

УДАРНАЯ ВОЛНА В ГАЗОВОМ ШАРЕ

В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская, М.Н. Якимова

Математическое моделирование широко применяется для исследований во всех естественных науках, в отраслях промышленности, в экономике, биологии и других областях. Для решения конкретных задач используются уже существующие или создаются новые модели и численные методы. Наиболее надежным способом проверки качества разностной схемы является сравнение численного решения, где это возможно, с точным решением задачи. В качестве такого «эталонного» решения построено точное решение задачи о сходящейся ударной волне и о динамическом сжатии газа, находящегося в сферическом сосуде с непроницаемой стенкой. В начальный момент времени наружная граница газа скачком начинает двигаться с отрицательной скоростью, и в газ от границы начинается распространяться ударная волна. Ускорение границы и сферичность определяют движение ударной волны и структуру течения газа между фронтом ударной волны и границей. Изложенная постановка задачи принципиально отличается от ранее известных постановок задачи о сжатии автомодельной ударной волны к центру симметрии и ее отражении от центра, в которых отсутствует граница газа.

Ключевые слова: ударная волна; аналитическое решение; идеальный газ; сферическая симметрия.

1. Постановка задачи

Развитие теории размерности и подобия величин механики сплошной среды началось примерно в 1920 – 1930 гг. одновременно в Советском Союзе и за рубежом. Эта теория была использована для построения автомодельных решений задачи о фокусировке ударной волны (УВ) в идеальном газе с уравнением состояния

$$P = f(s)\rho^\gamma. \quad (1)$$

Первой опубликованной работой была работа Гудерлея [1], в которой предполагалось, что амплитуда УВ по мере ее приближения к центру симметрии неограниченно возрастает. Автомодельное решение задачи о сходящейся УВ было опубликовано Л.И. Седовым в 1945 г. [2] и К.П. Станюковичем в 1945 г. [3]. Обзор работ по фокусировке УВ и полостей в идеальном газе изложен в работе К.В. Брушлинского и Я.М. Каждана [4]. Все эти решения являются автомодельными. Они получены в рамках общей теории подобия и размерностей, построенной Л.И. Седовым [5]. В конце прошлого столетия появились работы А.Ф. Сидорова и его учеников, посвященные построению автомодельных решений с безударным сжатием идеального газа [6]. Новые автомодельные решения для различных режимов безударного сжатия идеального газа и схлопывания сферической полости с образованием ударной волны получены А.Н. Крайко и его учениками [7]. В отличие от решений задачи о сходящейся УВ, в

которых отсутствует граница газовой сферы, рассмотрим схождение ударной волны в газовом шаре с наружной границей. В момент $t = t_0$ в газе давление $P_0 = 0$, плотность $\rho_0 = \text{const}$, скорость $U_0 = 0$, удельная внутренняя энергия $E_0 = 0$. Граница газового шара находится в точке r_0, t_0 . На границе задана начальная скорость $U_{g0} < 0$. Иными словами, на границе задан разрыв скорости. После распада разрыва в газ пойдет УВ. Граница при $t > t_0$ будет двигаться по определенному закону, согласованному с движением УВ.

2. Ударная волна

Сферически симметричная сходящаяся к центру ударная волна – это поверхность, движение которой определяется зависимостью $r_w(t)$. В случае распространения УВ по холодному покоящемуся идеальному газу с перечисленными выше параметрами условия на УВ имеют вид [8]

$$\rho_w(D - U_w) = \rho_0 D, \quad P_w = \rho_0 D U_w, \quad \rho_0 D \varepsilon_w = P_w U_w, \quad (2)$$

где ε – удельная полная энергия, D – скорость УВ. Индексом «0» обозначены величины перед УВ, индексом «w» – за УВ. В начальный момент времени t_0 УВ выходит из точки r_0, t_0 со скоростью D_0 , которая определяется скоростью границы шара U_{g0} . В момент фокусировки УВ t_f ее координата $r_w(t_f)$ равна нулю. Перечисленным условиям удовлетворяет уравнение траектории УВ

$$r_w = r_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n \quad (3)$$

при $n > 0$. Скорость УВ получается дифференцированием r_w

$$D = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (4)$$

В момент фокусировки УВ при $t = t_f$ из-за сферичности должно быть $D = -\infty$. Следовательно, показатель n должен удовлетворять условиям $0 < n < 1$. При $t = t_0$ из (4) следует связь между r_0, t_0, D_0 и n

$$D_0 = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0}. \quad (5)$$

Поскольку величины r_0, t_0, D_0 заданы при постановке задачи, то из (5) получается зависимость t_f от показателя степени n

$$t_f = t_0 - \frac{r_0 n}{D_0}, \quad (6)$$

а с помощью (5) выражение (4) принимает вид

$$D = D_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \quad (7)$$

В случае уравнения состояния идеального газа

$$P = (\gamma - 1) \rho E, \quad (8)$$

где $E = \varepsilon - 0,5U^2$, условия (2) на ударной волне упрощаются

$$\rho_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad U_w = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad P_w = \rho_0 D U_w. \quad (9)$$

