УДК 517.928.1+517.929.8 **DOI: 10.14529/mmp140408**

ЛОМАНЫЕ ЭЙЛЕРА И ДИАМЕТР РАЗБИЕНИЯ

Д.В. Хлопин

В работе исследуются условия, которые нужно наложить на правую часть системы для того, чтобы при достаточно малом диаметре разбиения ломаные Эйлера сходились к пучку решений системы, в частности, чтобы из всякой последовательности ломаных Эйлера можно было выделить сходящуюся на всем рассматриваемом промежутке времени к решению подпоследовательность. Найдено условие (для заданной, выписываемой явно, константы, для любой липшицевого с этой константой отображения в фазовую плоскость, множество точек разрыва функции динамики имеет нулевую по Лебегу меру на графиках таких отображений), которое гарантирует сходимость ломаных Эйлера к пучку решений системы, если только диаметр соответствующих ломаным разбиений стремится к нулю. Рядом примеров показано, что данное условие не может быть ослаблено; в частности, сходимости может не быть даже если для всякой порожденной в рамках системы траектории сужение функции динамики на этот график интегрируемо по Риману, константа в указанном выше условии также не может быть уменьшена.

В работе ломаные Эйлера погружаются в семейство решений интегрального уравнения с запаздыванием специального вида, для которых в свою очередь, и проводится доказательство основного результата. Вследствие этого, результаты статьи имеют место и в более широком классе численных методов, например для ломаных со счетным числом звеньев.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; ломаные Эйлера; пошаговые методы; условия Каратеодори.

Введение

Один из самых простых численных методов решения дифференциальных уравнений — метод ломаных Эйлера. Известно, что в системах с достаточно гладкой (непрерывной по времени, непрерывно дифференцируемой по фазовой переменной) правой частью при стремлении диаметра разбиения к нулю ломаные Эйлера, соответствующие этим разбиениям, равномерно на всяком отрезке сходятся к единственной траектории системы. Этот же результат имеет место в случае непрерывной правой части при достаточно общем условии единственности траектории системы. Для непрерывной правой части можно указать такой промежуток времени, что ломаная Эйлера лежит сколь угодно близко к решению системы при достаточно малом диаметре породившего ее разбиения [1; 2, упр. II.2.1], в частности из последовательности ломаных Эйлера можно выделить сходящуюся к решению подпоследовательность. Для измеримой правой части всевозможные пределы последовательностей ломаных Эйлера образуют решение некоторого дифференциального включения, соответствующий результат следует, например, из [3, Теорема 1.1.3; 4, Th. 1.1.5]. На идее перехода к дифференциальному включению основаны многие определения, понятия, решения в задачах с разрывной по фазовой правой частью; не претендуя на полноту, отметим решения в смысле А.Ф. Филиппова [5], конструктивные движения Н.Н. Красовского [6]; см. также обзоры [7, 8].

Помимо обычных ломаных Эйлера рассматриваются также ломаные с бесконечным числом звеньев. Это необходимо, в частности, для равномерной сходимости ломаных к непродолжимому решению на всем множестве его определения [9]. При этом множество D всевозможных конечных разбиений отрезка времени погружается в множество $\mathcal{D}$ всех замкнутых подмножеств этого отрезка, содержащих его концы. Каждый элемент так введенного множества обобщенных разбиений (временных шкал [10]) порождает, вообще говоря, пучок обобщенных ломаных Эйлера. Теперь ломаная Эйлера есть решение некоторого уравнения с запаздыванием.

При получении наиболее общих условий непрерывной зависимости решения от правой части в [11] была предложена следующая идея: найти топологию (в идеале слабейшую), при которой имеет место непрерывная зависимость траектории от параметра как элемента введенного топологического пространства. Если под параметром понимать разбиения, то в [12, 13] найдена метрика для пространства временных шкал, гарантирующая, в условиях Каратеодори, сходимость порожденных разбиениями ломаных Эйлера к траектории, если сами разбиения сходятся (в смысле этой метрики) к временному промежутку. В этой статье задача скорее обратная – найти условия уже на правую часть, при которых вместо какой-либо топологии можно использовать мелкость разбиения.

В данной работе исследуются условия, которые нужно наложить на правую часть системы для того, чтобы ломаные Эйлера сходились к пучку решений системы, в частности, чтобы из всякой последовательности ломаных Эйлера можно было выделить сходящуюся на всем рассматриваемом промежутке времени к решению подпоследовательность. Показано, что в случае измеримой правой части малого диаметра разбиения недостаточно для сходимости даже в случае, когда при всякой фиксированной фазовой переменной правая часть, как функция времени, является разрывной лишь в одной точке (Пример 1), а в случае ограниченной правой части – в счетном числе точек (Пример 2).

Для произвольной последовательности конечных разбиений, диаметр которых стремится к нулю, показаны (Теорема 1) условия на исходную систему, гарантирующие сходимость соответствующих ломаных Эйлера к пучку решений системы. Эти условия идейно близки к условиям интегрируемости функции по Риману, однако требуется малость меры точек разрыва правой части по совокупности переменных вдоль некоторого семейства кривых. Показана существенность всех условий этой теоремы (Пример 3).

