

ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВОГО МНОГООБРАЗИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Н.Г. Николаева¹, Н.А. Манакова¹¹Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

Проблема неединственности решения задачи Коши является одним из фундаментальных вызовов в теории дифференциальных уравнений, демонстрируя, что даже при кажущейся полноте постановки дальнейшая эволюция системы может быть непредсказуема. В случае вырожденных нелинейных моделей математической физики также возможно существование неединственности решения начальной задачи и возникновение сборок Уитни в фазовых многообразиях. Исследованы вопросы неединственности решений начально-краевых задач для уравнений, относящихся к полулинейным уравнениям соболевского типа, и связи неединственности решений задачи с существованием в фазовом многообразии уравнения сборки и складок Уитни. Изучена математическая модель Хоффа и выявлены условия накладываемые на параметры уравнения, при которых фазовое многообразие имеет особенности, и существует несколько решений задачи Шоултера – Сидорова в случае, когда размерность ядра оператора при производной по времени является произвольной.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; сборка Уитни; метод фазового пространства.

Введение

В настоящее время математическое моделирование стало общим подходом к исследованию различных прикладных задач. При математическом моделировании более наглядно, чем при физическом моделировании, осуществляется контроль и регистрация результатов исследований. Большое количество процессов изучается на основе дифференциальных уравнений. Проблема неединственности решения задачи Коши является одним из фундаментальных вызовов в теории дифференциальных уравнений, демонстрируя, что даже при кажущейся полноте постановки дальнейшая эволюция системы может быть непредсказуема. Классическим примером в области обыкновенных дифференциальных уравнений служит уравнение $y' = \sqrt{|y|}$, для которого при нулевом начальном условии существует как тривиальное решение $y \equiv 0$, так и бесконечное множество решений, начинающих рост в произвольной точке. Спектр математических моделей, демонстрирующих эту особенность, чрезвычайно широк. В [1] исследовано уравнение Бюргерса с малым параметром: в момент градиентной катастрофы (опрокидывания волны) решение предельного уравнения теряет единственность и асимптотика возмущенного решения вблизи этой особой точки описывается с помощью функций сборки Уитни. В [2] исследовано уравнение пластины, у которого возникает неединственность решений задачи Коши, и показано существование глобального аттрактора с использованием метода обобщенных полупотоков. В случае вырожденных нелинейных моделей математической физики также возможно существование неединственности решения и возникновение сборки Уитни. В [3] на примере моделей химических и биологических реакций – брюсселятора Лефевра – Пригожина и модели Бонгоффера – Вандер-Поля – показано, что в фазовом многообразии возникают сборки Уитни, что напрямую связывает неединственность решения с теорией катастроф. Обширный класс моделей математической физики [4,5] основан на полулинейных неклассических уравнениях или системах уравнений в частных производных, неразрешенных относительно производной по времени. Одним из примеров таких моделей, содержащих в фазовом многообразии уравнения сборки Уитни, является модель Хоффа [6]

$$(\mu + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3, \quad x \in \Omega, t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞ . Модель Хоффа описывает динамику деформации двутавровой балки. Искомая функция $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, характеризует отклонения балки от положения равновесия в случае $n = 1$, а параметр $\mu \in \mathbb{R}$

– продольную нагрузку на балку. Параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ определяют свойства материала балки. Изучение вырожденной модели Хоффа в различных аспектах было проведено в [7–11]. Модель (1), (2) относится к классу полулинейных уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \quad \ker L \neq 0. \quad (3)$$

Уравнения представленного класса и начальные задачи для них не удается исследовать классическими методами в следствие возможного вырождения оператора при старшей производной, поэтому для их исследования требуется развитие новых и модификации уже известных методов исследования.