При переходе от независимых термодинамических переменных ρ и E к переменным ρ и s давление принимает вид зависимости от энтропии и плотности (1). Подставив на ударной волне P_w и ρ_w из (9) в (1), получим зависимость $f(s)$ от скорости ударной волны

$$f(s) = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0^{1-\gamma} D^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma. \quad (10)$$

Энтропия сохраняется вдоль траектории каждой частицы вещества, прошедшей через фронт ударной волны. Положение частицы меняется со временем, однако ее массовая координата m остается неизменной

$$m_w = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_w^3. \quad (11)$$

Поскольку D зависит от r_w , то из (2), (7), (10) и (11) следует зависимость $f(m)$ в газе за ударной волной, справедливая в любой момент времени, включая и момент фокусировки

$$f(s) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \rho_0^{(1-\gamma)} D_0^2 \left(\frac{m_0}{m} \right)^{\frac{2(1-\gamma)}{3\gamma}}. \quad (12)$$

3. Движение газа между ударной волной и границей

На фронте УВ газ приобретает скорость $U_w < 0$, поэтому в течение некоторого промежутка времени каждая частица движется к центру симметрии. Параметры течения газа определяются законом сохранения массы, уравнением движения и уравнением внутренней энергии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2\rho U}{r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = 0.$$

Для идеального газа (8) преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial r} + \gamma P \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r} \right) = 0. \quad (14)$$

Три уравнения (13), (14) содержат три характеристики движения газа P , ρ и U . Граничными условиями являются зависимости $P_w(t)$, $U_w(t)$ на ударной волне и $P_g(t)$, $U_g(t)$ на границе газового шара. Для решения задачи перейдем от переменных r , t к новым переменным $\xi(r, t)$, t . В результате такого перехода вместо уравнений (13), (14) будем рассматривать уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(U \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{2\rho U}{r} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(U \frac{\partial P}{\partial \xi} + \gamma P \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{2\gamma PU}{r} = 0. \quad (17)$$

Переменная $\xi(r, t)$, выбирается следующим образом. Преобразуем уравнение траектории ударной волны (3) так, чтобы комбинация r_w и t была бы постоянной

$$\frac{r_w}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n = 1. \quad (18)$$

В качестве $\xi(r, t)$ возьмем такую функцию, чтобы она была бы постоянной на ударной волне. Проще всего взять ее в виде

$$\xi = \frac{r}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n. \quad (19)$$

На ударной волне $r = r_w$ и из (18), (19) следует, что $\xi_w = 1$. Производные

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{r n}{r_0 (t_f - t)} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n$$

вместе со следующей из (19) зависимостью $r(\xi, t)$

$$r = \xi r_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n \quad (20)$$

подставим в (15) – (17)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{n\xi}{t_f - t} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \left(U \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n + \frac{2\rho U}{r_0 \xi} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{n\xi}{t_f - t} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{n\xi}{t_f - t} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \left(U \frac{\partial P}{\partial \xi} + \gamma P \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \frac{1}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n + \frac{2\gamma PU}{r_0 \xi} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n = 0. \quad (23)$$

4. Разделение переменных

Согласно [8] будем искать решение системы уравнений (21) – (23) в виде

$$P = \alpha_p(t) \Pi(\xi), \quad \rho = \alpha_\rho(t) \delta(\xi), \quad U = \alpha_u(t) M(\xi). \quad (24)$$

Обозначим дифференцирование по t точкой сверху величины, дифференцирование по ξ – штрихом. Подставив (24) в (21) – (23), получим

$$\varphi_1 \delta + \omega \xi \delta' + M \delta' + \delta M' + \frac{2M\delta}{\xi} = 0, \quad \varphi_2 \delta M + \omega \delta \xi M' + \delta M M' + \Pi' = 0, \quad (25)$$

$$\varphi_3 \Pi + \omega \xi \Pi' + M \Pi' + \gamma \Pi M' + \frac{2\gamma M \Pi}{\xi} = 0, \quad (26)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\alpha}_\rho}{\alpha_\rho \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{\dot{\alpha}_u}{\alpha_u \beta}, \quad \varphi_3 = \frac{\dot{\alpha}_p}{\alpha_p \beta}, \quad \omega = \frac{n}{\beta(t_f - t)}, \quad \beta = \frac{\alpha_u}{r_0} \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^n. \quad (27)$$

Для разделения системы уравнений (25), (26) на две системы, одна из которых содержит величины, зависящие только от t , а вторая – только от ξ , нужно, чтобы было

$$\varphi_1(t) = \text{const}, \quad \varphi_2(t) = \text{const}, \quad \varphi_3(t) = \text{const}, \quad \omega(t) = \text{const}.$$

