

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В СМЕСИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД С РАЗЛИЧНЫМИ ДАВЛЕНИЯМИ

А.В. Федоров

В рамках модели механики гетерогенных сжимаемых сред с различными скоростями, температурами и давлениями компонентов, использующей законы сохранения массы, импульса и энергии для каждой фазы, дополненные уравнением кинетики компактирования решается задача о структуре ударной волны. Физическая задача сводится к анализу некоторой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Показывается корректность этой задачи, что позволяет дать классификацию типов ударных волн в виде замороженных и дисперсионных ударных волн. Математическая модель верифицируется по экспериментальным данным об ударных адиабатах смеси алюминия и эпоксидной смолы. Указываются предельные условия для применимости данной модели при описании ударноволновых экспериментов в гетерогенных смесях конденсированных материалов.

Ключевые слова: смесь конденсированных сжимаемых сред; ударная волна с релаксацией.

Введение

Проблема физико-математического описания распространения волновых процессов в гетерогенных средах представляет значительный интерес для отраслей промышленности, в которых в качестве объектов воздействия используются смеси твердых тел, смеси мелких твердых частиц/капель и жидкостей/газов.

В рамках моделей гетерогенных сред, с одним общим для обоих компонент давлением (назовем их моделями типа P1), описание распространения волн сжатия встречает определенные затруднения в связи с составным типом математической модели. В то же время в литературе были развиты подходы (Baer M.R., Bdzil J.B., Нигматулин Р.И., Куропатенко В.Ф., Фомин В.М., Федоров А.В., Nunziato J.W., Kapila A., Menikoff R., Powers J.M., Stewart D.S. и др.) к описанию смесей конденсированных материалов, которые основаны на предположении о различии давлений компонент смеси. Привлекательным свойством подобных математических моделей является их эволюционность (модели типа P2). Ниже мы кратко остановимся на результатах некоторых работ, выполненных в ИТПМ СО РАН в период с 1990 года по настоящее время в рамках моделей типа P2 и также новых результатах в этой области.

Волновая динамика смесей двух конденсированных сред изучалась в [1] в рамках механики гетерогенных сред (МГС) с различными скоростями, давлениями и температурами компонентов, с учетом горения дисперсной фазы. Показано, что эта математическая модель, замкнутая уравнением m_2 -переноса дисперсной фазы, является гиперболической. Было установлено также, что в односкоростной изотермической среде с двумя давлениями могут распространяться дисперсионные или замороженные ударные волны (УВ). В работах [2, 3] эта задача рассматривалась в рамках двухскоростного приближения механики гетерогенных сжимаемых смесей с различными давлениями в предположении постоянства объемной концентрации компонентов смеси. Построена карта решений в плоскости начальных параметров смеси (m_{10}, u_0) . Здесь u_0 — начальная скорость смеси, m_{10} — начальная

объемная концентрация первой фазы. Карта решений определяет области существования одно- и двухфронтных структур ударных волн смешанного типа. В [4] были определены структуры УВ в двухскоростной смеси с одинаковыми давлениями компонентов в случае некоторого частного вида давления, действующего вдоль сильного разрыва параметров. В [5] численно показана устойчивость распространения УВ различных типов, найденных в [1–4], и решена задача об отражении ударных волн от жесткой стенки.

Проблема описания УВ в смеси двух сжимаемых сред с линейными уравнениями состояния (УРС) в случае переменной объемной концентрации компонентов изучена далее в [6–11]. Здесь, в рамках более общей по сравнению с [1–5] математической модели, также описаны различные конфигурации дисперсионных и замороженных ударных волн в смеси. Численно показана их устойчивость относительно инфинитезимальных и конечных возмущений, решена задача об отражении УВ различных типов от жестких границ и комбинированных разрывов (разрывов пористости). Показано, что ударная волна может как сохранять, так и менять свой тип при отражении, найдены конфигурации течения за разрывом пористости в композитном теле в зависимости от начальных параметров смеси и ее компонент.

В наших последующих работах [12–18] различные приближения этой модели были верифицированы на решениях задач о взаимодействии ударных волн и волн разрежения с экранирующими пористыми слоями.

В данной работе рассмотрена задача о структуре ударной волны в смеси двух конденсированных тел с учетом неизотермичности процесса нагружения при использовании нелинейных УРС в форме Ми — Грюнаизена и модели Р2. В качестве УРС принято трехчленное представление некалорического члена [19]. Путем сравнения экспериментальных динамических адиабат компонент и теоретических данных Л.П. Орленко [20], Walsh М.Н. [19, 21] были выяснены области применимости трехчленных УРС при описании смеси. Предложена процедура, позволяющая определить температуру компонентов смеси на основе уравнений состояния [19]. Процедура апробирована на парциальных уравнениях состояния путем сравнения с данными расчетов [22]. На основе верифицированных математических моделей в односкоростном приближении далее построена теория бегущей волны в приближении неравновесной по давлениям смеси. Это позволило показать область применимости теории Николаевского В.Н. [23–25], о которой в [26] были высказаны замечания об отрицательности внутренних энергий компонент в некоторых случаях нагружения смесей.

1. Физико-математическая постановка задачи

Рассмотрим смесь двух конденсированных материалов, один из которых — тяжелый, дискретно распределен в непрерывно заполняющем единичный объем среды более легком материале. Считаем, что частицы тяжелого материала достаточно мелкие. Это позволяет нам ограничиться случаем односкоростного однотемпературного приближения механики гетерогенных сред с различными давлениями компонентов.

Уравнения балансов массы, импульса и энергии, записанные для смеси в целом, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u E + p u)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

К уравнениям (1) добавляется дифференциальное уравнение m_2 -переноса, описывающее

выравнивание давлений в зоне релаксации за фронтом ударной волны:

$$\frac{\partial(\rho m_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u m_2)}{\partial x} = \eta = \rho \omega = -m_1 m_2 \rho \mu^{-1} (p_1 - p_2). \quad (2)$$

Эта система замыкается заданием парциальных УРС компонентов смеси:

$$\begin{aligned} p_i &= p_{iX} + p_{iT}, & p_{iT} &= \Gamma_i \rho_{ii} e_{iT}, \\ e_i &= e_{iX} + e_{iT}, & e_{iT} &= c_{Vi} (T - T_0), \end{aligned} \quad (3)$$

здесь $\rho = \rho_1 + \rho_2 = m_1 \rho_{11} + m_2 \rho_{22}$ — средняя плотность, $\rho_{ii} = \xi_i \rho / m_i$ — истинная плотность фазы, u — скорость, $p = m_1 p_1 + m_2 p_2$ — среднее давление, $E = e + u^2/2$ — полная энергия смеси, p_i — давление i -й компоненты, $e = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ — внутренняя энергия смеси, e_{iX} — холодная энергия i -й фазы, Γ_i — коэффициент Грюнайзена, c_{Vi} — удельная теплоемкость, T — температура, m_i — объемная концентрация i -й компоненты, μ — стесненная вязкость смеси, $\xi_i = \rho_i / \rho$ — относительная массовая концентрация i -й фазы, индексом ноль отмечено стандартное начальное состояние.