Одним из первых начально-краевую задачу для уравнения (1) начал изучать Н.А. Сидоров [8]. В этой работе была отмечена принципиальная неразрешимость задачи Коши ($u(x, 0) - u_0(x) = 0$) при произвольном начальном значении в случае вырожденности уравнения (1). Рассмотрение условия Шоултера – Сидорова [12]

$$L(u(x, 0) - u_0(x)) = 0 \quad (4)$$

позволяет избежать не существования решений задачи Коши, однако возможна неединственность решения задачи (3), (4). Г.А. Свиридюком был построен метод фазового пространства [13], основанный на изучении структуры множества допустимых начальных значений

$$\mathfrak{B} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) \rangle = 0\}, \quad (5)$$

понимаемого как фазовое многообразие уравнения (3). Проблема неединственности решения задачи Шоултера – Сидорова приобретает особую глубину при рассмотрении ее в контексте теории особенностей Уитни, которая позволяет описывать точки ветвления решений и топологическую структуру множеств, где единственность решения нарушается. Вопросы неединственности решений уравнений и систем уравнений, сводящихся к абстрактным полулинейным уравнениям соболевского типа (3) и связи неединственности решений (3), (4) с существованием в фазовом многообразии (5) уравнения сборок и складок Уитни были освещены в [5, 14, 15]. Само понятие сборок и складок возникло при развитии теории катастроф. Математическую теорию катастроф применяют в различных областях, не только в прикладной математике, физике, так же ее применяют и к экономическим системам [16, 17]. В [3] впервые было показано существование особенностей в фазовом многообразии уравнений, относящихся к соболевскому типу. В случае, когда фазовым многообразием уравнения служит простое банахово C^∞ -многообразие, следует единственность решения задачи (3), (4). Совсем иная ситуация получается в случае, когда фазовое многообразие уравнения лежит на многообразии, содержащем особенность, например, k -сборку Уитни [11], тогда может быть неединственность решений задачи Шоултера – Сидорова (3), (4).

В [10] были приведены условия для уравнения (1), при которых фазовым многообразием уравнения служит простое банахово C^∞ -многообразие. В [9] были найдены условия на параметры уравнения (1), при которых фазовое многообразие (7) уравнения имеет особенности в случае $\dim \ker(\mu + \Delta) = 1$ и $\dim \ker(\mu + \Delta) = 2$. Целью данного исследования является изучение модели (1), (2) и выявление условий накладываемых на параметры α, β , при которых фазовое многообразие имеет особенности и существует несколько решений задачи (1), (2), (4) при $\dim \ker(\mu + \Delta) = m, m \in \mathbb{N}$.

1. Особенности фазового многообразия

Исследуем морфологию фазового многообразия уравнения (1) с условием (2) в случае $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. Найдем условия, накладываемые на параметры уравнения α, β , при которых фазовое многообразие имеет особенности и вытекает неединственность решения задачи Шоултера – Сидорова.

Редуцируем задачу (1), (2) к уравнению (3). Положим $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \mathfrak{F} = W_2^{-1}(\Omega)$. Операторы L, M определим формулами

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \int_{\Omega} (\mu u - \nabla u \cdot \nabla v) dx, \quad \forall u, v \in \mathfrak{U}, \\ \langle Mu, v \rangle &= \int_{\Omega} \alpha uv \, dx, \quad \forall u, v \in \mathfrak{U}, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Заметим, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается к ∞ . Теперь построим оператор N

$$\langle N(u), v \rangle = \beta \int_{\Omega} u^3 v \, dx \quad \forall u, v \in \mathfrak{U}.$$

В силу неравенства Гельдера

$$|\langle N(u), v \rangle| \leq |\beta| \|u\|_{L_4(\Omega)}^3 \|v\|_{L_4(\Omega)},$$

оператор $N : L_4(\Omega) \rightarrow (L_4(\Omega))^* \cong L_{4/3}(\Omega)$. При $n \leq 4$ вложение $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_4(\Omega)$ плотно и непрерывно, а значит плотно и непрерывно вложение $L_{4/3}(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega)$. Отсюда следует действие оператора $N : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$.

Лемма 1. [11] При любых $\mu \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $M(L, 0)$ -ограничен.

Отметим, что условие Шоултера – Сидорова (4) для уравнения (1) примет вид

$$(\mu + \Delta)(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

В работе [3] было введено определение k -сборки Уитни. Дадим модифицированное определение k -сборки Уитни фазового многообразия (5) в случае $\dim \ker(\mu + \Delta) = m$.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{B}$ – банахово пространство, функция $G \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}; \mathbb{R})$. Уравнение $G(s, v) = 0$ определяет k -сборку Уитни над открытым множеством $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$, если существуют функции $g_0, g_{11}, \dots, g_{1m}, \dots, g_{k1}, \dots, g_{km} \in C^\infty(\mathfrak{B}'; \mathbb{R})$ такие, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$0 = g_0(v) + \sum_{i=1}^m g_{1i} s_i + \dots + \sum_{i=1}^m g_{2i} s_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^m g_{ki} s_i^{k+1} \quad \forall v \in \mathfrak{B}'.$$