Функции $\alpha_\rho(t)$, $\alpha_u(t)$, $\alpha_p(t)$ определим на ударной волне. Предварительно преобразуем второе и третье уравнения (9) к виду

$$U_w = \frac{2D_0}{\gamma + 1} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}, \quad P_w = \frac{\gamma - 1}{2} \rho_w U_w^2. \quad (28)$$

Из (24) и (28) на ударной волне следует

$$\alpha_\rho(t) \delta_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad \alpha_u M_w = \frac{2D_0}{\gamma + 1} \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}, \quad \alpha_p \Pi_w = \frac{\gamma - 1}{2} \alpha_\rho \delta_w \alpha_u^2 M_w^2.$$

В этих уравнениях величины δ_w , M_w и Π_w не определены. Для устранения произвола по аналогии с [2-4] примем, что

$$\delta_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad M_w = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \Pi_w = \frac{2}{\gamma + 1}. \quad (29)$$

При таком выборе δ_w , M_w и Π_w , функции α_ρ , α_u и α_p принимают вид

$$\alpha_\rho = \rho_0, \quad \alpha_u = D_0 \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^{1-n}, \quad \alpha_p = \rho_0 D_0^2 \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^{2(1-n)}. \quad (30)$$

Из уравнений (27) и (30) определяются φ_1 , φ_2 , φ_3 и ω

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{n-1}{n}, \quad \varphi_3 = \frac{2(n-1)}{n}, \quad \omega = -\frac{1}{n}.$$

5. Уравнения для M , δ , Π и определение n

С помощью полученных значений φ_1 , φ_2 , φ_3 и ω уравнения (25) – (26) принимают вид

$$\delta M' + (M - \xi) \delta' = -\frac{2M\delta}{\xi}, \quad \delta(M - \xi) M' + \Pi' = -\frac{n-1}{n} \delta M, \quad (31)$$

$$\gamma \Pi M' + (M - \xi) \Pi' = -\frac{2\gamma M \Pi}{\xi} - \frac{2(n-1)}{n} \Pi. \quad (32)$$

Уравнения (31), (32) образуют относительно δ' , M' , Π' систему линейных неоднородных уравнений. Если определитель этой системы

$$Z = (M - \xi) (\gamma \Pi - \delta(M - \xi)^2) \quad (33)$$

не равен нулю, то система имеет единственное решение. Из (29) и (33) следует, что на ударной волне $Z(1) = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} < 0$. В момент фокусировки $\xi = \infty$ и, следовательно, $Z(\infty) = +\infty$, если при $\xi \rightarrow \infty$ M не стремится к $+\infty$ как ξ^α , где $\alpha > 1$. Поскольку рассматривается газовый шар конечного размера и время фокусировки конечно, то естественно потребовать, чтобы M_∞ , Π_∞ и δ_∞ были бы конечны. Из сказанного следует, что существует такое значение ξ_* при котором $Z_* = 0$ и M , Π , δ принимают значения M_* , Π_* , δ_* . В областях $1 \leq \xi < \xi_*$ и $\xi_* < \xi < \infty$ $Z \neq 0$ и в этих областях, как сказано выше, система уравнений (31), (32) имеет единственное решение. В точке же ξ_* следует рассмотреть матрицу коэффициентов $\|A\|$ и расширенную матрицу $\|B\|$, где

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \delta_* & M_* - \xi_* & 0 \\ \delta_*(M_* - \xi_*) & 0 & 1 \\ \gamma\Pi_* & 0 & (M_* - \xi_*) \end{vmatrix},$$

$$\|B\| = \begin{vmatrix} \delta_* & M_* - \xi_* & 0 & -\frac{2M_*\delta_*}{\xi_*} \\ \delta_*(M_* - \xi_*) & 0 & 1 & -\frac{n-1}{n}\delta_*M_* \\ \gamma\Pi_* & 0 & (M_* - \xi_*) & -2\Pi_*\left(\frac{M_*\Pi_*}{\xi_*} + \frac{n-1}{n}\right) \end{vmatrix}.$$

Анализ матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ показывает, что их ранги совпадают и равны 2, все миноры третьего порядка равны нулю и, следовательно, система (31), (32) при $\xi = \xi_*$ имеет единственное решение. Легко показать, что равенство нулю всех миноров третьего порядка приводит к двум уравнениям

$$(n-1)\xi_*(2(M_* - \xi_*) - \gamma M_*) + 2\gamma n M_* (M_* - \xi_*) = 0, \quad (34)$$

$$Z_* = (M_* - \xi_*) (\gamma\Pi_* - \delta_*(M_* - \xi_*)^2) = 0, \quad (35)$$

содержащим n , γ и величины M_* , Π_* , δ_* , ξ_* , зависящие от n и γ . Из уравнений (34) и (35) для каждого значения γ находится соответствующее значение n . Результатом применения изложенной выше процедуры являются значения $n(\gamma)$, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1

γ	n	ρ_f	t_f
1,1	0,795973	184,465	0,758066
1,2	0,757142	59,5525	0,688311
4/3	0,729259	26,5447	0,625079
1,4	0,717175	20,0714	0,5976454
5/3	0,688377	9,54968	0,5162826

