x)$. Математическую модель (1), (2), (3) в специально выбранных пространствах можно редуцировать к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа второго порядка

$$L\ddot{x} + Mx + N(x) = u(t) \quad (5)$$

с условиями Коши

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad (6)$$

где $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $N(\cdot) : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ – нелинейный оператор. Здесь $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ – банаховы пространства. Поскольку L не является непрерывно обратимым, то такие уравнения (5) принято называть уравнениями соболевского типа. Отметим, что оператор M является $(L, 2, 0)$ -секториальным. Пара начальных данных (x_0, x_1) с необходимостью должны принадлежать касательному пространству ко множеству, называемое фазовое многообразие,

$$\mathfrak{P} = \{x \in \mathfrak{X} : (I - Q)(Mx + N(x) - u) = 0\}$$

в точке x_0 . Подробности терминологии см. [4, 5]. В случае (L, p) -ограниченности оператора M задача оптимального управления решениями задачи (5), (6) с более простой нелинейностью рассмотрена ранее.

1. Построение приближенного решения

Рассмотрим более общую задачу (5), (6) и для нее докажем теорему о существовании решения. Пусть $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим дуальные пары $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ и (L^p, L^q) рефлексивных сепарабельных банаховых пространств относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Предположим, что операторы L, M, N удовлетворяют условиям:

(C1) $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ – самосопряженный, неотрицательный и фредгольмов; его кообраз будем обозначать $\text{coim} L$.

(C2) $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ – также самосопряженный и неотрицательный;

(C3) $N \in C^r(L^p, L^q)$, $r \geq 1$ – s -монотонный, p -коэрцитивный, однородный оператор порядка $p-1$ и имеет симметричную производную Фреше. Из последнего свойства вытекает полезное равенство $\frac{d}{dt} \langle N(u), u \rangle = p \langle N(u), \dot{u} \rangle$.

Пусть μ_k собственные числа однородной задачи Дирихле для оператора $-\Delta$, а φ_k – собственные функции, причем линейная оболочка $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ тотальна в $\mathfrak{X}$ относительно скалярного произведения в H .

Теорема 1. Пусть $(x_0, x_1) \in T_{x_0} \mathfrak{P}$, причем $x_0 \in \mathfrak{X} \cap L^p$, $x_1 \in \mathfrak{X} \cap \text{coim} L$ и имеют место условия (C1), (C2), (C3). Тогда существует решение задачи (5), (6) $x = x(t)$ такое, что $x \in L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^p)$ и $\dot{x} \in L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap \text{coim} L)$.

Доказательство. Решение задачи (5), (6) будем искать в виде

$$x^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k^m(t) \varphi_k. \quad (7)$$

Коэффициенты $a_k^m(t)$ найдем из системы алгебро-дифференциальных уравнений

$$\langle L\ddot{x}^m, \varphi_k \rangle + \langle Mx^m, \varphi_k \rangle + \langle N(x^m), \varphi_k \rangle = \langle u(t), \varphi_k \rangle, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (8)$$

$$a_k^m(0) = \beta_k^m \quad (\langle x_0, \varphi_k \rangle = \beta_k^m), \quad \dot{a}_k^m(0) = \gamma_k^m \quad (\langle x_1, \varphi_k \rangle = \gamma_k^m), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (9)$$

где последовательность $x_0^m = \sum_{k=1}^m \beta_k^m \varphi_k \rightarrow x_0$ сильно в $\mathfrak{X} \cap L^p$, и $x_1^m = \sum_{k=1}^m \gamma_k^m \varphi_k \rightarrow x_1$ сильно в $\mathfrak{X} \cap \text{coim} L$.