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ семейство собственных значений рассматриваемой задачи, занумерованных с учетом кратности. В случае если $\mu = \lambda_k$ и $\dim \ker(\mu + \Delta) = m$, то рассматриваемому собственному значению λ_k соответствуют несколько собственных функций $\varphi_{k_1}(x, y), \varphi_{k_2}(x, y), \dots, \varphi_{k_m}(x, y)$, тогда u представим в виде $u = s_1 \varphi_{k_1} + s_2 \varphi_{k_2} + \dots + s_m \varphi_{k_m} + u^\perp$, $u^\perp \in \mathfrak{U}^\perp = \{u \in L_4(\Omega) : \langle u, \varphi_{k_i} \rangle = 0, i = \overline{1, m}\}$.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, тогда собственное значение и функции примут вид

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi p}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{l_2}\right)^2,$$

$$\varphi_{k_1}(x, y, z) = \sqrt{\frac{4}{l_1 l_2}} \sin \frac{\pi p x}{l_1} \sin \frac{\pi q y}{l_2},$$

$$\varphi_{k_2}(x, y, z) = \sqrt{\frac{4}{l_1 l_2}} \sin \frac{\pi q x}{l_1} \sin \frac{\pi p y}{l_2}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Таким образом в зависимости от значений коэффициента μ , параметров области l_1 и l_2 $\dim \ker(\mu + \Delta)$ может быть равна 1 или 2. В каждом из случаев функция u будет задаваться следующим образом. Например, в случае $\dim \ker(\mu + \Delta) = 1$ функция u соответствует виду $u = s_1 \varphi_{k_1} + u^\perp$, $u^\perp \in \mathfrak{U}^\perp = \{u \in L_4(\Omega) : \langle u, \varphi_{k_1} \rangle = 0\}$, а в случае $\dim \ker(\mu + \Delta) = 2$, функция u соответствует виду $u = s_1 \varphi_{k_1} + s_2 \varphi_{k_2} + u^\perp$, $u^\perp \in \mathfrak{U}^\perp = \{u \in L_4(\Omega) : \langle u, \varphi_{k_1} \rangle = 0, \langle u, \varphi_{k_2} \rangle = 0\}$.

В работе [10] был построен ортогональный проектор

$$Q = \mathbb{I} - \sum_{i=1}^m \langle \cdot, \varphi_{k_i} \rangle \varphi_{k_i}$$

и показано, что фазовое многообразие (5) для уравнения (1) примет вид

$$\mathfrak{B} = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \int_{\Omega} (\alpha + \beta u^2) u \varphi_{k_i} dx = 0, \quad i = \overline{1, m} \right\}, \quad (7)$$

где φ_{k_i} – собственные функции однородной задачи Дирихле оператора Лапласа $(-\Delta)$ при условии, что $\mu = \lambda_k$.

Построение фазового многообразия впервые для уравнения (1) было получено в работе [10] в случае $\dim \ker L = 1$. Приведем основные результаты работы.

Лемма 2. [10] Пусть $0 \in \sigma(L)$ и $n \leq 4$. Тогда для любого $v \in \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L} = \{u \in L_4(\Omega) : \langle u, \varphi_{k_i} \rangle = 0, i = \overline{1, m}\}$ существует единственный вектор $\psi \in \ker L$ такой, что $u = \psi + v \in \mathfrak{B}$.

Теорема 1. [10] Пусть $\dim \ker L = 1$, $\ker L = \text{span}\{\varphi\}$, $\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Для любого $u^\perp \in \mathfrak{U}$ существует единственное число $s \in \mathbb{R}$ такое, что вектор $s\varphi + u^\perp \in \mathfrak{B}$. Другими словами, s – единственный корень уравнения

$$s^3 \|\varphi\|_{L_4}^4 + 3s^2 \int_{\Omega} \varphi^3 u^\perp dx + 3s \int_{\Omega} \varphi^2 (u^\perp)^2 dx + \alpha \beta^{-1} + \int_{\Omega} \varphi (u^\perp)^3 dx = 0.$$

Замечание 1. В работе [10] было показано, что фазовое многообразие (7) уравнения (1) при $\alpha\beta > 0$ является простым банаховым C^∞ -многообразием. При таких условиях существует единственное решение задачи Шоултера – Сидорова (3), (4). Неединственность решения задачи Шоултера – Сидорова (3), (4) возникает в случае, когда фазовое многообразие уравнения (1) содержит особенности, например, k -сборку Уитни.