1. Общие определения и обозначения

Пусть R^m – m-мерное евклидово пространство, где $m \in N$. Евклидову норму в R^m обозначим через $||\cdot||_m$.

Для всякого топологического пространства X и метрического пространства Y под $B(X,Y)$ будем понимать множество всех ограниченных, измеримых по Борелю функций, действующих из топологического пространства X в Y; оснастим это множество топологией равномерной сходимости при помощи нормы $||f||_{B(X,Y)} \stackrel{\triangle}{=} \sup_{x\in X} ||f(x)||_Y$; соответствующее подпространство всех непрерывных функций из $B(X,Y)$ будем обозначать через $C(X,Y)$. Полагаем $C_k(X) \stackrel{\triangle}{=} C(X,R^k)$, $B_k(X) \stackrel{\triangle}{=} B(X,R^k)$ для всякого $k \in N$. Для краткости примем также $C(X) \stackrel{\triangle}{=} C_1(X)$, $B(X) \stackrel{\triangle}{=} B_1(X)$. Далее, всякому метрическому пространству X, точке $x \in X$ и числу $r > 0$ сопоставим замкнутый шар $O_r(x;X)$ в X радиусом r с центром в x. Определим также $O_r(A;X) = \cup_{x\in A} O_r(x;X)$ для $A \subset X$.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

функционирующую в m-мерном фазовом пространстве R^m ($m \in N$) на конечном промежутке $I_0 \stackrel{\triangle}{=} [t_0,T]$ ($t_0 < T$) при заданном начальном условии $x(t_0) = x_0$. В (1) параметр $t \in I_0$ — время, $x \in R^m$.

На функцию $f : I_0 \times R^m \to R^m$ наложим следующие условия:

($K1$) для произвольных $x \in R^m$ функция $(f(t,x)|\, t \in I_0)\colon I_0 \mapsto R^m$ измерима по Борелю на I_0;

($K2$) для каждого $t \in I_0$ функция $(f(t,x)|x \in R^m)\colon R^m \mapsto R^m$ непрерывна;

($K3$) для любого компакта $K \subset R^m$ существует такая суммируемая функция $M_K \in B(I_0, R_{>0})$, что
$$||f(t,x)||_m \le M_K(t), \quad \forall (t,x) \in I_0 \times K.$$

(C) все локальные правосторонние решения системы (1) продолжимы до момента T и равномерно ограничены.

Первые три условия фактически совпадают с условиями Каратеодори, однако мы требуем их выполнения для всех, а не при почти всех $t \in I_0$ как, например, в [5]. Заметим, что в условиях $(K1) - (K3)$ локальное решение (1) существует, и в силу (C) каждое из них должно быть продолжимо до T включительно. Все решения системы (1), определенные на промежутке $[t_0, T]$, обозначим через Φ, введем также для всех $\theta \in [t_0, T]$

$$\Phi_\theta \stackrel{\triangle}{=} \{x|_{[t_0,\theta]} \in C_m([t_0,\theta])|x \in \Phi\}.$$

В силу (C) существует такой компакт K_0, что $\Phi \subset C(I_0, K_0)$. В условиях $(K1) - (K3)$ для выполнения (C) достаточно на правую часть системы (1) дополнительно наложить условие типа подлинейного роста (или иное условие продолжимости всех решений на весь отрезок I_0 [1,3]).

Обозначим через D совокупность всех конечных множеств из I_0, содержащих точки t_0, T. Назовем такие множества конечными разбиениями.

Каждое множество $\Delta \in D$ можно единственным образом представить в виде возрастающей конечной последовательности вида $(t_i)_{i \in \overline{0,k(\Delta)}}$. Наибольшее из чисел $t_i - t_{i-1}$ назовем *диаметром разбиения* и обозначим через $d(\Delta)$.

По заданному разбиению *ломаная Эйлера* строится следующим образом: принимается $y(t_0) = x_0$, далее, $y(t) = y(t_0) + (t - t_0) f(t_0, y(t_0))$ для всякого $t \in (t_0, t_1)$. Пусть построена ломаная вплоть до момента $t_k < T$. Построим ее до момента t_{k+1} для всех $t \in (t_k, t_{k+1})$ по правилу $y(t) = y(t_k) + (t - t_k) f(t_k, y(t_k))$. В силу конечности $k(\Delta)$ ломаную можно продолжить до момента $t_{k(\Delta)+1} = T$ включительно. Итак, для всякого $\Delta \in D$ построена ломаная Эйлера $\xi_\Delta = y \in C_m(I_0)$.

Хорошо известно [2, упр II.2.1], что если правая часть уравнения динамики непрерывна по совокупности переменных, то из последовательности ломаных Эйлера при выполнении $d(\Delta_i) \to 0$ всегда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся, на некотором промежутке, к решению системы. Если решение системы неединственно, то не все последовательности ломаных Эйлера обязаны иметь предел, и не все решения могут являться такими пределами. Заметим также, что в качестве промежутка, на котором ломаные Эйлера сходятся к решениям, при этом можно взять весь I_0, для этого достаточно потребовать выполнения условия (C). То есть в случае непрерывной правой части и выполнения условия продолжимости решений (C) имеет место

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \Delta \in D\, (d(\Delta) < \delta)\, \exists x \in \Phi\ ||x - \xi_\Delta||_{C_m(I_0)} < \varepsilon. \tag{2}$$

Можно ли на правую часть наложить более слабые условия нежели непрерывность, гарантирующие выполнение (2)?