Некалорическая (холодная) составляющая давления определяется из известного соотношения $p_i = \rho_{ii}^2 \frac{de_i}{d\rho_{ii}}$. К более подробному описанию мы вернемся позднее, а сейчас приведем формулы, описывающие давления и энергии компонент смеси в виде одночленных функций для p_{iX} и e_{iX} . Они получены при условии, что уравнение состояния компоненты записано в калорической форме $p = a(\rho) + b(\rho)e$:

$$\begin{aligned} p_i &= c_i \frac{(\rho_{ii}/\rho_{ii0})^{\Gamma_i+1} - 1}{\Gamma_i + 1} + \Gamma_i \rho_{ii} c_{Vi} (T - T_0), \\ e_i &= c_i \left(\frac{(\rho_{ii}/\rho_{ii0})^{\Gamma_i} - 1}{\Gamma_i \rho_{ii0}} - \frac{(\rho_{ii}/\rho_{ii0})^{\Gamma_i+1} - 1}{(\Gamma_i + 1) \rho_{ii}} \right) + c_{Vi} (T - T_0). \end{aligned} \quad (4)$$

На основе предложенной системы уравнений рассмотрим задачу о распространении стационарной УВ, которая решалась нами ранее в изотермическом приближении. Уравнения (1)–(3), описывающие ее структуру в сопутствующей системе координат $\zeta = x - Dt$, имеют вид законов сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом и кинетики компактирования:

$$\begin{aligned} \rho u &= C_1, & C_1 u + p &= C_2, & e + pu + \frac{u^2}{2} &= C_3, \\ \dot{m}_2 &= m_1 m_2 \frac{p_2 - p_1}{u \mu_2}, & p &= \sum_{i=1}^2 m_i p_i, & e &= \sum_{i=1}^2 \xi_i e_i, \\ p_i &= p_{iX}(\rho, m_i) + p_{iT}(\rho, T), & e_i &= e_{iX}(\rho, m_i) + p_{iT}(\rho, T). \end{aligned} \quad (5)$$

Безразмерные переменные, введенные в (5), получены путем отнесения плотности к ρ_{110} , давления — к $\rho_{110} a_1^2$, скорости — к скорости звука в первой фазе a_1 . Точка над буквой означает дифференцирование по ζ .

Уравнения (5) должны удовлетворять краевым условиям стационарности на $\pm\infty$:

$$\vec{U} \rightarrow \vec{U}_{0,K}, \quad \dot{\vec{U}} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty, \quad (6)$$

где $U(\rho, u, T, m_2)$ есть вектор решения. Тем самым задача определения структуры УВ свелась к решению краевой задачи (5), (6).

Возможны два вида перехода смеси в конечное состояние. Первый возникает, если начальная скорость смеси относительно ударной волны принадлежит межзвуковому интервалу. Это будет так называемая дисперсионная ударная волна. Второй возникает при относительной скорости смеси большей, чем замороженная скорость звука. В этом случае в лидирующей ударной волне сохраняется постоянной объемная концентрация фаз. В последующей после нее зоне релаксации давлений происходит их выравнивание и рост температуры фаз. Эти возможные типы течений в ударной волне будут установлены ниже. Теперь же остановимся на некоторых предельных типах течения смеси.

2. Замороженное течение

2.1. Уравнения состояния для смеси

В том случае, если время релаксации объемной концентрации второй компоненты много больше характерного времени распространения сигнала в смеси, то можно полагать, что концентрации компонентов сохраняются неизменными, $m_i = m_{i0}$. И тогда калорическая форма уравнения состояния смеси примет вид

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) + \rho(\Gamma_1 \xi_1 e_1 + \Gamma_2 \xi_2 e_2) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) + \Gamma_1 \rho e + \Delta \Gamma_2 \xi_2 \rho e_2, \quad (7)$$

здесь $\Delta \Gamma_2 = \Gamma_2 - \Gamma_1$, $p_0 = m_1 p_{10} + m_2 p_{20}$, и в парциальном уравнении состояния i -го компонента принята следующая форма представления:

$$p_i = a_i(\rho_{ii}) + \Gamma_i \rho_{ii} e_i, \quad a_i(\rho_{ii}) = p_{i0}(\delta_i - 1), \quad \delta_i = \frac{\rho_{ii}}{\rho_{i0}},$$

т. е. линейный вид для первого слагаемого, зависящего только от плотности смеси. Сделано это для простоты изложения, добавление квадратичных и кубических членов не приводит к принципиальным затруднениям. В общем виде $a_i(\rho_{ii}) = c_i \mu_i + d_i \mu_i^2 + s_i \mu_i^3$, где $\mu_i = \delta_i - 1$. Используя (7) и парциальные уравнения состояния, известным образом для линейного представления $a_i(\rho_{ii})$ можно получить такие выражения для холодных давлений и внутренних энергий компонентов, а на их основе и для смеси в целом:

$$e_{iX}(\rho_{ii}) = a_i^2 \left(\frac{\delta_i^{\Gamma_i} - 1}{\Gamma_i} - \frac{\delta_i^{\Gamma_i} - 1}{\delta_i(\Gamma_i + 1)} \right), \quad e = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \\ p_{iX} = p_{i0} \frac{\delta_i^{\Gamma_i} - 1}{\Gamma_i + 1}, \quad p = m_1 p_1 + m_2 p_2.$$

2.2. Выражения для термодинамических параметров смеси через приращение скорости

Используя (7), нетрудно найти, что приращение внутренней энергии смеси выражается через приращение скорости $\Delta u = u - u_0$ следующим образом:

$$e = \frac{p - p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) - \rho \Delta \Gamma_2 \xi_2 e_2}{\Gamma_1 \rho} = \frac{p_0 - \rho_0 u_0 u}{\Gamma_1 \rho u} \Delta u - \frac{\Delta \Gamma_2 \xi_2 e_2}{\Gamma_1}. \quad (8)$$

Закон сохранения энергии, с учетом уравнений сохранения массы и импульса, позволяет найти, после выражения давления и удельного объема через скорость смеси, представление для внутренней энергии смеси

$$e = \frac{(\Delta u)^2}{2}. \quad (9)$$

На основе (8), (9) найдем полезное выражение для внутренней энергии второй компоненты:

$$e_2 = -\frac{\Gamma_1}{\Delta\Gamma_2\xi_2} \frac{1 + \frac{2}{\Gamma_2}}{2} \Delta u(u - u_2), \quad \frac{u_2}{u_0} = \frac{1 + \frac{2}{\Gamma_1 M_0^2}}{1 + \frac{2}{\Gamma_1}}, \quad (10)$$

$$M_0 = \frac{u_0}{a_0}, \quad a_0^2 = \xi_1 a_1^2 + \xi_2 a_2^2 = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Представление (10) указывает, что внутренняя энергия второй компоненты положительна в интервале $u \in (u_2, u_0)$, если $\Delta\Gamma_2 > 0$. Заметим, что скорость за фронтом ударной волны, распространяющейся в i -й среде с уравнением состояния вида (7) выражается формулой, аналогичной (10) для u_2 , но Γ_1 следует заменить на Γ_i , а скорость звука смеси a_0 на a_i . Аналогичным образом, используя (9), (10), находим и выражение внутренней энергии для первого компонента через приращение скорости среды

$$e_1 = -\frac{\Gamma_2}{\Delta\Gamma_2\xi_1} \frac{1 + \frac{2}{\Gamma_2}}{2} \Delta u(u - u_1), \quad \frac{u_1}{u_0} = \frac{1 + \frac{2}{\Gamma_2 M_0^2}}{1 + \frac{2}{\Gamma_2}}. \quad (11)$$