Перейдем к исследованию случая, когда $\alpha\beta < 0$ и фазовое многообразие содержит особенности. Представим $u = \sum_{i=1}^m s_i \varphi_{k_i} + u^\perp$, тогда множество $\mathfrak{B}$ C^∞ -диффеоморфно пересечению множеств:

$$\mathfrak{B}_i = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_m, u^\perp) \in \mathbb{R}^m \times L_4(\Omega) : \left\langle \left(\alpha \sum_{i=1}^m s_i \varphi_{k_i} + u^\perp + \beta \left(\sum_{i=1}^m s_i \varphi_{k_i} + u^\perp \right)^3 \right), \varphi_{k_i} \right\rangle = 0 \right\}, i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Множество $\mathfrak{B}$ описывает фазовое многообразие уравнения (1). Сформулируем теорему о структуре фазового многообразия задачи (1), (2).

Теорема 2. (i) Пусть $\alpha\beta > 0$, тогда фазовым многообразием $\mathfrak{B}$ уравнения (1) служит простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое подпространством, являющимся дополнением к $\ker(\mu + \Delta)$.
(ii) Пусть $\alpha\beta < 0$ и $\dim \ker(\mu + \Delta) = m$, тогда фазовое многообразие $\mathfrak{B}$ уравнения (1) содержит 2-сборку Уитни.

Доказательство. Доказательство пункта (i) справедливо согласно лемме 2 и теореме 1. Для доказательства пункта (ii) представим множество $\mathfrak{B}$ (8) в случае $\dim \ker(\mu + \Delta) = m$

следующим образом:

$$\mathfrak{B}_i = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_m, u^\perp) \in \mathbb{R}^m \times L_4(\Omega) : \right. \\ \left. \left(\sum_{i=1}^m s_i \right)^3 \|\varphi_{k_i}\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3 \left(\sum_{i=1}^m s_i \right)^2 \int_{\Omega} \varphi_{k_i}^3 u^\perp dx + \right. \\ \left. + 3 \sum_{i=1}^m s_i \int_{\Omega} \varphi_{k_i}^2 (u^\perp)^2 dx + \alpha \beta^{-1} + \int_{\Omega} \varphi_{k_i} (u^\perp)^3 dx = 0 \right\}, i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Таким образом, согласно определению 1 множество $\mathfrak{B}$ содержит 2-сборку Уитни. $\square$

Замечание 2. Рассмотрим классификацию особенностей фазовых многообразий уравнений соболевского типа на основе особенностей дифференцируемых отображений теории катастроф [16]. В данной теории рассматривают уравнение вида $\frac{ds}{dt} = F(s)$, где $F(s)$ – потенциальная функция. По классификации особенностей Р. Тома [18] функция $F(s)$ распадается на росток (старшая степень многочлена) и возмущение (остаток). Таким образом, для фазовых многообразий (9) можно выделить следующие типы особенностей:

- 1) 2-сборка Уитни, которая возникает при $\dim \ker(\mu + \Delta) = m$ и ростке s^4 ;
- 2) ласточкин хвост – $\dim \ker(\mu + \Delta) = 3$ и ростке s^5 ;
- 3) эллиптическую омбилику – $\dim \ker(\mu + \Delta) = 3$ и ростке от двух переменных $s_1^3 + s_2^3$;
- 4) гиперболическую омбилику – $\dim \ker(\mu + \Delta) = 3$ и ростке от двух переменных $s_1^3 - s_1 s_2^2$.

2. Исследование неединственности решения

В теории полулинейных уравнений соболевского типа выделяют два ключевых направления исследования задачи Шоултера – Сидорова (3), (4): теория вырожденных (полу)групп операторов, а также теорию s -монотонных и p -коэрцитивных операторов. Первый подход позволяет доказывать существование классического локального решения [10], второй подход – существование слабо обобщенного решения.