2. Примеры

Если правая часть кусочно-непрерывна, то есть если I_0 можно разбить на конечное число промежутков так, что для каждого такого промежутка I сужение правой части на $I \times R^m$ непрерывно по совокупности переменных, то, безусловно, (2) имеет место. Будет ли это так, если число «непрерывных» кусков счетно? Не будет; более того, как показывает изложенный ниже пример, сходимости нет даже если для всякого фиксированного x правая часть, как функция времени, имеет не больше одной точки разрыва.

Пример 1. Введем множество $\bar{\Delta} \stackrel{\triangle}{=} \cup_{n\in N}\{1/n\}$. Рассмотрим скалярную дифференциальную систему на отрезке времени $I = [0,1]$. Правую часть этой системы — функцию g — определим на $[0,1] \times R$ так, чтобы она могла быть отлична от единицы лишь в моменты времени из $\bar{\Delta}$, было выполнено $g(1/n, 1/n) = 1 + n$, а кроме того эта функция (как функция по x) являлась непрерывной при каждом $t \in [0,1]$, тогда она автоматически будет функцией Каратеодори. Для этого достаточно ввести g, например, по правилу:

$$g(t,x) \stackrel{\triangle}{=} \begin{cases} 1, & \forall t \notin \bar{\Delta}\ \forall x \in R; \\ 1, & \forall t \in \bar{\Delta},\ |x-t| > t^2/3; \\ 1 + \frac{1}{t} - \frac{3|x-t|}{t^3}, & \forall t \in \bar{\Delta},\ |x-t| \le t^2/3. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = g(t,x), x(0) = 0.$$

Рассмотрим последовательность конечных разбиений $\Delta_n \stackrel{\triangle}{=} \{k/n | k \in \overline{0,n}\}$. Тогда их шаг стремится к 0, покажем, что ломаные Эйлера не сойдутся к единственному решению системы $t|_{[0,1]} = (t \,|\, t \in [0,1])$.

Действительно, для всех $n \in N$ выполнено $\xi_{\Delta_n}(1/n) = 1/n$, но $g(1/n, 1/n) = 1 + n$, тогда $\xi_{\Delta_n}(2/n) = 1 + 2/n$ для всех $n \in \overline{2,\infty}$. Поскольку $g(t,x) = 1$ при $(t,x) \in [0,1) \times (1,\infty)$, имеем $\xi_{\Delta_n}(t) = 1 + t$ при $t \in (2/n, 1]$ для всех $n \in \overline{2,\infty}$. Таким образом $(\xi_{\Delta_n})_{n\in N}$ на $(0,1]$ сходится к функции $(1 + t \,|\, t \in [0,1])$, то есть к $(1+t)|_{[0,1]}$ вместо решения $t|_{[0,1]}$.

Покажем, что для всякого $x \in R$ функция $g_x = (g_x(t) = g(t,x) \,|\, t \in [0,1])$ разрывна не более чем в одной точке. Для этого достаточно доказать, что g_x может быть отлична от единицы только в одной точке из разбиения $\bar{\Delta}$, некоторой точке t вида $\frac{1}{n}$; то есть показать, что для всех $n \in N$ выполнено $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3n^2} > \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{3(n+1)^2}$. Но это неравенство эквивалентно $\dfrac{3}{n} - \dfrac{3}{n+1} > \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$, то есть очевидному $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} > \Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\Big)^2$.

Итак, в случае неограниченной правой части недостаточно потребовать, чтобы правая часть (при всяком фиксированном x) как функция времени была разрывна не более чем в конечном числе точек. Покажем, что для ограниченной правой части недостаточно потребовать, чтобы при всяком фиксированном x правая часть, как функция времени, была разрывна не более чем в счетном числе точек и ограничена.

Пример 2. Пусть Q — множество рациональных чисел, тогда каждый элемент $x \in Q$ можно представить единственным образом в виде несократимой дроби p/q, где $p \in Z, q \in N$. Рассмотрим функцию $g \in B([0,1] \times R)$, определенную по правилу

$$g(t,x) \stackrel{\triangle}{=} \begin{cases} 0, & \forall t \notin Q\ \forall x \in R; \\ 0, & t = p/q,\ |x-t| > 1/q^2; \\ 1 - q^2|x-t|, & t = p/q,\ |x-t| \le 1/q^2. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = g(t,x), x(0) = 0.$$

Поскольку правая часть эквивалентна нулю, то единственным решением этой задачи является функция $(0|t \in I_0)$. При этом всякое разбиение из рациональных точек порождает в качестве ломаной Эйлера функцию $z_0 \stackrel{\triangle}{=} (z_0(t) = t \,|\, t \in [0,1]) \in \Psi$, отличную от единственного решения $(0|t \in I_0)$. Таким образом, (2) здесь также не имеет места. Однако при этом функция g (при всяком фиксированном x) как функция времени разрывна не более чем в счетном числе точек. Для этого достаточно доказать, что для всякого $\alpha \in (0,1)$ на множестве

$$K_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \{(t,x) \,|\, t \geq 0, |x| \leq \alpha t\}$$