Причем нетрудно показать, что $u_2 < u_1$. Таким образом, на основе вышеизложенного можно сформулировать

Утверждение 1. В смеси двух твердых тел с парциальными уравнениями состояния, имеющими линейное представление некалорического члена, внутренняя энергия смеси *положительна безусловно*, при этом парциальные энергии компонентов положительны одновременно при $u \in (u_2, u_1)$.

2.3. Уравнение для определения скорости смеси за замороженной ударной волной, его приближенное решение для слабых ударных волн

После получения выражений для приращений термодинамических величин смеси через приращение скорости можно найти одно уравнение для определения значений скорости за фронтом ударной волны из условия равенства температур компонентов в виде

$$e_2 - e_{2X} = \frac{c_V 2}{c_V} (e - e_X), \quad c_V = \xi_1 c_{V1} + \xi_2 c_{V2}. \quad (12)$$

Здесь c_V — теплоемкость смеси. Подставляя в (12) выражения (8)–(10), найдем, что оно представляет собой нелинейное уравнение для определения $u = \tilde{u}$ — скорости за фронтом ударной волны.

Получим приближенное решение этого уравнения при $\frac{\Delta u}{u_0} \ll 1$. В этом случае найдем $e \approx a_0^2 \frac{(\delta - 1)^2}{2}$, $e_{2X} \approx a_2^2 \frac{(\delta - 1)^2}{2}$. Используя эти выражения в (6) и сокращая на приращение скорости в полученном уравнении (это означает отбрасывание естественного корня u_0) для определения \tilde{u} , получим уравнение третьей степени

$$-\left(\frac{\delta}{2} + a\right) u^3 + \left(a u_2 + \frac{\delta}{2} u_0\right) u^2 - (a_2^2 - \delta a_0^2) u + (a_2^2 - \delta a_0^2) u_0 = 0, \quad (13)$$

$$a = \frac{\Gamma_1 \left(1 + \frac{2}{\Gamma_1}\right)}{2\Delta\Gamma_2\xi_2}, \quad \delta = \frac{c_V 2}{c_V}.$$

Пусть $\xi_2 \rightarrow 0$, тогда $\delta \rightarrow 1$, $M_0 \rightarrow M_{10}$. Выделяя главную часть в (13), нетрудно получить приближенное значение корня

$$\tilde{u} = \frac{1 + \frac{2}{\Gamma_1 M_{10}^2}}{1 + \frac{2}{\Gamma_1}} u_0. \quad (14)$$

Отсюда видно, что в данном предельном варианте течения скорость за фронтом ударной волны определяется параметрами первой компоненты. Во втором предельном типе течения $\xi_2 \rightarrow 1$ нетрудно показать, что (13) имеет решение, определяемое второй компонентой

$$\tilde{u} = \frac{1 + \frac{2}{\Gamma_2 M_{20}^2}}{1 + \frac{2}{\Gamma_2}} u_0. \quad (15)$$

Утверждение 2. Значения параметров на ударной волне, определяемые на основе (13) в приближении малого содержания первой или второй компоненты, имеют выражения, соответствующие параметрам полностью второй или первой компоненте (14), (15).

В общем случае немалых $\frac{\Delta u}{u_0}$ решение (13) можно найти следующим образом. Определим скорость за ударной волной из соотношений:

$$p = m_1 p_1 + m_2 p_2, \quad p = C_2 - C_1 u.$$

Приравнявая эти два уравнения, получим

$$m_1 p_{1X} + m_2 p_{2X} + \bar{R} \rho (T - T_0) - C_2 + C_1 u = 0, \quad (16)$$

где $\bar{R} = \Gamma_1 \xi_1 c_{V1} + \Gamma_2 \xi_2 c_{V2}$. В дальнейшем введем обозначение для холодного давления смеси $p_X = m_1 p_{1X} + m_2 p_{2X}$. Разность температур в (16) выразим из уравнения энергии, что позволяет получить следующее выражение:

$$T - T_0 = \frac{C_{31} - C_{21} u + \frac{u^2}{2} - e_X}{c_V}. \quad (17)$$

Из уравнения неразрывности имеем

$$\rho = \frac{C_1}{u}. \quad (18)$$

Подставляя (17), (18) в уравнение (16), найдем:

$$p_X - \frac{C_1 \Gamma}{u} e_X + \frac{C_3 \Gamma}{u} - C_2 (\Gamma + 1) + C_1 u \left(\frac{\Gamma}{2} + 1 \right) = 0, \quad (19)$$

где $\Gamma = \bar{R}/c_V$.

Уравнение (19) является основным уравнением для определения скорости за фронтом замороженной УВ, его корни находятся численно. Проверка правильности нахождения корней осуществляется по уравнениям (14) и (15).

3. Равновесное течение (построение уравнения состояния для смеси двух конденсированных сред)

Пусть в течении смеси давления фаз одинаковы. Такой вариант реализуется в случае, если время релаксации объемной концентрации второй компоненты много меньше характерного времени распространения сигнала в смеси. Тогда параметры этого движения смеси должны удовлетворять уравнению:

$$p_1(\rho, m_1, T) = p_2(\rho, m_1, T). \quad (20)$$

Если существует решение (20) относительно $m_1^e = m_1(\rho, T)$, то, подставляя его в одну из формул, выражающих давление фаз, найдем уравнение состояния смеси с одним, общим

для фаз, давлением. Действительно, если $p_1 = p_2$, то уравнение $p = \sum_1^2 m_i p_i$ преобразуется в $p = p_i$. Примем $p_i = p_1$ и окончательно получим уравнение состояния смеси:

$$p = p_1(\rho, m_1^e(\rho, T), T). \quad (21)$$

Замечание. По теореме о неявной функции для существования решения (20) достаточно, чтобы функция $P(\rho, m_1, T) = p_1(\rho, m_1, T) - p_2(\rho, m_1, T)$ была непрерывно дифференцируема по m_1 и $\frac{\partial P}{\partial m_1} \neq 0$ в начальной точке (ρ_0, m_{10}, T_0) .

3.1. Определение равновесной скорости звука

В равновесном течении с УРС (21) определяется равновесная скорость звука по формуле $c_{,e}^2 = p_{,\rho} + \frac{p_{,T}}{e_{,T}}(pV^2 - e_\rho)$. Выражения для производных можно найти в [27].