В областях, где $Z \neq 0$, выпишем решение системы уравнений (31), (32)

$$M' = \frac{R_M}{\xi n R}, \quad \delta' = \frac{\delta R_\delta}{n \xi (M - \xi) R}, \quad \Pi' = \frac{\delta (\xi - M) R_\Pi}{n \xi R}, \quad (36)$$

где

$$R = \gamma\Pi - \delta(M - \xi)^2, \quad (37)$$

$$R_M = 2(n-1)\xi\Pi + 2\gamma n M\Pi + (n-1)\xi\delta M(M-\xi), \quad (38)$$

$$R_\delta = R_M - 2nMR, \quad R_\Pi = R_M - \frac{(n-1)\xi MR}{M-\xi}. \quad (39)$$

Функции $M(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\Pi(\xi)$, находятся при определенном значении n путем интегрирования уравнений (36) в области $1 \leq \xi < \infty$.

6. Решение

Для практических применений полученного решения нужно перейти от функций $M(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\Pi(\xi)$ к функциям $U(r, t)$, $\rho(r, t)$, $P(r, t)$, характеризующим состояние и движение газа в переменных r, t . Они получаются из уравнений (24) следующим образом. В любой фиксированный момент времени $t_0 < t < t_f$ из (19) получается однозначная зависимость $\xi(r)$, после чего из уравнений (24) вычисляются

$$U(r, t) = D_0 M(\xi(r, t)) \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^{1-n}, \quad P(r, t) = \rho_0 D_0^2 \Pi(\xi(r, t)) \left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t} \right)^{2(1-n)}. \quad (40)$$

$$\rho(r, t) = \rho_0 \delta(\xi(r, t)). \quad (41)$$

Эти функции вычисляются в области $r_w \leq r \leq r_g$, занятой газом в момент t . Безразмерная координата границы газового шара ξ_g в момент t находится из закона сохранения массы

$$\int_{r_w}^{r_g} 4\pi r^2 \rho(r) dr = \frac{4}{3} \pi \rho_0 (r_0^3 - r_w^3),$$

который в переменных t, ξ принимает вид

$$\int_1^{\xi_g} \delta \xi^2 d\xi - \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{(t-t_0)D_0}{r_0 n} \right)^{-3n} - 1 \right) = 0. \quad (42)$$

Затем по найденному значению ξ_g для фиксированного t из (19) находится $r_g(t)$, а из зависимостей $M(\xi)$ и $\Pi(\xi)$ определяются M_g и Π_g , по которым из (24) находятся $U_g(t)$ и $P_g(t)$. Таким образом, получаются табличные зависимости $U_g(t)$, $P_g(t)$, $r_g(t)$.

7. Фокусировка ударной волны

Момент фокусировки ударной волны t_f находится из (6) после того, как заданы $U_{g0}, r_0, t_0, \gamma, D_0 = \frac{\gamma+1}{2} U_{g0}$, и найдено $n(\gamma)$. Для $r_0 = 1, U_{g0} = -1, t_0 = 0$ значения времени фокусировки для разных γ приведены в Табл. 1. В точке $t = t_f, r_w = 0$ находится ударная волна, за фронтом которой $D = -\infty, U_w = -\infty, P_w = \infty, \rho_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \xi_w = 1$. Из (19) следует, что при любом $r > 0$ значению $t = t_f$ соответствует значение $\xi = \infty$. При интегрировании уравнений (36) значению $\xi = \infty$ соответствуют значения $\delta_\infty, M_\infty, \Pi_\infty$, которые постоянны, т.к. из (36) – (39) следует, что $\delta' \rightarrow 0, M' \rightarrow 0, \Pi' \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Из выражений (30) для α_u, α_p видно, что $\alpha_u = -\infty, \alpha_p = \infty$ при $t = t_f$ и выражения для U и P принимают вид

$$U_f = -\infty M_\infty, \quad P_f = \infty \Pi_\infty.$$

Работа, совершенная над газовым шаром за время $0 \leq t \leq t_f$, конечна. Это значит, что и кинетическая, и внутренняя энергия газа в шаре конечны. Таким образом, чтобы скорость U и давление P газа в момент фокусировки имели физически разумные значения (были ограничены), должно быть $M_\infty = 0$ и $\Pi_\infty = 0$, ибо только в этом случае U и P можно получить, раскрыв в (24) неопределенности вида $(\infty \cdot 0)$. Численное интегрирование уравнений (36) дает с высокой точностью именно такие значения $M_\infty = 0$ и $\Pi_\infty = 0$. Конечно, значению $\xi = \infty$ соответствует много значений r . Но если взять $t = t_f - \tau$, где τ бесконечно малое число, то $\xi = \infty$ получается из (19) только при $r = \infty$. В этом случае из (40) следует, что в момент фокусировки