функция g разрывна лишь для конечного числа моментов времени из $[0,1]$. Действительно, функция g в конусе K_α может быть разрывна лишь при таких $t = p/q$, что $\alpha t|1-\alpha| \leq 1/q^2$, то есть при $pq \leq \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$, но число $\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$ конечно, тогда и количество соответствующих пар (p,q) не превосходит $\frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2}$, то есть таких моментов времени — конечное число.

Отметим также, что в двух последних примерах для всякого решения x правая часть вдоль решения — функция $(f(t,x(t)) \,|\, t \in I_0)$ — разрывна не более чем в счетное число моментов времени.

Из рассмотренных примеров напрашивается вывод, что всякую правую часть достаточно исправить на множестве нулевой меры Лебега, то есть для всякой функции Каратеодори найдется ей эквивалентная со свойством (2) (при выполнении условия (C)). Это также неверно. Соответствующий пример (см. [14]) строится на основе нигде не плотного множества ненулевой меры, имеющего структуру, близкую к канторовскому множеству. Более того, как показывает тот же пример, при выборе последовательности разбиений для выполнения (2) недостаточно также (см. [14]) брать только те разбиения, для которых во все моменты переключения правая часть непрерывна.

3. Обобщенные ломаные

Пусть $\mathcal{D}$ – семейство всех замкнутых подмножеств множества I_0, содержащих точки t_0, T. В частности, в $\mathcal{D}$ входят само множество I_0 и все конечные разбиения – множества из D. Будем называть множества из $\mathcal{D}$ наблюдениями.

Отметим, что ломаные Эйлера со счетным числом моментов переключения рассматривались в работах [15,16]. В [9,15] для достаточно гладкой правой части приведен алгоритм расчета момента ухода траектории на бесконечность посредством построения ломаных Эйлера, графики которых сходятся к графику непродолжимого решения во всей его области определения. В работе [16] такие ломаные Эйлера предлагается использовать для задач оптимального уравнения.

Каждому наблюдению $\Delta \in \mathcal{D}$ сопоставим функцию $\tau^*_\Delta : I_0 \mapsto I_0$ по правилу:

$$\tau^*_\Delta(t) = \max\{\tau \mid \tau \in \Delta, \tau \leq t\} \quad \forall t \in I_0.$$

Тогда для любого $\Delta \in \mathcal{D}$ введем $d(\Delta) = ||\tau^*_{I_0} - \tau^*_\Delta||_{B(I_0)}$. Заметим, что последнее определение совпадает для $\Delta \in D$ с введенным ранее.

Рассмотрим для всякого $\Delta \in \mathcal{D}$ уравнение

$$\xi(\vartheta) = x_0 + \int_{[t_0,\vartheta)} f(\tau^*_\Delta(t), \xi(\tau^*_\Delta(t)))dt. \qquad (3)$$

Для всякого $t^* \in (t_0, T]$ через $\Xi^\Delta_{t^*}$ обозначим множество всех решений (из $C_m([t_0,t^*])$) этого уравнения на промежутке $[t_0,t^*]$. Для удобства определим также $\Xi^\Delta_\theta(K) \stackrel{\triangle}{=} \Xi^\Delta_\theta \cap C([t_0,\theta],K)$ для всякого компакта $K \subset R^m$.

Уравнение (3), как уравнение, решениями которого являются как траектории исходной системы, так и ломаные Эйлера, указано, например, в работе [16, (1.11)].

Как показано ранее, для всякого конечного разбиения $\Delta \in D$ это множество состоит из единственного элемента, уже введенного ранее $\xi_\Delta|_{[t_0,t^*]}$. С другой стороны, в силу $I_0 \in \mathcal{D}$, определено множество $\Xi^{I_0}_{t^*}$, но оно совпадает со всеми решениями исходного уравнения (1), продолжимыми вплоть до t^*, то есть (в силу условия (C)) $\Xi^{I_0}_{t^*} = \Phi_{t^*}$.

Заметим, что уравнение (3) представляет собой уравнения с запаздыванием, даже локально решения, у таких уравнений при неограниченной правой части, может не оказаться в классе непрерывных функций [17]. Подобный пример можно привести и для уравнения (3). В случае ограниченной правой части уравнение с запаздыванием, в частности (3), будет иметь решение (см. [18]).

4. Диаметр разбиения как характеристика сходимости

Исследуем условия на правую часть системы (1), при которых малость диаметра разбиения гарантирует близость соответствующей обобщенной ломаной Эйлера к пучку решений системы.