4. Расчет структуры ударной волны в смеси алюминия и эпоксидной смолы

Прежде чем перейти к описанию процедуры расчета структуры УВ в гетерогенных смесях, остановимся кратко на некоторых исследованиях теоретического и экспериментального характера, посвященных данному вопросу.

В [23] предложена математическая модель структуры фронта ударной волны в водонасыщенном грунте, принимающая во внимание различие скоростей и равенство давлений компонентов грунтовой массы. Замыкание модели производится за счет парциальных УРС каждой из сжимаемых компонент. Решение возникающей краевой задачи ищется в классе бегущих волн. Для слабых УВ проводится некоторый анализ решений этой задачи. Дан пример расчета. Вопросы существования решения краевой задачи не обсуждаются. В [24] данная математическая модель обобщена на случай механики гетерогенной среды с различными скоростями и температурами компонентов и общим для обоих компонентов давлением. Проведен ее термодинамический анализ. В случае замороженного течения автору удалось проинтегрировать уравнение энергии одной из фаз, что позволяет использовать полученное соотношение в качестве условия на УВ. Далее подробно исследуется случай течения, равновесного по скоростям и температурам. Здесь выписано уравнение Рэлея — Михельсона в плоскости (P, V) и балансовое соотношение для полной энергии смеси. Качественно обсуждаются возможности получения УРС равновесной смеси двух сжимаемых конденсированных материалов и пористого материала. В [25] дано обобщение предыдущих работ на случай смеси n конденсированных материалов. Получены формулы для описания равновесных ударных адиабат (УА) смеси. Верификация предложенной математической модели осуществлялась путем сравнения экспериментальной и расчетной УА латуни (смесь меди, цинка и свинца, с относительной массовой концентрацией 0,615, 0,36 и 0,025 соответственно). Получено их неплохое соответствие. Далее по известной из эксперимента УА смеси [26] и известному УРС компонента строится УА компонентов.

В [28] предложен экспериментальный метод, позволяющий определять ударные адиабаты гетерогенных смесей двух материалов. В качестве математической модели используется уравнение, определяющее средний удельный объем смеси через относительные массовые концентрации компонентов и их истинные плотности. Делается предположение о равенстве давлений компонентов за фронтом УВ, т. е. применяется равновесная по давлению модель механики гетерогенной среды. Это позволяет построить УА исследуемого компонента. При этом авторы полагают справедливыми законы сохранения для него, как для монолита, несмотря на необходимость учета стесненности этого компонента, движущегося в смеси.

Отметим, что в некоторых работах критикуется смесевой гетерогенный подход, развиваемый в [23–25], вследствие того, что при расчетах УА авторы получали отрицательные приращения внутренней энергии компонентов. Выше нами этот факт получен аналитически. Однако, по нашему мнению, это говорит лишь о пределах применимости подхода механики гетерогенных сред для описания процесса нагружения смесей. Действительно, и авторами [23–25], и нашими аналитическими исследованиями, и расчетами показано, что в разумных пределах и для широкого диапазона плотностей компонентов смеси пользоваться данной математической моделью и развиваемой на ее основе математической технологией возможно.

4.1. Доказательство существования стационарной структуры ударной волны в смеси

Уравнения, предложенные выше для описания структуры ударной волны, могут быть сведены к одному уравнению относительно скорости смеси:

$$\frac{du}{d\zeta} = m_1 m_2 \frac{\left(p_{,m_2} - \frac{p_{,T}}{e_{,T}} e_{,m_2}\right) u(p_2 - p_1)}{\mu_2 C_1 (c_f^2 - u^2)} = g(u), \quad (22)$$

которое должно удовлетворять условиям стационарности перед и за фронтом ударной волны

$$u \rightarrow u_{0,k}, \quad u' \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty, \quad (23)$$

здесь c_f^2 — квадрат замороженной скорости звука. В качестве конечного состояния $u = u_k$ выбирается ближайший к \tilde{u} корень, лежащий на равновесной адиабате Гюгонио. Знак собственного числа нетрудно определить из его представления:

$$\lambda = \frac{dg(u)}{du} = \varphi(u) \frac{u^2 - c_e^2}{u^2 - c_f^2}, \quad \varphi(u) = p_{2,m_2} - p_{1,m_2} < 0,$$

а c_e^2, c_f^2 — квадрат равновесной и замороженной скорости звука. Видно, что $\lambda > 0$ при $u \in (c_e, c_f)$ и $\lambda < 0$ при $u > c_f$. Это означает, что при $u = u_k, \lambda_k < 0$; при $u_0 \in (c_e, c_f)_0, \lambda_0 > 0$; при $u_0 > c_{f0}, \lambda_0 < 0$. Отсюда и следует, аналогично [2]:

Утверждение 3. Если $u_0 > c_{f0}$, то решение (22), (23) существует в классе разрывных функций, т. е. в виде замороженной ударной волны. Если $u_0 \in (c_e, c_f)_0$ — дисперсионному интервалу, то решение является непрерывно-дифференцируемым, т.е. дисперсионной ударной волной.

Физически первый тип течения соответствует замороженной ударной волне, к которой примыкает зона релаксации давлений компонентов.

Во втором типе течения параметры течения изменяются непрерывно, т. е. являют волну сжатия. Прежде чем описывать возможные структуры ударных волн, остановимся на верификации модели. Для этого опишем ударные адиабаты мономатериалов, которые составляют смесь, а затем и УА собственно смеси.

4.2. О расчете краевой задачи (22), (23)

Поставленная краевая задача решалась с помощью пакета Гира, предложенного для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Конечное состояние смеси определялось по равновесной ударной адиабате (УА), то есть уравнением Ренкина — Гюгонио. Расчеты были проведены для смеси эпоксидной смолы и частиц алюминия.

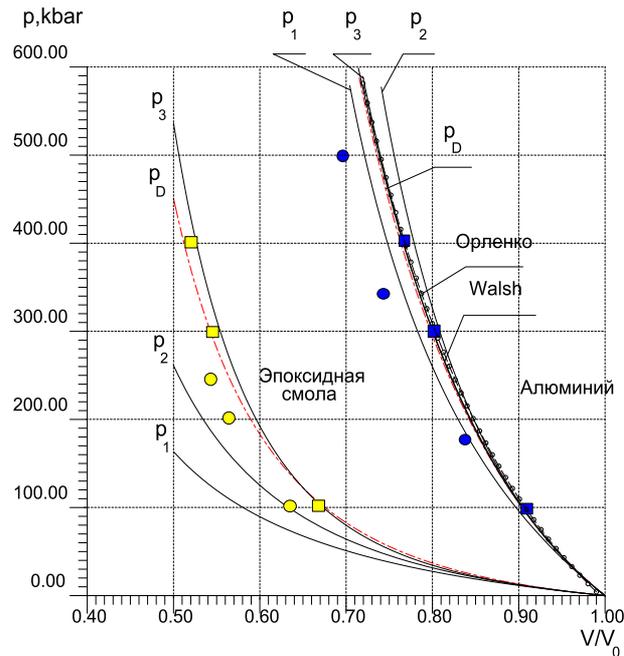


Рис. 1. Ударная адиабата алюминия и эпоксидной смолы построенная по Орленко Л.П. [20], Walsh М.Н. [21], Holmes B.S. et al [19], Р. Кинслоу ([28], p_D), маркеры — экспериментальные данные [19, 22]

Прежде чем перейти к расчетам структуры УВ в смеси, мы остановились на проверке точности УРС компонентов смеси [12]. На рис. 1 приводятся данные по УА для исследуемых материалов. Они построены по аппроксимирующим формулам УА из Орленко [20], Р. Кинслоу [28] (линейная связь между скоростью УВ и массовой скоростью), Holmes B.S. et. al [19]. В представлении для УРС из [19] удерживались линейные (p_1), квадратичные (p_2), кубические (p_3) члены. Как видно, они дают удовлетворительное описание УА. Экспериментальные точки взяты из [19] и [26].