$$U_\infty = 0, \quad P_\infty = 0, \quad \text{при } r = \infty.$$

Функции $U(r)$ и $P(r)$ при $t = t_f$ должны удовлетворять этим асимптотическим условиям. Из функций $\alpha_\rho, \alpha_u, \alpha_p$ (30) только $\alpha_\rho = \text{const}$. Таким образом, в момент фокусировки t_f во всем газовом шаре в соответствии с (41)

$$\rho_f = \rho_0 \delta_\infty = \text{const}. \quad (43)$$

Значения ρ_f , полученные для разных γ , приведены в табл. 1. Профиль давления в момент фокусировки определим, используя зависимость энтропии от массы (12). Подставив $f(s)$ из (12) и ρ_f из (43) в уравнение состояния (1), получим

$$P(r) = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D_0^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \delta_\infty^{\left(\gamma - \frac{2(1-n)}{3n}\right)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\frac{2(1-n)}{n}}. \quad (44)$$

Эта зависимость справедлива для всего газа, лежащего в промежутке $0 \leq r \leq r_g$. Формально ее можно считать справедливой и в области $r > r_g$, т.е. вне газового шара. Это можно использовать для подтверждения изложенных выше результатов интегрирования. Действительно, из (44) следует, что $P_\infty = 0$ при $r = \infty$. Удельная внутренняя энергия определяется из уравнений (8) и (44)

$$E(r) = 2D_0^2 (\gamma - 1)^{\gamma-1} (\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \delta_\infty^{\gamma-1 - \frac{2(1-n)}{3n}} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\frac{2(1-n)}{n}}. \quad (45)$$

Полная внутренняя энергия газового шара получается с помощью (45) в виде

$$Q_E = \int_0^{r_g} 4\pi r^2 \rho_0 \delta_\infty E(r) dr.$$

Работа, совершенная над газовым шаром на его границе, определяется уравнением

$$A = - \int_{t_0}^{t_f} 4\pi r_g^2(t) P_g(t) U_g(t) dt.$$

Следовательно, кинетическая энергия газа в момент фокусировки должна определяться выражением

$$Q_K = A - Q_E = \int_0^{r_{gf}} 2\pi r^2 \rho_f U^2(r) dr. \quad (46)$$

Рассмотрим решение в момент времени $t = t_f - \tau$ (τ – бесконечно малое число). С помощью (19) запишем (40) так

$$U = D_0 \left(\frac{r_0 \xi}{r} \right)^{\frac{1-n}{n}} M(\xi). \quad (47)$$

При $t \rightarrow t_f$ представим зависимость $M(\xi)$ в виде

$$M(\xi) = B \xi^{\frac{n-1}{n}}, \quad (48)$$

где $B = \text{const}$. Эта зависимость удовлетворяет выше сформулированному требованию $M_\infty = 0$ при $\xi = \infty$. Из (47), (48) следует зависимость скорости от радиуса в момент t очень близкий к фокусировке

$$U = D_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\frac{1-n}{n}} B. \quad (49)$$

Постоянная B находится после подстановки (49) в (46) по формуле

$$B = \left(\frac{(5n - 2) Q_K}{2\pi n D_0^2 \rho_f r_0^{\frac{2(1-n)}{n}} r_{gf}^{\frac{5n-2}{n}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

8. Эталонное решение

Изложенное решение было применено для оценки точности нескольких методов расчета ударных волн. Холодный газовый шар размером $r_{g0} = 1$ имел параметры $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $U_0 = 0$, $U_{g0} = -1$, $\gamma = 5/3$. Граничное условие определялось с помощью уравнения (42) в соответствии с описанным в п. 6 алгоритмом. Зависимости давления и скорости границы от времени приведены в табл. 2. На рис. 1, 2, 3 приведены профили давления, плотности и скорости на три момента времени $t = 0, 4$, $t = 0, 45$ и $t = 0, 5$. Сплошная линия – это аналитическое решение данной работы, -o- – это расчеты по программе ВОЛНА [9] с выделением разрывов, - - - – расчеты по программе ВОЛНА без выделения разрывов, × – результаты, полученные при проведении расчета по методике [10]. Расчеты выполнены на равномерной по r сетке