По аналогии с (2), для всякого $t^* \in I_0$ будем говорить, что ломаные Эйлера сходятся к пучку решений при измельчении $[t_0, t^*]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\Delta \in \mathcal{D}$

$$(d(\Delta) < \delta) \Rightarrow \ (\forall \xi \in \Xi^{\Delta}_{t^*}\ \exists x \in \Phi_{t^*}\ ||x - \xi||_{C_m([t_0,t^*])} < \varepsilon). \tag{4}$$

Если функция f удовлетворяет условиям $(K1) - (K3), (C)$, то всякое решение задачи (1) можно продолжить вплоть до T. Введем для некоторого $\varkappa > 0$

$$K_\Phi \overset{\triangle}{=} \{(t, x(t) + z)\,|\, t \in I_0, z \in O_\varkappa(0; R^m),\ x \in \Phi\}.$$

Теперь если $M \overset{\triangle}{=} \sup\{||f(t, y)||_m\,|\,(t, y) \in K_\Phi\}$ — конечно, то для всякого $t \in I_0$ введем

$$\begin{aligned}\Psi_t \overset{\triangle}{=} \{y \in C_m([t_0, t] \quad | \quad & \exists x \in \Phi_t\, ||y - x||_{C_m([t_0,t])} \le \varkappa,\\ & \forall t', t'' \in [t_0, t]\ ||y(t'') - y(t')||_m \le M|t'' - t'|,\ y(t_0) = x_0\},\end{aligned}$$

а через N_y для всякого $y \in C_m(I_0)$ обозначим множество тех моментов времени $t \in I_0$, для которых в точке $(t, y(t))$ функция f разрывна по совокупности переменных.

Для всякого $t^* \in I_0$ будем говорить, что ломаные Эйлера не покидают Ψ_{t^*} при измельчении $[t_0, t^*]$, если существует такое $d_0 > 0$, что для всех $\Delta \in \mathcal{D}$

$$(d(\Delta) < d_0) \Rightarrow \ (\Xi^{\Delta}_{t^*} \subset \Psi_{t^*}).$$

В силу $((t, \xi(t)) \in K_\Phi) \Leftrightarrow y \in O_\varkappa(\Phi_t; C_m([t_0, t])) \Rightarrow \ (||f(t, \xi(t))||_m \le M)$ это условие эквивалентно:

$$(d(\Delta) < d_0) \Rightarrow \ (\forall t \in [t_0, t^*]\ \forall \xi \in \Xi^{\Delta}_{t^*}\ (t, \xi(t)) \in K_\Phi). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условиям $(K1), (K2), (C)$, а кроме того, для некоторого $\varkappa > 0$ на K_Φ правая часть системы ограничена. Пусть также для всякой $y \in \Psi_T$ множество N_y имеет нулевую меру Лебега. Тогда при измельчении I_0 ломаные Эйлера сходятся к пучку решений и не покидают Ψ_T.*

Доказательство. Пусть $\Upsilon_\rightarrow$ — множество таких $t \in I_0$, что ломаные Эйлера сходятся к пучку решений при измельчении $[t_0, t]$, а $\nu_\rightarrow$ - верхняя грань этого множества. Пусть также

$\Upsilon_\in$ — множество таких $t \in I_0$, что ломаные Эйлера не покидают Ψ_t при измельчении $[t_0, t]$. Обозначим через ∂K_Φ границу компакта K_Φ.

Заметим, что $\Upsilon_\to \subset \Upsilon_\in$. Действительно, если ломаные Эйлера сходятся к пучку решений при измельчении $[t_0, t]$, то взяв $d_0 = \delta(\varkappa)$, в силу (4) имеем эквивалентное нужному условие (5).

Покажем большее, что найдется такое $\varsigma > 0$, для которого $\min\{\nu_\to + \varsigma, T\} \in \Upsilon_\in$. Действительно, пусть не так, тогда найдутся такие последовательности $(\Delta_n)_{n\in N} \in \mathcal{D}^N$, $(t_n)_{n\in N} \in I_0^N$, $(\xi_n)_{n\in N} \in \prod_{n\in N} \Xi_{t_n}^{\Delta_n}$, что $(d(\Delta_n))_{n\in N} \to 0, (t_n)_{n\in N} \to \nu_\to + 0$ и для любого $n \in N$ t_n есть верхняя грань таких t, что $\xi_n|_{[t_0,t]} \in \Psi_t$. В силу условия (5) t_n есть нижняя грань таких t^*, что $(t^*, \xi_n(t^*)) \notin K_\Phi$. Таким образом $(t_n, \xi_n(t_n)) \in \partial K_\Phi$. Поскольку все элементы $(\xi_n)_{n\in N}$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что их графики (в метрике Хаусдорфа) сходятся к графику некоторой функции $y \in C_m([t_0, \nu_\to])$ (см. [19]). В частности, в силу компактности ∂K_Φ выполнено $(\nu_\to, y(\nu_\to)) \in \partial K_\Phi$.

Рассмотрим $\nu \in \Upsilon_\to$, тогда последовательность $(\xi_n|_{[t_0,\nu]})_{n\in N}$ сходится к решению, в частности $y|_{[t_0,\nu]} = x$ для некоторого $x \in \Phi_\nu$. Но тогда $\varkappa \le M(\nu_\to - \nu)$ в силу определения K_Φ, что противоречит выбору $\nu_\to$ как верхней грани $\Upsilon_\to$. Итак, найдется такое $\varsigma > 0$, для которого $\nu_\in \ge \min\{\nu_\to + \varsigma, T\}$. Тогда, из очевидного $\nu_\to \ge t_0$ имеем $\nu_\in > t_0$.