Получим априорные оценки. Умножим уравнение (8) на $\dot{a}_k^m(t)$ ($1 \leq k \leq m$) и просуммируем по k от 1 до m , получим

$$\langle L\ddot{x}^m, \dot{x}^m \rangle + \langle Mx^m, \dot{x}^m \rangle + \langle N(x^m), \dot{x}^m \rangle = \langle u(t), \dot{x}^m \rangle. \quad (10)$$

Введем на подпространстве $\text{coim} L$ норму $|\dot{u}|^2 = \langle L\dot{u}, \dot{u} \rangle$ в силу принципа Куранта эта норма эквивалента норме пространства $\mathfrak{X}$ для функций $\dot{u} \in \text{coim} A$, $|\dot{u}|^2 = C_L^2 \|\dot{u}\|_{\mathfrak{X}}^2$. А также, на $\mathfrak{X}$ можно ввести норму следующим образом $|u|_M^2 = \langle Mu, u \rangle$ эта норма эквивалента норме пространства $\mathfrak{X}$, $|u|_0^2 = C_M^2 \|u\|_{\mathfrak{X}}^2$. Используя самосопряженность операторов L , M , получим

$$\frac{d}{dt} \langle L\dot{x}^m, \dot{x}^m \rangle = 2 \langle L\ddot{x}^m, \dot{x}^m \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle Mx^m, x^m \rangle = 2 \langle Mx^m, \dot{x}^m \rangle.$$

С учетом условия (C3), уравнение (10) примет вид

$$\frac{d}{dt} \langle L\dot{x}^m, \dot{x}^m \rangle + \frac{d}{dt} \langle Mx^m, x^m \rangle + \frac{2}{p} \frac{d}{dt} \langle N(x^m), x^m \rangle = \langle u(t), \dot{x}^m \rangle.$$

Проинтегрируем на отрезке $[0, t]$, $t \leq t_m$ и применим последовательно неравенство Коши и Гронуолла. Воспользуемся p -коэрцитивностью оператора N , получим

$$C_L^2 \|\dot{x}^m\|_{\mathfrak{X}}^2 + C_M^2 \|x^m\|_{\mathfrak{X}}^2 + C_N \frac{2}{p} \|x^m\|_{L^p}^p \leq C. \quad (11)$$

Константа C не зависит от t_m и, следовательно, можно положить $t_m = T$.

В силу ограниченности x^m и $\dot{x}^m$ в пространствах $L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^p)$ и $L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap \text{coim} L)$, которые являются сопряженными к сепарабельным банаховым пространствам $L^1(0, T; \mathfrak{X}^*(\Omega) \cup L^q(\Omega))$ и $L^1(0, T; \mathfrak{X}^*)$, согласно теореме Банаха–Алаоглу можно выделить $*$ -слабо сходящиеся подпоследовательности:

$$\begin{aligned} x^{m_l} &\rightarrow x \text{ }^*\text{-слабо в } L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^p), \\ \dot{x}^{m_l} &\rightarrow \dot{x} \text{ }^*\text{-слабо в } L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap \text{coim} L). \end{aligned}$$

Причем $\dot{x}^{m_l}$ понимается как обобщенная производная в пространстве распределений.

Поскольку оператор N p -коэрцитивен

$$\langle N(x^m), x^m \rangle \leq \|N(x^m)\|_{L^q} \|x^m\|_{L^p} \leq C^N \|x^m\|_{L^p}^{p-1} \|x^m\|_{L^p} = C^N \|x^m\|_{L^p}^p,$$

следовательно, $N(x^m)$ ограничены в пространстве $L^q(0, T; \mathfrak{X}^* \cup L^q)$, то $N(x^{m_l}) \rightarrow g$ – слабо в $L^q(0, T; \mathfrak{X}^* \cup L^q)$. Используя монотонность и свойства $*$ -слабосходящихся последовательностей можно показать, что $N(x) = g$. Полагая $m_l = l$, k фиксировано и $l > k$, получим

$$\langle L\ddot{x}^l, \varphi_k \rangle + \langle Mx^l, \varphi_k \rangle + \langle N(x^l), \varphi_k \rangle = \langle u, \varphi_k \rangle. \quad (12)$$

Перейдем почленно к пределу в (12)

$$\langle Ml k x^l, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle Mx, \varphi_k \rangle \text{ }^*\text{-слабо в } L^\infty(0, T),$$

$$\langle L\ddot{x}^l, \varphi_k \rangle = \frac{d}{dt} \langle L\dot{x}^l, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle L\ddot{x}, \varphi_k \rangle \text{ в } D'(0, T),$$