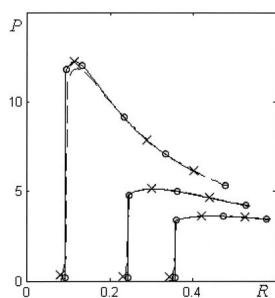


Рис. 1. Профили давления

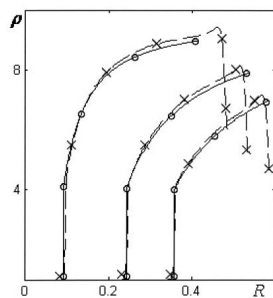


Рис. 2. Профили плотности

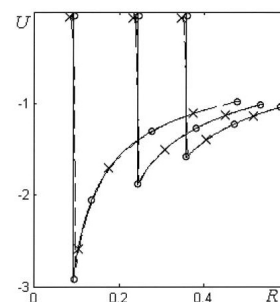


Рис. 3. Профили скорости

Таблица 2

Граничное условие

№	t	U	P	№	t	U	P
1	0,04	-1,008791	1,415094	16	0,30	-1,045146	2,445445
2	0,07	-1,015161	1,484529	17	0,31	-1,044921	2,517083
3	0,10	-1,021256	1,562232	18	0,32	-1,044473	2,592849
4	0,13	-1,026982	1,649664	19	0,33	-1,043787	2,673060
5	0,16	-1,032224	1,748622	20	0,34	-1,042842	2,758063
6	0,18	-1,035380	1,822074	21	0,35	-1,041619	2,848236
7	0,20	-1,038211	1,902413	22	0,36	-1,040097	2,943996
8	0,22	-1,040657	1,990554	23	0,37	-1,038251	3,045798
9	0,23	-1,041717	2,037877	24	0,38	-1,036058	3,154141
10	0,24	-1,042655	2,087565	25	0,39	-1,033488	3,269573
11	0,25	-1,043463	2,139778	26	0,40	-1,030514	3,392698
12	0,26	-1,044129	2,194694	27	0,42	-1,023220	3,664748
13	0,27	-1,044643	2,252502	28	0,45	-1,008354	4,149469
14	0,28	-1,044992	2,313410	29	0,50	-0,969947	5,233492
15	0,29	-1,045165	2,377642	30	0,55	-0,899013	6,144230

с числом точек $N = 200$. На рис. 2 виден энтропийный след в профилях $\rho(r)$, полученных по методу без выделения разрывов. След образовался при формировании «размазанной» ударной волны возле границы газового шара.

В табл. 3, 4 и 5 приведены зависимости $U(r)$, $\rho(r)$, $P(r)$, полученные из аналитического решения, на моменты времени $t = 0,4$, $t = 0,45$, $t = 0,5$, соответственно. В табл. 6 приведены аналитические зависимости $M(\xi)$, $\Pi(\xi)$ и $\delta(\xi)$ в диапазоне $1 \leq \xi \leq 10$. Для того, чтобы построить решение $U(r)$, $\rho(r)$, $P(r)$ в любой выбранный момент времени t_* , задаем ξ из табл. 6 и находим r из формулы (19), затем по формулам (40) и (41) вычисляем $U(r)$, $\rho(r)$, $P(r)$.

Таблица 3

Аналитическое решение на момент $t = 0,4$

№	r	$P(r)$	$\rho(r)$	$U(r)$	№	r	$P(r)$	$\rho(r)$	$U(r)$
1	0,3584	3,3761	4,0000	-1,5912	24	0,4660	3,5944	5,9404	-1,2335
2	0,3631	3,4043	4,1303	-1,5681	25	0,4706	3,5912	5,9954	-1,2232
3	0,3678	3,4299	4,2533	-1,5460	26	0,4753	3,5874	6,0488	-1,2132
4	0,3724	3,4533	4,3698	-1,5249	27	0,4800	3,5831	6,1009	-1,2034
5	0,3771	3,4744	4,4806	-1,5047	28	0,4847	3,5783	6,1515	-1,1938
6	0,3818	3,4935	4,5863	-1,4854	29	0,4894	3,5730	6,2009	-1,1845
7	0,3865	3,5106	4,6873	-1,4668	30	0,4940	3,5672	6,2490	-1,1755
8	0,3911	3,5258	4,7840	-1,4489	31	0,4987	3,5611	6,2959	-1,1666
9	0,3958	3,5394	4,8768	-1,4318	32	0,5034	3,5545	6,3416	-1,1579
10	0,4005	3,5513	4,9661	-1,4153	33	0,5081	3,5476	6,3861	-1,1495

Окончание таблицы 3

№	r	$P(r)$	$\rho(r)$	$U(r)$	№	r	$P(r)$	$\rho(r)$	$U(r)$
11	0,4052	3,5616	5,0519	-1,3993	34	0,5127	3,5403	6,4296	-1,1412
12	0,4098	3,5706	5,1347	-1,3840	35	0,5174	3,5328	6,4721	-1,1332
13	0,4145	3,5782	5,2145	-1,3691	36	0,5221	3,5249	6,5136	-1,1253
14	0,4192	3,5846	5,2915	-1,3548	37	0,5268	3,5167	6,5540	-1,1176
15	0,4239	3,5898	5,3660	-1,3409	38	0,5314	3,5083	6,5936	-1,1100
16	0,4286	3,5939	5,4380	-1,3275	39	0,5361	3,4997	6,6322	-1,1026
17	0,4332	3,5969	5,5078	-1,3145	40	0,5408	3,4908	6,6700	-1,0954
18	0,4379	3,5990	5,5753	-1,3019	41	0,5455	3,4817	6,7069	-1,0883
19	0,4426	3,6002	5,64078	-1,2897	42	0,5502	3,4724	6,7430	-1,0814
20	0,4473	3,6005	5,7043	-1,2778	43	0,5548	3,4630	6,7783	-1,0746
21	0,4519	3,6001	5,7659	-1,2662	44	0,5595	3,4533	6,8128	-1,0679
22	0,4566	3,5989	5,8258	-1,2550	45	0,5876	3,3927	7,0053	-1,0305
23	0,4613	3,5969	5,8839	-1,2441					