Определение 2. [19] Вектор-функция $u = u(t)$ называется квазистационарной траекторией уравнения (3), если $(\mathbb{I} - Q) \langle M + N \rangle (u(t)) = 0, t \in (0; T)$ при некотором $T \in \mathbb{R}_+$. Если квазистационарная траектория уравнения (3) удовлетворяет условию Шоултера – Сидорова (4), то она называется квазистационарной траекторией уравнения (3), проходящей через точку u_0 .

Замечание 3. Стоит отметить, что любое стационарное решение уравнения (3) будет квазистационарной траекторией, однако, обратное утверждение неверно. Любое решение уравнения (3) будет квазистационарной траекторией, если оператор M $(L, 0)$ -ограничен и $\ker L \neq \{0\}$. Отметим, что оператор M в уравнении (1) является $M(L, 0)$ -ограничен.

На основе теории вырожденных (полу)групп операторов и теоремы о неявной функции были получены условия существования единственной квазистационарной траектории уравнения (3).

Теорема 3. [19] Пусть оператор $M(L, p)$ -ограничен. Пусть в точке u_0 множество $\mathfrak{B}$ является простым банаховым C^k -многообразием. Тогда существует единственная квазистационарная траектория уравнения (3), проходящая через точку u_0 .

В случае, когда множество $\mathfrak{B}$ содержит 2-сборку Уитни, выявление количества решений задачи (1), (2), (6) в общем случае вызывает трудности. Применить один общий метод невозможно. Рассмотрим один из случаев, при котором удастся выявить количество решений изучаемой задачи. Отметим, что множество $\mathfrak{B}$, описывается системой множеств $\mathfrak{B}_i$, которые определяются алгебраическими уравнениями третьей степени. В соответствии с формулами Кардано любое кубическое уравнение общего вида с помощью замены можно привести к канонической форме $as^3 + bs^2 + cs + d = 0$. Предположим найдутся такие пары $\gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$, что при подстановке $v_i = \gamma_i s_i + \delta_i s_i$, в уравнения (8), определяющие

множество $\mathfrak{B}_i$ примут следующий вид:

$$\begin{cases} a_1 v_1^3 + b_1 v_1^2 + c_1 v_1 + d_1 = 0, \\ a_2 v_2^3 + b_2 v_2^2 + c_2 v_2 + d_2 = 0, \\ \dots \\ a_m v_m^3 + b_m v_m^2 + c_m v_m + d_m = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда для каждого уравнения системы (10) можно определить:

$$\begin{aligned} Q_i &= \left(\frac{3a_i c_i - b_i^2}{9a_i^2} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{2b_i^3}{27a_i^3} - \frac{b_i c_i}{3a_i^2} + \frac{d_i}{a_i} \right)^2, \\ R_i &= v_i^2 \|\varphi_{k_i}\|_{L_4(\Omega)}^4 + 2v_i \int_{\Omega} \varphi_{k_i}^3 u^{\perp} dx + \int_{\Omega} \varphi_{k_i}^2 (u^{\perp})^2 dx, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (11)$$

и ввести следующие множества

$$\begin{aligned} (\mathfrak{U}_i)_{+}^{\perp} &= \{u \in \mathfrak{U}^{\perp} : Q_i(u) > 0\}, \\ (\mathfrak{U}_i)_0^{\perp} &= \{u \in \mathfrak{U}^{\perp} : R_i(u) = 0\}, (\mathfrak{U}_i)^{\perp} = \{u \in \mathfrak{U}^{\perp} : Q_i(u) < 0\}, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть $\alpha\beta < 0$. Тогда, если для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и

- (i) для любого $u \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)_{+}^{\perp}$ существует ровно одно решение каждого уравнения системы (10);
- (ii) для любого $u \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)_{+}^{\perp} \cup (\mathfrak{U}_i)_0^{\perp}$ существует от двух до $3m - 1$ решений уравнения системы (10);
- (iii) для любого $u \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)^{\perp}$ существует $3m$ решений уравнения из системы (10).

Доказательство. Теорема справедлива в силу формул Кардано (11) для уравнений системы (10). $\square$

Теорема 5. Пусть $\alpha\beta < 0$ и $\dim \ker(\mu + \Delta) = m$ и $\exists \gamma_i, \delta_i, i = 1, 2, \dots, m$, такие что справедливо (10). Тогда, если для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и

- (i) для любого $u_0 \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)^{\perp}$ существует $3m$ решений задачи (1), (2), (6);
- (ii) для любого $u_0 \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)_{+}^{\perp} \cup (\mathfrak{U}_i)_0^{\perp}$ существует от 2 до $3m - 1$ решений задачи (1), (2), (6);
- (iii) для любого $u_0 \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)_{+}^{\perp}$ существует единственное решение задачи (1), (2), (6).