Утверждение 4. Уравнение состояния, обследованное выше, позволяет с удовлетворительной точностью описать поведение изучаемых материалов на ударной адиабате, в том числе и при определении температуры материала [12].

4.3. Определение ударных адиабат смеси

Второй шаг — ударные адиабаты смеси. Их построение мы проведем на основе тестированных уравнений состояния компонентов смеси как для замороженной, так и для равновесной УА. Расчеты проводились для разных концентраций алюминия и эпоксидной смолы в смеси Майер А.В. Результаты приведены на рис. 2. Как видно, смесевые адиабаты лежат внутри некоторой области в (P, V) -плоскости, ограниченной адиабатами компонентов. Нижней границей является ударная адиабата эпоксидной смолы, более сильно сжимаемого материала; верхней — ударная адиабата слабо сжимаемого алюминия.

В свою очередь экспериментальные данные [19] и их расчеты лежат в «вилке», образованной равновесной и замороженной адиабатами. Причем расчетные данные [19] при малых отклонениях сжатия от единицы идут вблизи от равновесных ударных адиабат. С уменьшением V/V_0 они приближаются к замороженным ударным адиабатам. Вообще говоря, следует отметить, что в нашей расчетной модели имеется тенденция стремления равновесной ударной адиабаты к замороженной. Это ограничивает границы применимости используемых уравнений состояния. Возможно, это связано с использованием $\Gamma_i = \Gamma_{i0} = \text{const}$, что при-

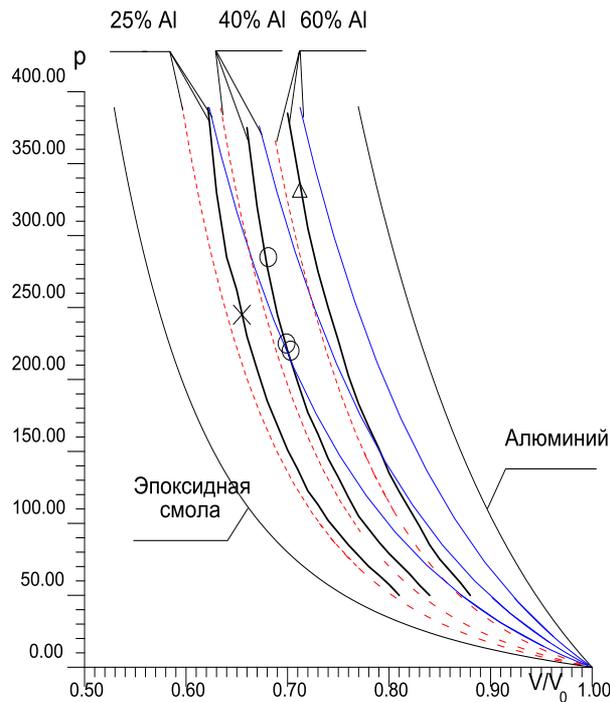


Рис. 2. Экспериментальные и теоретические ударные адиабаты смеси эпоксидной смолы и алюминия

водит к погрешностям в определении полного давления смеси. Заметим также, что наши расчеты по равновесной ударной адиабате лучше описывают эксперименты, чем замороженные ударные адиабаты. Это позволяет высказать утверждение о релаксации давлений за фронтом замороженной ударной волны к конечному равновесному состоянию, т. е. физически оправдать указанное выше Утверждение 2 о типах ударных волн.

Итак, проведенные расчеты динамических адиабат смеси по различным подходам показали, что:

- ударная адиабата более сильно сжимаемого материала — эпоксидной смолы — является нижней, а более слабо сжимаемого алюминия — верхней границей для ударных адиабат смеси.
- замороженная ударная адиабата смеси является верхней границей, а равновесная — нижней для расчетных данных [25], при этом при малых отклонениях от начального состояния имеет место близость равновесной ударной адиабаты и ударной адиабаты [25], с ростом сжатия имеет место близость данных [25] с замороженной ударной адиабатой.
- экспериментальные данные [25] лучше описываются равновесной ударной адиабатой смеси, чем замороженной.

5. Обсуждение расчетных данных по структурам ударных волн в неизотермической смеси

5.1. Карта решений

Для построения карты решений были проведены расчеты скоростей звука в зависимости от начальной объемной концентрации m_{10} первой фазы. Результаты приведены на рис. 3. В области D_1 , расположенной между кривыми c_{e0} и c_{f0} , определены дисперсионные ударные волны, выше c_{f0} , но ниже u_{kr} , т. е. в D_2 определены замороженные ударные волны. В рамках данной математической модели ($\Gamma_i = \Gamma_{i0} = \text{const}$ и трехчленного уравнения состо-

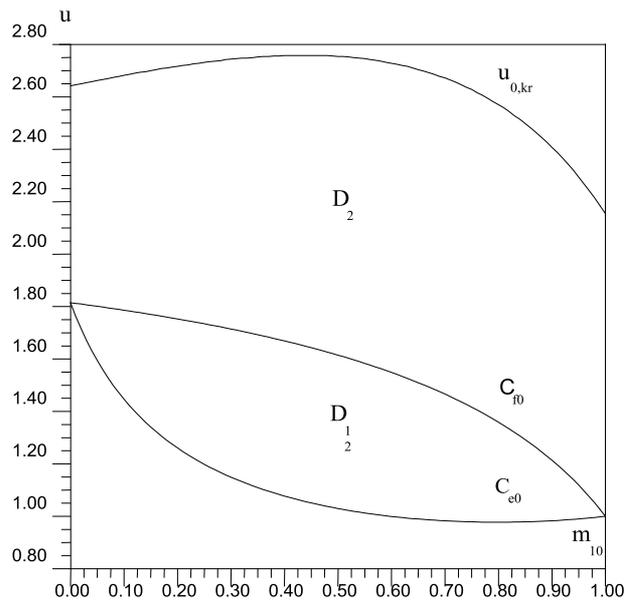


Рис. 3. Карта решений. Распределение скоростей звука в смеси в зависимости от объемной концентрации первой компоненты

нения) выше $u_{0,kr}$ расположена область неустойчивого течения. Здесь следует отказаться от попыток описания поведения материалов данными уравнениями состояния.