$D'(0, T)$ – пространство обобщенных функций с компактным носителем, а

$$\langle N(x^l), \varphi_k \rangle \rightarrow \langle N(x), \varphi_k \rangle \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T).$$

Таким образом, из (12) выводим

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle Lx, \varphi_k \rangle + \langle Mx, \varphi_k \rangle + \langle N(x), \varphi_k \rangle = \langle u, \varphi_k \rangle. \quad (13)$$

Ввиду плотности системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в пространстве $\mathfrak{X} \cap L^p$ при $m \rightarrow \infty$, и произвольности выбора φ_k , имеет место равенство для произвольного $v \in \mathfrak{X} \cap L^p$

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle Lx, v \rangle + \langle Mx, v \rangle + \langle N(x), v \rangle = \langle u, v \rangle. \quad (14)$$

В силу разложения начальных условий в ряд $x_l(0) = x_l^0 \rightarrow x_0$ слабо в H^1 $x_l(0) \rightarrow x(0)$ в $\mathfrak{X} \cap L^p$, следовательно, $x(0) = x_0$. В силу априорных оценок, получим $\dot{x}(0) = x_1$. Таким образом, теорема доказана. $\square$

2. Нелинейная эволюционная дисперсная линия передач

Теорема 2. Пусть $n < 4$, $\lambda \in [\mu_1, +\infty)$, $(x_0, x_1) \in T_{x_0}\mathfrak{P}$, причем $x_0 \in H_0^2(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ и $x_1 \in L^2(\Omega) \cap \text{coim} L$. Тогда существует единственное решение задачи (1) – (3) $x = x(s, t)$ такое, что $x \in L^\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ и $\dot{x} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \cap \text{coim} L)$.

Доказательство. Редуцируем задачу (1) – (3) к задаче (5), (6), в качестве гильбертова пространства H возьмем $W_2^{-1}(\Omega)$ со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x \tilde{y} ds, \quad \forall x, y \in W_2^{-1}(\Omega), \quad (15)$$

где $\tilde{y}$ – обобщенное решение задачи Дирихле (2) для уравнения $-\Delta \tilde{v} = v$. Положим $\mathfrak{X} = W_2^2$ и $\mathfrak{X}^* = (W_2^2)^*$ относительно двойственности (15). Определим операторы $L : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ и $M : \text{dom} M \rightarrow \mathfrak{X}^*$ формулами

$$\langle Lx, y \rangle = \int_{\Omega} (xy + \lambda x \tilde{y}) ds, \quad \langle Mx, y \rangle = \int_{\Omega} (\alpha^2 \nabla x \nabla \tilde{y} + \beta^2 \Delta x \Delta \tilde{y}) ds.$$

При $\lambda \geq \mu_1$ условия (C1), (C2) будут выполняться. Определим оператор $N(u) : L^p \rightarrow (L^p)^*$ формулой

$$\langle N(x), y \rangle = \int_{\Omega} |x|^{p-2} x y ds.$$

Таким образом, условие (C3) выполняется и имеет место теорема 1.

Единственность докажем методом от противного. Пусть x и y – два различных решения задачи (1) – (3), обозначим $w = x - y$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$L\ddot{w} + Mw = \Delta(|y|^{p-2}y) - \Delta(|x|^{p-2}x). \quad (16)$$