Покажем, что $\Upsilon_\in \subset \Upsilon_\to$. Действительно, пусть не так, то есть для некоторого $t^* \in \Upsilon_\to \setminus \Upsilon_\in$ при измельчении $[t_0, t^*]$ ломаные Эйлера не покидают Ψ_{t^*}, но и не сходятся к пучку решений. Тогда найдутся такие число $\varepsilon > 0$ и последовательности $(\Delta)_{n\in N} \in \mathcal{D}^N$, $(\xi_n)_{n\in N} \in \Psi_{t^*}^N$, что

$$d(\Delta_n) < 1/n,\ \xi_n \in \Xi_{t^*}^{\Delta_n},\ ||\xi_n - x||_{C_m([t_0,t^*])} > \varepsilon \quad \forall n \in N, x \in \Phi_{t^*}. \tag{6}$$

В силу $(\xi_n)_{n\in N} \in \Psi_{t^*}^N$ и компактности Ψ_{t^*}, можно считать, что некоторое $y \in \Psi_{t^*}$ есть предел последовательности $(\xi_n)_{n\in N}$ в равномерной метрике. Тогда, как показано в [3, Теорема 1.1.3], для почти всех $t \in [t_0, t^*]$ имеет место

$$\dot{y}(t) \in \bigcap_{\delta>0} \bar{co}\{f(\tau, x) \,|\, \tau \in I_0 \cap [t-\delta, t],\, x \in O_\delta(y(t); R^m)\}, \quad y(t_0) = x_0.$$

Но для $t \in I_0 \setminus N_y$ имеет место непрерывность правой части (1) в окрестности $(t, y(t))$, то есть для почти всех $t \in [t_0, t^*]$

$$\{f(t, y(t))\} = \bigcap_{\delta>0} \bar{co}\{f(\tau, x) \,|\, \tau \in I_0 \cap [t-\delta, t],\, x \in O_\delta(y(t); R^m)\}.$$

Тогда y является решением задачи (1) на отрезке $[t_0, t^*]$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = y \in \Phi_{t^*}$. Однако это противоречит (6).

Итак показано, что $\min\{\sup \Upsilon_\to + \varsigma, T\} \in \Upsilon_\in \subset \Upsilon_\to$ Отсюда $T \in \Upsilon_\in = \Upsilon_\to$, что завершает доказательство теоремы. □

Отметим, что в теореме условие ограниченности правой части существенно, см. пример 1. Недостаточно также потребовать, чтобы на K_Φ при всяком фиксированном x правая часть как функция по t имела не более чем счетное число точек разрыва. Недостаточно из разбиения исключать всевозможные точки разрыва правой части вдоль всех решений задачи Коши. Все это следует из примера 2.

Обозначим для всех $y \in C_m(I_0)$ через $\bar{N}_y$ множество точек разрыва функции $(f(t, y(t)) \,|\, t \in I_0)$. Покажем, что в условии теоремы нельзя для всех $y \in \Psi_T$ условие $\lambda(N_y) = 0$ заменить на условие $\lambda(\bar{N}_y) = 0$.

Пример 3. Пусть P — множество всех простых чисел, определим для всякого $p \in P$ конечное разбиение $\Delta_p \stackrel{\triangle}{=} \{k/p \,|\, k \in \overline{0,p}\} \in D$. Теперь для всех $i, j \in P$, $(i \neq j)$ имеем $\Delta_i \cap \Delta_j = \{0,1\}$. Введем функцию g так, чтобы $g(t,t) = 0$ для всех $t \in I_0$, однако $g(t,x)$ не была непрерывна по совокупности переменных при всяком $t = x \in I_0$. Кроме того, для всяких $t \in \Delta_p$ обеспечим $g(t, t - 1/p) = 1$. Для всего вышеперечисленного определим функцию $g \in B([0,1] \times R)$ по правилу:

$$g(t,x) \stackrel{\triangle}{=} \begin{cases} 0, & \forall t \notin \cup_{p \in P} \Delta_p \setminus \{0,1\} \; \forall x \in R; \\ 0, & \forall t \in \Delta_p \setminus \{0,1\}, \, |p(x-t)-1| \geq 1, p \in P; \\ 1 - |p(x-t)-1|, & \forall t \in \Delta_p \setminus \{0,1\}, \, |p(x-t)-1| < 1, p \in P. \end{cases}$$

Эта функция почти во все моменты времени тождественно равна нулю, следовательно является функцией Каратеодори, тогда и единственным решением задачи Коши

$$\dot{x} = g(t,x), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0,1]$$

является функция, тождественно равная нулю. С другой стороны, для всякого $p \in P$ имеем $\xi_{\Delta_p}(t) = 0$ при $t \in [0, 1/p]$ и $\xi_{\Delta_p}(t) = t - 1/p$ при $t \in [1/p, 1]$. Тогда пределом этих ломаных Эйлера является функция $(t | t \in I_0)$, несовпадающая с единственным решением системы, хотя диаметр соответствующих им разбиений стремится к нулю.