5.2. Замороженная ударная волна

Остановимся на расчете замороженной ударной волны. Для этого численно найдена скорость смеси за фронтом замороженной УВ — \tilde{u} . В [27] показано, что в случае слабых УВ численное решение совпадает с приближенным аналитическим. В частности было проведено сравнение найденных численных значений \tilde{u} с аналитическим решением $\tilde{u} = \frac{1 + 2/\Gamma_2 M_{20}^2}{1 + 2/\Gamma_2} u_0$, полученным выше при анализе слабых замороженных ударных волн. Точность определения \tilde{u} оказалась достаточно высока.

Представляет интерес поведение параметров в зоне релаксации давлений. Здесь следует отметить, что при изменении начальной объемной концентрации первой компоненты $m_{01} \in [0, 1]$ в смеси ее конечное равновесное состояние u_k меняется от близкого к определяемому только алюминием, т. е. второй компонентой до определяемого эпоксидной смолой ($m_{10} = 1$). Скорость за замороженной УВ $\tilde{u}(m_{10})$ имеет аналогичное поведение. С той лишь разницей, что эта функция имеет выпуклость кверху (рис. 3). Введем $\bar{u} = u/\tilde{u}(m_{10})$.

Изучим теперь непосредственно, каково локальное поведение динамических и термодинамических параметров вниз по потоку от фронта замороженного сильного разрыва. На рис. 4 приведены распределения скорости смеси $\bar{u} = u/\tilde{u}(\zeta)$ для различных объемных концентраций первой компоненты. Видно, что для приведенной скорости \bar{u} для двух различных значений m_{10} имеет место одно и то же ее значение в конечном состоянии. В этом смысле такие смеси являются эквивалентными. Соответствие устанавливается с помощью функции $\bar{u}_k(m_{10})$. У нее имеется некоторое значение $m_{10} = m_*$, при котором \bar{u} достигает минимум. Построив перпендикуляр, выходящий из оси абсцисс, и проводя через него прямые, параллельные ей, находим точки их пересечения с $\bar{u}(m_{10})$. Эти точки определяются двумя значениями объемной концентрации первой фазы. Здесь же видно, что с ростом доли эпоксидной смолы в смеси ширина зоны релаксации давлений уменьшается. Это легко можно

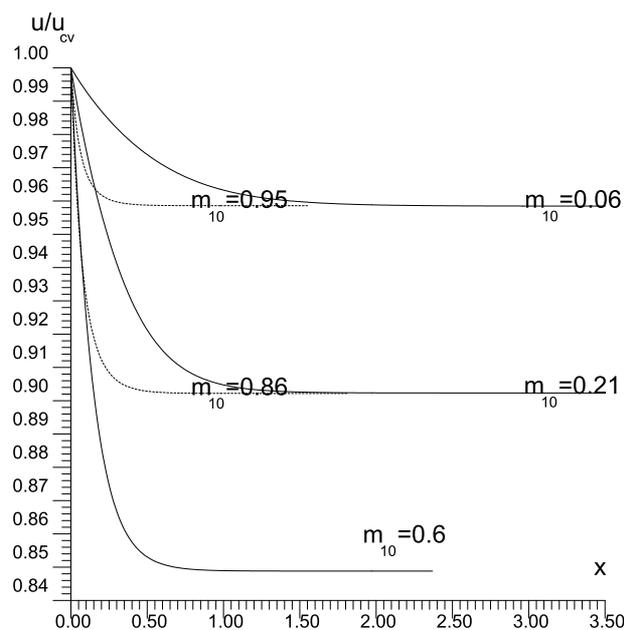


Рис. 4. Распределение относительной скорости u/u_{cv} , $u_{cv} = \tilde{u}$ за фронтом замороженной ударной волны при различных концентрациях эпоксидной смолы

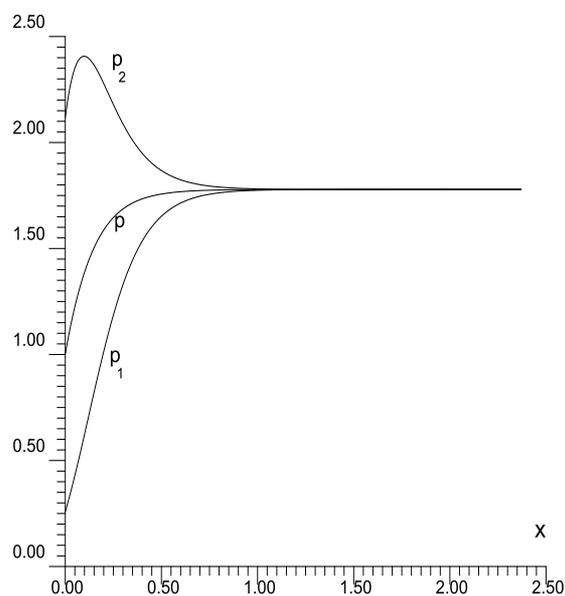


Рис. 5. Распределение давлений за фронтом замороженной ударной волны

увидеть при составлении профилей \tilde{u} при $m_{10} = 0.06$ и $m_{10} = 0.95$, а также $m_{10} = 0.21$ и $m_{10} = 0.86$.

Распределение давлений приведено на рис. 5, вместе со средним давлением смеси $p = m_1 p_1 + m_2 p_2$. Оказалось, что при данном значении m_{10} во втором компоненте давление ведет себя немонотонно. После прохождения локального максимума давление падает до равновесного конечного состояния. Поскольку больше половины объема смеси занимает первая фаза, общее давление смеси p ведет себя монотонно, как в первой компоненте. Следует отметить, что, как и ранее в неизотермической смеси [5], давление второй фазы проявляет свое немонотонное поведение при росте m_{10} .

Заключение

В рамках механики гетерогенных сред с различными давлениями определена структура ударной волны в смеси двух конденсированных сред.

Для уравнений состояния Ми — Грюнайзена компонентов указана область справедливости гетерогенного подхода к описанию динамики смеси путем сопоставления расчетных замороженных и равновесных ударных адиабат с экспериментальными для смеси алюминия и эпоксидной смолы.