По аналогии с предыдущим параграфом, получим

$$C_L^2 \|\dot{w}\|_{\mathfrak{X}}^2 + C_M^2 \|w\|_{\mathfrak{X}}^2 = 2 \int_0^t \langle |y|^{p-2}y - |x|^{p-2}x, \dot{w} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|C_L^2 \dot{w}\|_{\mathfrak{X}}^2 + C_M^2 \|w\|_{\mathfrak{X}}^2] &\leq 2 \langle |y|^{p-2} y - |x|^{p-2} x, \dot{w} \rangle, \\ 2 \langle |y|^{p-2} y - |x|^{p-2} x, \dot{w}^m \rangle &\leq 2p \int_{\Omega} \sup(|x|^{p-2}, |y|^{p-2}) |w| |\dot{w}| ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя неравенство Гельдера, оценим правую часть (17), получим

$$\int_{\Omega} \sup(|x|^{p-2}, |y|^{p-2}) |w| |\dot{w}| ds \leq C(\| |x|^2 \|_{L^r} + \| |y|^2 \|_{L^r}) \|w\|_{L^q} \|\dot{w}\|_{L^2}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1.$$

По теореме вложения и свойствам нормы, получим

$$C(\| |x|^2 \|_{L^r} + \| |y|^2 \|_{L^r}) \|w\|_{L^q} \|\dot{w}\|_{L^2} \leq 2C(\|w\|_{L^q}^2 + \|\dot{w}\|_{L^2}^2).$$

Придем к неравенству

$$C_L^2 \|\dot{w}\|_{\mathfrak{X}}^2 + C_M^2 \|w\|_{\mathfrak{X}}^2 \leq 2C \int_0^t (\|w\|_{\mathfrak{X}}^2 + \|\dot{w}\|_{\mathfrak{X}}^2) ds,$$

откуда, в силу леммы Гронуолла, имеет место равенство $\|\dot{w}\|_{\mathfrak{X}}^2 + \|w\|_{\mathfrak{X}}^2 = 0$, следовательно, $w \equiv 0$. Таким образом, $x \equiv y$. □

3. Оптимальное управление

Рассмотрим задачу оптимального управления (4) для решений начально-краевой задачи (1) – (3). С этой целью введем пространство $\mathfrak{U} = L^2(0, T; L^2)$ и выделим в нем непустое замкнутое выпуклое множество допустимых управлений $\mathfrak{U}_{ad}$. На основании теоремы 2 построим пространство $\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L^\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap L^4(\Omega)), \dot{x} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \cap \text{coim } L)\}$. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ будем называть *решением задачи оптимального управления*, если $J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u)$, где пара $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяет системе (1)–(3). При этом управление $\tilde{u}$ называется *оптимальным управлением*.

Теорема 3. Пусть $n < 4$, $\lambda \in [\mu_1, +\infty)$, $(x_0, x_1) \in T_{x_0} \mathfrak{P}$, причем $x_0 \in H_0^2(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ и $x_1 \in L^2(\Omega) \cap \text{coim } L$. Тогда существует решение задачи (1) – (4).

Доказательство. Из теорем 1 и 2 следует, что оператор

$$\left(L \frac{d^2}{dt^2} + M + N(\cdot) \right) : \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{U}$$

является гомеоморфизмом. Зададим функционал штрафа, используемый в (4) в виде

$$\begin{aligned} J(x, u) = J(u) &= \beta (\|x(t) - z(t)\|_{L^p(0, T; L^p)}^p + \\ &+ \|\dot{x}(t) - \dot{z}(t)\|_{L^2(0, T; L^2)}^2) + (1 - \beta) \|u(t)\|_{L^2(0, T; L^2)}^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $z \in L^p(0, T; L^p) \cap L^2(0, T; L^2)$ – заданная целевая функция. Пусть $\{u^m\} \subset \mathfrak{U}_{ad}$ – последовательность такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} J(u^m) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(u),$$

тогда из (18) следует, что

$$\|u(t)\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 \leq C \quad (19)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$. Из (19) следует, что из последовательности $\{u^m\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, которую вновь обозначим $\{u^m\}$, такую, что $u^m \rightarrow \tilde{u}$. В силу теоремы Мазура $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Обозначим за $x^m = x(u^m)$ *-слабое решение уравнения

$$L\ddot{x}^m + Mx^m + N(x^m) = u^m. \quad (20)$$

Получим априорные оценки также, как в доказательстве теоремы 2. Теперь можно перейти почленно к пределу в равенстве (20), устремляя m к бесконечности

$$L\ddot{\tilde{x}} + M\tilde{x} + N(\tilde{x}) = \tilde{u}. \quad (21)$$

Таким образом, $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u})$ и $\liminf_{m \rightarrow \infty} J(x_m) \leq J(\tilde{x})$. Следовательно, $\tilde{x}$ является решением задачи оптимального управления (1) – (4).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 26-21-20022, <https://rscf.ru/project/26-21-20022/>. □