Доказательство. (i) Возьмем точку $u_0 \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)^{\perp}$. Согласно теореме 4, существуют три решения $w_j^i, j = \overline{1, 3}, i = \overline{1, m}$ для i -го уравнения из системы (10) и три решения w_j^{i+1} для $i + 1$ уравнения из системы (10), а значит, точка u_0 служит образом трех точек $u_j^0 = w_j^i \varphi_{k_i} + w_j^{i+1} \varphi_{k_{i+1}} + u^{\perp} \in \mathfrak{B}, j = \overline{1, 3}, i = \overline{1, m}$. Но при обратной замене на s_i точка u_0 будет служить образом уже для $3m$ точек. Согласно теореме 3 о существовании решения задачи Шоултера – Сидорова задача (1), (2), (6) будет иметь $3m$ различных решения.

(ii) Возьмем точку $u_0 \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)_{+}^{\perp} \cup (\mathfrak{U}_i)_0^{\perp}$. Согласно теореме 4, существуют от двух до $3m$ решений системы уравнения (10), а значит, точка u_0 служит образом от 2 до $3m$ точек принадлежащих $\mathfrak{B}$.

(iii) Возьмем точку $u_0 \in (\mathfrak{U}_i)^{\perp} \cap (\mathfrak{U}_i)_{+}^{\perp}$. Согласно теореме 4, существует одно решение w^i и w^{i+1} уравнения из системы (10), а значит, точка u_0 служит образом только одной точки $u_0 = w^i \varphi_{k_i} + w^{i+1} \varphi_{k_{i+1}} + u^{\perp} \in B$ или после обратной замены $u = s_1 \varphi_{k_1} + s_2 \varphi_{k_2} + u^{\perp}, u^{\perp} \in B$. Согласно теореме 3 о существовании решения задачи Шоултера – Сидорова задача (1), (2), (6) будет иметь только одно решение. $\square$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 26-21-20103, <https://rscf.ru/project/26-21-20103/>.

Литература

1. Захаров, С.В. Сингулярные асимптотики в задаче Коши для параболического уравнения с малым параметром / С.В. Захаров // Труды ИММ УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 97–104.
2. Sa Teles, de R. Generalized Semiflows for a Plate Model with Presumed Nonuniqueness of Solution / R. de Sa Teles // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 2019. – V. 49, № 6. – P. 2047–2061.
3. Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Математические заметки. – 1994. – Т. 55, № 3. – С. 3–10.
4. Замышляева, А.А. Неклассические уравнения математической физики. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 5–16.
5. Манакова, Н.А. Полулинейные модели соболевского типа. Неединственность решения задачи Шоултера – Сидорова / Н.А. Манакова, О.В. Гаврилова, К.В. Перевозчикова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т. 15, № 1. – С. 84–100.
6. Hoff, N.J. Creep Buckling / N.J. Hoff // Journal of the Aeronautical Science. – 1956. – № 7. – P. 1–20.
7. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 11. – С. 4–12.
8. Николаева, Н.Г. Исследование единственности решения задачи Шоултера II Сидорова для математической модели Хоффа. Морфология фазового пространства / Н.Г. Николаева, О.В. Гаврилова, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2024. – Т. 17, № 1. – С. 49–63.
9. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516–1526.
10. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.
11. Свиридюк, Г.А. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, И.К. Тринеева // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54–60.
12. Свиридюк, Г.А. Задача Шоултера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.
13. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.
14. Гильмутдинова, А.Ф. О неединственности решений задачи Шоултера II Сидорова для одной модели Плотникова / А.Ф. Гильмутдинова // Вестник СамГУ. – 2007. – № 9. – С. 85–90.
15. Свиридюк, Г.А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.Ф. Карамова // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 1476–1581.
16. Арнольд, В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1990.
17. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1988.
18. Том, Р. Структурная устойчивость и морфогенез / Р. Том. – М.: Логос, 2002.
19. Манакова, Н.А. Неклассические уравнения математической физики. Фазовые пространства полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 31–51.

Надежда Геннадьевна Николаева, ассистент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), nikolaevang@susu.ru.