Литература

1. Федоров, А.В. Математическое описание течений смеси конденсированных материалов при высоких давлениях / А.В. Федоров // Физическая газодинамика реагирующих сред. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – С. 119–128.
2. Федоров, А.В. Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) / А.В. Федоров // Моделирование в механике. – 1991. – Т. 5 (22), № 4. – С. 135–158.
3. Федоров, А.В. Типы бегущих волн в смеси двух твердых тел с собственными давлениями / А.В. Федоров // Динамика сплошной среды. Вып. 100 (Акустика неоднородных сред) / Ин-т гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН. – Новосибирск, 1991.
4. Федоров, А.В. Структура ударной волны в гетерогенной смеси двух твердых тел с одинаковыми давлениями компонент / А.В. Федоров // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. – Новосибирск: Изд-во СО РАН ИТПМ, 1992. – С. 235–249.
5. Федоров, А.В. Структура, распространение и отражение ударных волн в смеси твердых тел (гидродинамическое приближение) / А.В. Федоров, Н.Н. Федорова // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – № 4. – С. 10–18.
6. Варламов, Е.В. Бегущая волна в неизотермической смеси двух твердых тел / Е.В. Варламов, А.В. Федоров // Моделирование в механике. – 1991. – Т. 5 (22), № 3. – С. 14–26.
7. Жилин, А.А. Бегущая волна в двухскоростной смеси сжимаемых сред с различными давлениями / А.А. Жилин, А.В. Федоров, В.М. Фомин // Доклады РАН. – 1996. – Т. 350, № 2. – С. 201–205.
8. Жилин, А.А. Структура ударной волны в двухскоростной смеси сжимаемых сред с различными давлениями / А.А. Жилин, А.В. Федоров // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т. 39, № 2. – С. 10–19.
9. Жилин, А.А. Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонент / А.А. Жилин, А.В. Федоров // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 55–63.
10. Жилин, А.А. Отражение ударных волн от жесткой границы в смеси конденсированных материалов. 1. Равновесное приближение / А.А. Жилин, А.В. Федоров // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 5. – С. 73–78.
11. Жилин, А.А. Взаимодействие ударных волн с комбинированным разрывом в двухфазных средах. 2. Неравновесное приближение / А.А. Жилин, А.В. Федоров // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43, № 4. – С. 36–46.
12. Федоров, А.В. Математическое описание структуры ударных волн в смеси двух конденсированных сред / А.В. Федоров // Препринт № 3-2003. ИТПМ СО РАН.

13. Fedorov, A.V. Mathematical Modelling of Two Problems of Wave Dynamics in Heterogeneous Media / A.V. Fedorov, I.A. Fedorchenko, I.V. Leont'ev // Extended abstracts of the 20th International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems (ICDERS), Montreal, Canada, 31 July - 5 August 2005. – Montreal, 2005. – P. 1–5.
14. Жилин, А.А. Взаимодействие волн разрежения со слоем конечной толщины вблизи жесткой границы / А.А. Жилин, А.В. Федоров // Физика горения и взрыва. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 126–135.
15. Жилин, А.А. Математическое моделирование процесса взаимодействия волн разрежения с экранирующим слоем / А.А. Жилин, А.В. Федоров // Сборник трудов XII Всероссийской школы-семинара «Современные проблемы математического моделирования». – Ростов н/Д.: Изд-во Ростов. гос. ун-та, 2007.
16. Жилин, А.А. Применение схемы TVD для расчета двухфазных течений с различными скоростями и давлениями компонентов / А.А. Жилин, А.В. Федоров // Математическое моделирование. – 2008. – № 1. – С. 29–47.
17. Федоров, А.В. Взаимодействие нормально падающей ударной волны со слоем пористого материала, расположенным на твердой стенке / А.В. Федоров, И.А. Федорченко // Физика горения и взрыва. – 2010. – Т. 46, № 1. – С. 102–108.
18. Fedorov, A.V. Mathematical Modeling of Two Problems of Wave Dynamics in Heterogeneous Media / A.V. Fedorov, I.A. Fedorchenko, I.V. Leont'ev // Shock Waves. – 2006. – № 12. – P. 1–8.
19. Holmes, B.S. Steady Shock Waves in Composite Materials / B.S. Holmes, F.K. Tsou // J. Appl. Physics. – 1972. – V. 43, № 3. – P. 951–961.
20. Орленко, Л.П. Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках / Л.П. Орленко. – М.: Машиностроение, 1964.
21. Shock-Wave Compression of Twenty-Seven Metals / M.H. Walsh, R.Q. Rice, M. Queen, F.L. Yanger // Physical Review. – 1957. – V. 108, № 2. – P. 196–216.
22. Уравнения состояния алюминия меди и свинца для области высоких давлений / Л.В. Альтшулер, С.Б. Кормер, А.А. Баканова, Р.Ф. Трунин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1960. – Т. 38, вып. 3. – С. 790–798.
23. Борисов, С.Н. О структуре фронта ударной волны в водонасыщенном грунте / С.Н. Борисов, В.Н. Николаевский, В.П. Радченко // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – № 3. – С. 55–63.
24. Николаевский, В.Н. Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ / В.Н. Николаевский // Прикладная механика и техническая физика. – 1969. – № 3. – С. 82–88.
25. Богачев, Г.А. Расчет ударных адиабат некоторых гетерогенных смесей / Г.А. Богачев // Прикладная механика и техническая физика. – 1973. – № 4. – С. 130–137.
26. Алексеев, Ю.Ф. Ударное сжатие двухкомпонентных вольфрамо-парафиновых смесей / Ю.Ф. Алексеев, Л.В. Альтшулер, В.П. Крупникова // Прикладная механика и техническая физика. – 1971. – № 4. – С. 152–155.
27. Дремин, А.П. Метод определения ударных адиабат дисперсных веществ / А.П. Дремин, И.А. Карпухин // Прикладная механика и техническая физика. – 1960. – № 3. – С. 184–188.
28. Высокоскоростные ударные явления / под ред. Р. Кинслоу. – М.: Мир. 1973.

Александр Владимирович Федоров, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией «Волновые процессы в ультрадисперсных средах», Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация), fedorov@itam.nsc.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 1, pp. 104–120.

MSC 76T15

DOI: 10.14529/mmp140109

Shock Wave Structure in a Mixture of Condensed Media with Different Pressures

A. V. Fedorov, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation, fedorov@itam.nsc.ru

We solve the problem of the structure of the shock wave in the heterogeneous mixture within the model of the mechanics of heterogeneous compressible media with different velocities, temperatures and pressures of components, using the laws of conservation of mass, momentum and energy for each phase, supplemented by kinetic equation compaction. Physical problem is reduced to the analysis of some boundary value problem for ordinary differential equation. The well-posedness of this problem was shown. This allows one to classify the types of shock waves in the mixture in the form of frozen and dispersive shock waves. Mathematical model is verified by experimental data on the shock adiabat mixture of aluminum and epoxy. The limiting conditions for the applicability of this model in describing the shock-wave experiments in a heterogeneous mixture of condensed materials are determined.

Keywords: mixture of compressible condensed media; relaxation shock wave; mathematical modeling.

References

1. Fedorov A.V. Mathematical Description of Condensed Material Mixture under High Pressures [Matematicheskoe opisanie techeniy smesi kondensirovannykh materialov pri vysokikh davleniyakh]. *Fizicheskaya gazodinamika reaktivnykh sred* [Physical Gas Dynamics of Reactive Media], Novosibirsk, Nauka, 1990, pp. 119–128.
2. Fedorov A. V. Shock Wave Structure in a Mixture of Two Solid Bodies (Hydrodynamics Approach) [Struktura udarnoy volny v smesi dvukh tverdykh tel (gidrodinamicheskoe priblizhenie)]. *Modelirovanie v mekhanike* [Modelling in Mechanics], 1991, vol. 5 (22), no. 4, pp. 135–158.
3. Fedorov A.V. The Travelling Waves Types in a Mixture of Two Solid Bodies with their Pressures [Tipy begushchikh voln v smesi dvukh tverdykh tel s sobstvennymi davleniyami]. *Dinamika sploshnoy sredy. Vyp. 100 (Akustika neodnorodnykh sred)* [Dynamics of Continua. Vol. 100 (Acoustic of Nonuniform Media)]. Novosibirsk, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAN, 1991.
4. Fedorov A.V. Shock Wave Structure in a Heterogeneous Mixture of Two Solid Bodies with Equilibrium Pressure of Components [Struktura udarnoy volny v geterogennoy smesi dvukh tverdykh tel s odinakovymi davleniyami komponent]. *Chislennyye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti*. Novosibirsk, Publishing House SB RAS, 1992, pp. 235–249.