Литература

1. Ким, Д.Ч. Видеосолитоны в дисперсной линии передачи с нелинейной емкостью р-п-перехода / Д.Ч. Ким // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83, № 3. – С. 31–40.
2. Корпусов, М.О. Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами / М.О. Корпусов, Е.А. Овсянников // Известия РАН. Серия математическая. – 2020. – Т. 84, № 3. – С. 15–70.
3. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Доклады Российской академии наук. – 1993. – Т. 329, № 3. – С. 274–277.
4. Замышляева, А.А. Об аналитическом исследовании математической модели Бенни – Люка / А.А. Замышляева // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 57–65.
5. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно р-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
6. Kitaeva, O.G. Stabilization of Solutions to a Linear Sobolev type Equation with a Relatively Sectorial Operator / O.G. Kitaeva, E.D. Akhmedeev // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2025. – V. 12, № 1. – P. 3–10.
7. Sviridyuk, G.A. An Optimal Control Problem for the Hoff Equation / G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2007. – V. 1, № 2. – P. 247–253.

Евгений Викторович Бычков, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), bychkovev@susu.ru.

Поступила в редакцию 15 июня 2026 г.

MSC 49J20

DOI: 10.14529/mmp260310

OPTIMAL CONTROL FOR A SECOND ORDER SEMILINEAR SOBOLEV TYPE EQUATION IN THE SECTORIAL CASE

E. V. Bychkov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, bychkovev@susu.ru

The paper investigates the optimal control of solutions to an initial-boundary value problem for a second-order semilinear Sobolev-type equation with a relatively sectorial operator. The equation models low-frequency electromagnetic waves in a dispersive transmission line with nonlinear capacitance. Using the Galerkin method, as well as compactness and monotonicity techniques, the existence and uniqueness of a solution on an arbitrary time interval are proved. The phase space of the problem is constructed. As an application of the abstract theory, a mathematical model of a nonlinear evolutionary dispersive line is considered; the Galerkin sums are constructed using the eigenfunctions of the Dirichlet problem for the Laplace operator. Furthermore, for this model, the optimal control problem with a balance-type cost functional is solved.

Keywords: Sobolev type equations; initial-boundary value problem; Galerkin method; *-weak convergence.

References

1. Kim D.Ch. Video Solitons in a Dispersive Transmission Line with the Nonlinear Capacitance of a p-n Junction. *Technical Physics*, 2013, vol. 58, no. 3, pp. 340–350. DOI: 10.1134/S1063784213030122
2. Korpusov M.O., Ovsyannikov E.A. Blow-Up Instability in Nonlinear Wave Models with Distributed Parameters. *Izvestiya: Mathematics*, 2020, vol. 84, no. 3, pp. 449–501. DOI: 10.1070/IM8820.
3. Sviridyuk G.A. Semilinear Equations of Sobolev Type with a Relatively Sectorial Operator. *Doklady Mathematics*, 1993, vol. 47, no. 2, p. 233–238.
4. Zamyshlyayeva A.A. An Analytical Investigation of Linearized Benney-Luke Model. *Mathematical Notes of Yakutsk State University*, 2013, vol. 20, no. 2, pp. 57–65.
5. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev-Type Linear Equations with Relatively p-Sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1882–1890.
6. Kitaeva O.G., Akhmadeev E.D. Stabilization of Solutions to a Linear Sobolev-Type Equation with a Relatively Sectorial Operator. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2025, vol. 12, no. 1, pp. 3–10. DOI: 10.14529/jcem250101
7. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An Optimal Control Problem for the Hoff Equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, vol. 1, no. 2, pp. 247–253. DOI: 10.1134/S1990478907020147

Received June 15, 2026