Таблица 4

Аналитическое решение на момент $t = 0,45$

№	r	$P(r)$	$\rho(r)$	$U(r)$	№	r	$P(r)$	$\rho(r)$	$U(r)$
1	0,2434	4,7924	4,0000	-1,8959	24	0,3810	4,8977	6,8237	-1,2698
2	0,2494	4,8648	4,2393	-1,8450	25	0,3870	4,8712	6,8863	-1,2554
3	0,2554	4,9253	4,4553	-1,7983	26	0,3930	4,8441	6,9465	-1,2415
4	0,2613	4,9752	4,6525	-1,7552	27	0,3989	4,8165	7,0044	-1,2280
5	0,2673	5,0156	4,8340	-1,7153	28	0,4049	4,7883	7,0600	-1,2150
6	0,2733	5,0475	5,0023	-1,6782	29	0,4109	4,7598	7,1136	-1,2025
7	0,2793	5,0720	5,1590	-1,6435	30	0,4169	4,7310	7,1653	-1,1903
8	0,2853	5,0899	5,3054	-1,6111	31	0,4229	4,7018	7,2150	-1,1785
9	0,2913	5,1019	5,4428	-1,5806	32	0,4289	4,6725	7,2631	-1,1671
10	0,2972	5,1088	5,5721	-1,5518	33	0,4348	4,6431	7,3094	-1,1561
11	0,3032	5,1111	5,6939	-1,5247	34	0,4408	4,6135	7,3541	-1,1454
12	0,3092	5,1093	5,8091	-1,4990	35	0,4468	4,5839	7,3974	-1,1350
13	0,3152	5,1039	5,9181	-1,4747	36	0,4528	4,5542	7,4392	-1,1249
14	0,3212	5,0953	6,0215	-1,4515	37	0,4588	4,5245	7,4796	-1,1151
15	0,3272	5,0838	6,1197	-1,4295	38	0,4647	4,4949	7,5187	-1,1055
16	0,3331	5,0699	6,2131	-1,4085	39	0,4707	4,4653	7,5566	-1,0962
17	0,3391	5,0538	6,3021	-1,3885	40	0,4767	4,4358	7,5933	-1,0872
18	0,3451	5,0357	6,3870	-1,3694	41	0,4827	4,4065	7,6288	-1,0784
19	0,3511	5,0159	6,4680	-1,3510	42	0,4887	4,3772	7,6633	-1,0698
20	0,3571	4,9946	6,5454	-1,3335	43	0,4947	4,3481	7,6967	-1,0615
21	0,3630	4,9720	6,6195	-1,3166	44	0,5006	4,3192	7,7291	-1,0533
22	0,3690	4,9482	6,6905	-1,3004	45	0,5365	4,1495	7,9048	-1,0084
23	0,3750	4,9234	6,7585	-1,2848					

Таблица 5

Аналитическое решение на момент $t = 0,5$

№	r	$P(r)$	$\rho(r)$	$U(r)$	№	r	$P(r)$	$\rho(r)$	$U(r)$
1	0,0926	11,4956	4,0000	-2,9363	24	0,2777	8,1137	8,5003	-1,3032
2	0,1007	11,9886	4,7516	-2,6848	25	0,2858	7,9479	8,5430	-1,2826
3	0,1087	12,2118	5,3157	-2,4917	26	0,2938	7,7882	8,5829	-1,2630
4	0,1168	12,2584	5,7648	-2,3370	27	0,3019	7,6343	8,6202	-1,2444
5	0,1248	12,1902	6,1336	-2,2092	28	0,3099	7,4862	8,6552	-1,2267
6	0,1328	12,0473	6,4426	-2,1014	29	0,3180	7,3433	8,6879	-1,2097
7	0,1409	11,8565	6,7055	-2,0087	30	0,3260	7,2056	8,7187	-1,1936
8	0,1489	11,6358	6,9319	-1,9280	31	0,3341	7,0728	8,7477	-1,1781
9	0,1570	11,3974	7,1288	-1,8568	32	0,3421	6,9447	8,7750	-1,1632
10	0,1650	11,1497	7,3015	-1,7935	33	0,3502	6,8209	8,8007	-1,1489
11	0,1731	10,8984	7,4540	-1,7366	34	0,3582	6,7015	8,8251	-1,1352
12	0,1811	10,6474	7,5896	-1,6852	35	0,3663	6,5861	8,8481	-1,1221
13	0,1892	10,3996	7,7109	-1,6384	36	0,3743	6,4745	8,8699	-1,1094
14	0,1972	10,1567	7,8199	-1,5956	37	0,3824	6,3666	8,8906	-1,0971
15	0,2053	9,9198	7,9184	-1,5563	38	0,3904	6,2622	8,9103	-1,0854
16	0,2133	9,6898	8,0076	-1,5199	39	0,3985	6,1612	8,9290	-1,0740
17	0,2214	9,4670	8,0889	-1,4862	40	0,4065	6,0634	8,9468	-1,0630
18	0,2294	9,2517	8,1632	-1,4548	41	0,4146	5,9686	8,9637	-1,0523
19	0,2375	9,0439	8,2312	-1,4254	42	0,4226	5,8768	8,9799	-1,0420
20	0,2455	8,8437	8,2938	-1,3980	43	0,4307	5,7878	8,9953	-1,0320
21	0,2536	8,6507	8,3515	-1,3722	44	0,4387	5,7014	9,0100	-1,0224
22	0,2616	8,4649	8,4049	-1,3478	45	0,4470	5,6235	9,0260	-1,0130
23	0,2697	8,2860	8,4543	-1,3249					