Функция f ограничена по модулю единицей. Рассмотрим произвольную кривую $y \in \Psi_1$, определенную на $[0,1]$ 1-липшицевую функцию $y \in \Psi_1$ с $y(0) = 0$. Заметим, что функция $(t - y(t) \,|\, t \in I_0)$ не возрастает, тогда определив $\vartheta \stackrel{\triangle}{=} \sup\{t \in I_0 \,|\, t = y(t)\}$, имеем $y(t) = t$ для $t \in [0, \vartheta]$ и $y(t) < t$ для $t \in (\vartheta, 1]$. Теперь для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено $y(t) \leq t + y(\vartheta + \varepsilon) - \vartheta - \varepsilon$ для всех $t \in [\vartheta + \varepsilon, 1]$, то есть $t \in N_y \cap [\vartheta + \varepsilon, 1]$ только если для некоторого $p \in P$ имеет место $t \in \Delta_p$ и $\vartheta + \varepsilon - y(\vartheta + \varepsilon) < 2/p$. Отсюда $p < \frac{2}{\vartheta + \varepsilon - y(\vartheta + \varepsilon)}$, но число таких p не превосходит мощности Δ_p, то есть конечно; таким образом $N_y \cap [\vartheta + \varepsilon, 1]$ не более чем конечно, отсюда множество $N_y \cap [\vartheta, 1]$, а тем более $\bar{N}_y \cap [\vartheta, 1]$, не более чем счетно. С другой стороны, функция $(g(t, y(t)) | t \in [0, \vartheta]) = (g(t,t) = 0 \,|\, t \in [0, \vartheta])$ непрерывна, тогда $\bar{N}_y \cap [0, \vartheta] = \varnothing$. Итак, $\bar{N}_y$ не более чем счетно для всех $y \in \Psi$.

Итак, для всякой $y \in \Psi$ множество $\bar{N}_y$ не более чем счетно, а множество N_y несчетно лишь если y совпадает с z на некотором отрезке $[t_0, \theta]$.

Таким образом, в определении Ψ нельзя знак «$\leq$» заменить на «$<$»; необходимо также в качестве N_y рассматривать те моменты времени $t \in I_0$, для которых функция f в точке $(t, y(t))$ разрывна по совокупности переменных, и недостаточно рассмотреть точки разрыва функции $(f(t, y(t)) | t \in I_0)$ (такая непрерывность правой части рассматривалась, например, в [20]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00537), а также Act 211 Government of the Russian Federation № 02.A03.21.0006

Литература

1. Варга, Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. – М.: Наука, 1977. – 624 с.
2. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
3. Толстоногов, А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.

4. Tolstonogov, A.A. Differential Inclusions in a Banach Space. Mathematics and Its Applications, 524 / A.A. Tolstonogov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 302 с.
5. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – 255 с.
6. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 458 с.
7. Cortes, J. Discontinuous Dynamical Systems / J. Cortes // Control Systems, IEEE. – 2009. – V. 28, № 3. – P. 36–73.
8. Biles, D.C. A Survey of Recent Results for the Generalizations of Ordinary Differential Equations / D.C. Biles, M. Federson, R.L. Pouso // Abstract and Applied Analysis. – 2014. – Art. ID 260409. – 9 pp.
9. Хлопин, Д.В. Равномерная аппроксимация максимальных вправо траекторий в условиях асимптотической интегральной устойчивости / Д.В. Хлопин // Труды Международной конференции по математической теории управления и механике, (Суздаль, 3–7 июля 2009). – М., 2011. – С. 211–218.
10. Bohner M. Dynamic Equations on Time Scales / M. Bohner, A. Peterson. – Birkhäuser, 2001.
11. Artstein, Z. Continuous Dependence on Parameters: On the Best Possible Results / Z. Artstein // Journal of Differential Equation. – 1975. – V. 19, № 2. – P. 214–225.
12. Хлопин, Д.В. Ломаные Эйлера в системах с измеримой по времени правой частью / Д.В. Хлопин // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, №12. – С. 1648–1657.
13. Хлопин, Д.В. Ломаные Эйлера и временные шкалы в условиях Каратеодори / Д.В. Хлопин // Труды ИММ УрО РАН. – 2008. – Т. 14, №4. – С. 159–171.
14. Хлопин, Д.В. Ломаные Эйлера в системах с условиями Каратеодори / Д.В. Хлопин // Труды ИММ УрО РАН. – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 167–184.
15. Жуковский, Е.С. О параметрическом задании решения дифференциального уравнения и его приближенном построении / Е.С. Жуковский // Известия ВУЗов. Математика. – 1996. – Т. 407, №4. – С. 31–34.
16. Панасюк, А.И. Свойства решений обобщенных дифференциальных уравнений аппроксимационного типа в R^m / А.И. Панасюк // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 12. – С. 2065–2076.
17. Петухов, В.Р. Исследование одной системы дифференциально-функциональных уравнений / В.Р. Петухов // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 4, №5. – С. 875–880.
18. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
19. Филиппов, В.В. Общая топология / В.В. Филиппов, В.В. Федорчук. – М.: Физматлит, 2006. –332 с.
20. Ким, А.В. О степени гладкости решений функционально-дифференциальных уравнений / А.В. Ким, Н.Г. Колмогорцева // Труды ИММ УрО РАН. – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 120–124.