Наталья Александровна Манакова, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), manakovana@susu.ru.

Поступила в редакцию 6 июня 2026 г.

PECULIARITIES OF THE PHASE MANIFOLD OF ONE SOBOLEV-TYPE EQUATION

N.G. Nikolaeva¹, N.A. Manakova¹

¹South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: nikolaevang@susu.ru, manakovana@susu.ru

The problem of the non-uniqueness of the solution of the Cauchy problem is one of the fundamental challenges in the theory of differential equations, demonstrating that even with the apparent completeness of the formulation, the further evolution of the system can be unpredictable. In the case of degenerate nonlinear models of mathematical physics, it is also possible that the solution of the initial problem may not be unique and that Whitney assemblies may appear in phase manifolds. The issues of non-uniqueness of solutions to initial boundary value problems for equations related to semilinear Sobolev type equations and the connection between the non-uniqueness of solutions to the problem and the existence of the Whitney equation of assemblies and folds in the phase manifold are investigated. The mathematical Hoff model is studied and the conditions imposed on the parameters of the equation are revealed, under which the phase manifold has singularities, and there are several solutions to the Showalter–Sidorov problem in the case when the dimension of the kernel of the operator with a time derivative is arbitrary.

Keywords: Sobolev type equations; Whitney assemblies; phase space method.

References

1. Zakharov S.V. Singular Asymptotics in the Cauchy Problem for a Parabolic Equation with a Small Parameter. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 97–104.
2. R. de Sa Teles Generalized Semiflows for a Plate Model with Presumed Nonuniqueness of Solution. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2019, vol. 49, no. 6, pp. 2047–2061. DOI: 10.1216/RMJ-2019-49-6-2047
3. Bokarieva T.A., Sviridiuk G.A. Whitney Folds in Phase Spaces of Some Semilinear Sobolev-Type Equations. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 55, no. 3, pp. 237–242. DOI:10.1007/BF02110776
4. Zamyshlyayeva A.A., Sviridyuk G.A. Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Linear Sobolev Type Equations of Higher Order. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 5–16. DOI: 10.14529/mmph160401
5. Manakova N.A., Gavrilova O.V., Perevozhikova K.V. Semilinear Models of Sobolev Type. Non-Uniqueness of Solution to the Showalter–Sidorov Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 84–100. DOI: 10.14529/mmp220105
6. Hoff N.J. Creep Buckling. *Journal of the Aeronautical Science*, 1956, no. 7, pp. 1–20.
7. Zagrebina S.A. The Multipoint Initial-Finish Problem for Hoff Linear Model. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 11, pp. 4–12.
8. Sidorov N.A., Romanova O.A. On the Application of Certain Results of Bifurcation Theory to the Solution of Degenerate Differential Equations. *Differential Equations*, 1983, vol. 19, no. 9, pp. 1516–1526.
9. Nikolaeva N.G., Gavrilova O.V., Manakova N.A. Investigation of the Uniqueness Solution of the Showalter–Sidorov Problem for the Mathematical Hoff Model. Phase Space Morphology. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2024, vol. 17, no. 1, pp. 49–63. DOI: 10.14529/mmp240105
10. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 1–2, pp. 262–266. DOI: 10.4213/mzm347
11. Sviridyuk G.A., Trineeva I.K. A Whitney Fold in the Phase Space of the Hoff Equation. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2005, vol. 49, no. 10, pp. 49–55.
12. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125.
13. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. The Phase Space of a Class of Operator Equations of Sobolev Type. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 250–258.
14. Gil'mutdinova A.F. On the Non-Uniqueness of Solutions of Showalter–Sidorov Problem for One Plotnikov Model. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 9/1, pp. 85–90. (in Russian)
15. Sviridyuk G.A., Karamova A.F. On the Phase Space Fold of a Nonclassical Equation. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1476–1481. DOI: 10.1007/s10625-005-0300-5

16. Arnold V.I. *Catastrophe Theory*. Moscow, Nauka, 1990. (in Russian)
17. Gilmore R. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. New York, Wiley, 1981.
18. Thom R. *Stabilite Structurelle et Morphogenese*. Paris, Benjamin, 1972. (in French)
19. Manakova N.A., Sviridyuk G.A. Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Phase Space of Semilinear Sobolev Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 31–51. DOI: 10.14529/mmph160304

Received June 6, 2026