5. Fedorov A.V., Fedorova N.N. Structure, Propagation, and Reflection of Shock Wave in a Mixture of two Solid Bodies (the Hydrodynamics Approach). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1992, no. 4, pp. 487–494. DOI: 10.1007/BF00864270
6. Varlamov E.V., Fedorov A.V. Travelling Wave in the Two Velocities Nonisothermal Mixture of Two Solid Bodies [Begushchaya volna v neizotermicheskoy smesi dvukh tverdykh tel]. *Modelirovanie v mehanike* [Modelling in Mechanics], 1991, vol. 5 (22), no. 3, pp. 14–26.
7. Zhilin A.A., Fedorov A.V., Fomin V.M. The Travelling Wave in the Two Velocities Compressible Components Mixture with Different Pressures [Begushchaya volna v dvuhskorostnoy smesi szhimaemykh sred s razlichnymi davleniyami]. *Doklady RAN*, 1996, vol. 350, no. 2, pp. 201–205.
8. Zhilin A.A., Fedorov A.V. The Shock-Wave Structure in a Two-Velocity Mixture of Compressible Media with Different Pressures. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1998, vol. 39, no. 2, pp. 166–174. DOI: 10.1007/BF02468081
9. Zhilin A.A., Fedorov A.V. Propagation of Shock Waves in a Two-Phase Mixture with Different Pressures of the Components. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, vol. 40, no. 1, pp. 46–53. DOI: 10.1007/BF02467971
10. Zhilin A.A., Fedorov A.V. Reflection of Shock Waves from a Solid Boundary in a Mixture of Condensed Materials. 1. Equilibrium Approximation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, vol. 40, no. 5, pp. 841–846. DOI: 10.1007/BF02468467
11. Zhilin A.A., Fedorov A.V. Interaction of Shock Waves with a Combined Discontinuity in Two-Phase Media. 2. Nonequilibrium Approximation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 519–528. DOI: 10.1023/A:1016041328662
12. Fedorov A.V. *Matematicheskoe opisanie struktury udarnykh voln v smesi dvuh kondensirovannykh sred* [Mathematical Description of Shock Wave Structure in the Mixture of Two condensed Media]. Preprint, no. 3-2003. ITAM SB RAS.
13. Fedorov A.V., Fedorchenko I.A., Leont'ev I.V. Mathematical Modelling of Two Problems of Wave Dynamics in Heterogeneous Media. *Extended abstracts of the 20th International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems (ICDERS), Montreal, Canada, 31 July – 5 August 2005*, 2005, pp. 1–5.
14. Zhilin A.A., Fedorov A.V. Interaction of Rarefaction Waves with a Finite-Thickness Layer Near a Rigid Boundary. Equilibrium Approximation. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2007, vol. 43, no. 5, pp. 607–615. DOI: 10.1007/s10573-007-0082-6
15. Zhilin A.A., Fedorov A.V. Mathematical Modelling of the Interaction of Rarefaction Wave with Screening Layer [Matematicheskoe modelirovanie processa vzaimodeystviya voln razrezheniya s ekraniruyushchim sloem]. *Sbornik trudov XII Vserossiyskoy shkoly-seminara "Sovremennye problemy matematicheskogo modelirovaniya"* [Modern Problems of Mathematical Modelling: Proceeding], Rostov-na-Donu, Rostov State University, 2007.
16. Zhilin A.A., Fedorov A.V. TVD Scheme Application to Calculate Two-Phases Flow with Different Components Velocities and Pressures [Primenenie skhemy TVD dlya rascheta dvukhfaznykh techeniy s razlichnymi skorostyami i davleniyami komponentov]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2008, no. 1, pp. 29–47.
17. Fedorov A.V., Fedorchenko I.A. Interaction of a Normally Incident Shock Wave with a Porous Material Layer on a Solid Wall. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 89–95. DOI: 10.1007/s10573-010-0015-7
18. Fedorov A.V., Fedorchenko I.A., Leont'ev I.V. Mathematical Modeling of Two Problems of Wave Dynamics in Heterogeneous Media. *Shock Waves*, 2006, no. 12, pp. 1–8.
19. Holmes B.S., Tsou F.K. Steady Shock Waves in Composite Materials. *J. Appl. Physics*, 1972, vol. 43, no. 3, pp. 951–961.

20. Orlenko L.P. *Povedenie materialov pri intensivnyh dinamicheskikh nagruzkah* [Materials Behavior under Intensive Dynamical Loadings]. Moscow, Mashinostroenie, 1964.
21. Walsh M.H., Rice R.Q., Queen M., Yanger F.L. Shock-Wave Compression of Twenty-Seven Metals. *Physical Review*, 1957. vol. 108, no. 2, pp. 196–216. DOI: 10.1103/PhysRev.108.196
22. Al'tshuler L.V., Kormer S.B., Bakanova A.A., Trunin R.F. Equation of State of Aluminum, Cuprum and Plumbum in High Pressure Domain [Uravneniya sostoyaniya alyuminiya medi i svintsa dlya oblasti vysokikh davleniy]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1960, vol. 38, no. 3, pp. 790–798.
23. Borisov S.N., Nikolaevskiy V.N., Radchenko V.P. About Shock Wave Structure in Ground [O strukture fronta udarnoy volny v vodonasyshhennom grunte]. *Izvestiya RAN. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1967, no. 3, pp. 55–63.
24. Nikolaevskij V.N. Hydrodynamic Analysis of Shock Adiabates Heterogeneous Mixtures of Substances. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1969, no. 3, pp. 406–411.
25. Bogachev G.A. Calculation of the Shock-Wave Adiabatics for Some Heterogeneous Mixtures. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1973, vol. 14, no. 4, pp. 546–542. DOI: 10.1007/BF01201248
26. Alekseev Ju.F., Al'tshuler L.V., Krupnikova V.P. Shock Compression of Two-Component Paraffin-Tungsten Mixtures. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, no. 4, pp. 624–627.
27. Dremine A.P., Karpuhin I.A. Method for Determining the Shock Adiabates of Dispersed Materials [Metod opredeleniya udarnykh adiabat dispersnykh veshchestv]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics], 1960, no. 3, pp. 184–188.
28. *Vysokoskorostnye udarnye yavleniya* [High-Speed Shock Phenomenones]. Ed. R. Kinslou. Moscow, Mir, 1973.

Поступила в редакцию 15 ноября 2013 г.