Дмитрий Валерьевич Хлопин, кандидат физико-математических наук, заведующий отделом, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, (г. Екатеринбург, Российская Федерация), khlopin@imm.uran.ru.

Поступила в редакцию 26 июня 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 4, pp. 102–112.

MSC 34A45 **DOI: 10.14529/mmp140408**

Euler's Broken Lines and Diameter of Partition

D. V. Khlopin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, UrB RAS; Yekaterinburg, Russian Federation, khlopin@imm.uran.ru

We study the conditions on right-hand side of a system that guarantee the convergence of Euler's broken lines to the funnel of solutions of the system for sufficiently small diameter of partition; in particular, the condition that lets us select a subsequence from any sequence of Euler's broken lines that would converge to the solution on a given time interval. We obtain the condition that guarantees the convergence of Euler's broken lines to the funnel of solutions of the system as the diameter of partitions corresponding to the broken lines tends to zero. The condition is specified for a given explicit constant such that for any mapping that is Liepshitz continuous with this constant and maps onto the phase plane, the set of points of discontinuity has the zero Lebesgue measure (on the graph of this mapping). Several examples are given to demonstrate that this condition cannot be relaxed; specifically, there may be no convergence even if, for each trajectory generated by the system, the restriction of the dynamics function to that graph is Riemann integrable; the constant from the condition above can never be decreased either.

In the paper, Euler's broken lines are embedded into the family of solutions of delay integral equations of the special form, for which, in its own turn, the main result of the paper is proved. It is due to this fact that the results of the paper hold for a broader class of numerical methods, for example, for broken lines with countable number of segments.

Keywords: differential equations; Euler's broken lines; numerical methods; Caratheodory conditions.

References

1. Warga J. *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* New York, Academic, 1972. 531 p.
2. Hartman P. *Ordinary Differential Equations.* New York, Wiley, 1964. 720 p.
3. Tolstonogov A.A. *Differentsial'nye vklyucheniya v banakhovom prostranstve* [Differential Inclusions in Banach Space]. Novosibirsk, Nauka, 1986. 296 p.
4. Tolstonogov A.A. *Differential Inclusions in a Banach Space. Mathematics and Its Applications, 524.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9490-5
5. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side]. Moskow, Nauka, 1985.
6. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka, 1974.
7. Cortes J. Discontinuous Dynamical Systems. *Control Systems, IEEE,* 2009, vol. 28, no. 3, pp. 36–73. DOI: 10.1109/MCS.2008.919306
8. Biles D.C., Federson M., Pouso R.L. A Survey of Recent Results for the Generalizations of Ordinary Differential Equations. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Art. ID 260409, 9 pp.

9. Khlopin D.V. Uniform Approximation of Trajectories Maximal to the Right Under the Condition of Asymptotic Integral Stability. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 199, no. 5, pp. 556–563. DOI: 10.1007/s10958-014-1882-3

10. Bohner M., Peterson A. *Dynamic Equations on Time Scales.* Birkhäuser, 2001.

11. Artstein Z. Continuous Dependence on Parameters: On the Best Possible Results. *Journal of Differential Equations*, 1975, vol. 19, no. 2, pp. 214–225. DOI: 10.1016/0022-0396(75)90002-9

12. Khlopin D.V. Euler Polygonal Lines in Systems with a Time-Measurable Right-Hand Side. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 12, pp. 1711–1720. DOI: 10.1134/S0012266108120070

13. Khlopin D.V. [Euler's Broken and Timelines in Terms of Caratheodory]. *Trudy IMM UrO RAN*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 159–171. (in Russian)

14. Khlopin D.V. Euler's Broken Lines in Systems with Carathe'odory Conditions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2007, vol. 259, issue 2, pp. 141–158. DOI: 10.1134/S0081543807060090

15. Zhukovskii E.S. On a Parametric Specification of the Solution of a Differential Equation and its Approximate Construction. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZov)*, 1996, vol. 40, pp. 29–32.

16. Panasyuk A.I. Properties of Solutions of Generalized Differential Equations of Approximation Type in R^m. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 12, pp. 1453–1464.

17. Petukhov V.R. [Investigation of a System of Differential-Functional Equations] *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1968, vol. 4, no. 5, pp. 875–880. (in Russian)

18. Hale J. *Theory of Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences. Vol. 3.* New York–Heidelberg, Springer-Verlag, 1977. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2

19. Filippov V.V., Fedorchuk V.V. *Obshchaya topologiya* [General Topology. Basic Constructions]. Moscow, Fizmatlit, 2006.

20. Kim A.V., Kolmogortseva N.G. On the Degree of Smoothness of Solutions of Functional Differential Equations. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2007, vol. 259, issue 2, pp. 159–162. DOI: 10.1134/S0081543807060107

Received June 26, 2014