Таблица 6

Аналитическое решение

№	ξ	$\Pi(\xi)$	$\delta(\xi)$	$M(\xi)$	№	ξ	$\Pi(\xi)$	$\delta(\xi)$	$M(\xi)$
1	1,000	0,7500	4,0000	0,7500	24	1,828	0,7188	7,3840	0,4503
2	1,036	0,7660	4,3422	0,7211	25	1,864	0,7120	7,4454	0,4444
3	1,072	0,7781	4,6391	0,6955	26	1,900	0,7052	7,5039	0,4388
4	1,108	0,7870	4,9018	0,6727	27	1,936	0,6984	7,5597	0,4334
5	1,144	0,7933	5,1375	0,6521	28	1,972	0,6917	7,6129	0,4282
6	1,180	0,7973	5,3508	0,6334	29	2,296	0,6335	8,0000	0,3890
7	1,216	0,7993	5,5453	0,6163	30	2,620	0,5816	8,2718	0,3596
8	1,252	0,7999	5,7236	0,6005	31	2,944	0,5364	8,4716	0,3363
9	1,288	0,7990	5,8879	0,5860	32	3,268	0,4972	8,6236	0,3174
10	1,324	0,7971	6,0398	0,5726	33	3,592	0,4630	8,7426	0,3016
11	1,360	0,7942	6,1807	0,5601	34	3,916	0,4330	8,8379	0,2881
12	1,396	0,7906	6,3118	0,5484	35	4,240	0,4067	8,9156	0,2764
13	1,432	0,7863	6,4341	0,5375	36	4,564	0,3834	8,9799	0,2661

14	1,468	0,7815	6,5485	0,5272	37	4,888	0,3626	9,0340	0,2570
15	1,504	0,7762	6,6558	0,5176	38	5,212	0,3440	9,0800	0,2489
16	1,540	0,7706	6,7565	0,5085	39	5,536	0,3272	9,1193	0,2415
17	1,576	0,7647	6,8513	0,4998	40	5,860	0,3120	9,1535	0,2348
18	1,612	0,7585	6,9406	0,4917	41	6,832	0,2741	9,2326	0,2178
19	1,648	0,7522	7,0249	0,4839	42	7,804	0,2445	9,2883	0,2043
20	1,684	0,7457	7,1046	0,4765	43	8,776	0,2209	9,3293	0,1931
21	1,720	0,7390	7,1801	0,4695	44	9,748	0,2016	9,3605	0,1838
22	1,756	0,7323	7,2516	0,4628	45	10,00	0,1971	9,3674	0,1816
23	1,792	0,7256	7,3195	0,4564					

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ. Грант 13-01-00072.

Литература

1. Guderley, G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse / G. Guderley // Luftfahrtforschung. – 1942. – Т. 19, № 9. – С. 302–312.
2. Седов, Л.И. О неустановившихся движениях сжимаемой жидкости / Л.И. Седов // Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Т. 47, № 2. – С. 94–96.
3. Станюкович, К.П. Автомодельные решения уравнений гидромеханики, обладающих центральной симметрией / К.П. Станюкович // Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Т. 48, № 5. – С. 331–333.
4. Брушлинский, К.В. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики / К.В. Брушлинский, Я.М. Каждан // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, № 2. – С. 3–23.
5. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – М.: Тех. теор. лит., 1954.
6. Сидоров, А.Ф. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа / А.Ф. Сидоров, О.Б. Хайруллина // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 81–92.
7. Крайко, А.Н. Быстрое цилиндрически и сферически симметричное сильное сжатие идеального газа / А.Н. Крайко // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 744–760.
8. Куропатенко, В.Ф. Модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко. – Челябинск: ЧелГУ, 2007.
9. Куропатенко, В.Ф. Комплекс программ ВОЛНА и неоднородный разностный метод расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред / В.Ф. Куропатенко, В.И. Кузнецова, Г.Н. Михайлова, Г.В. Коваленко, Г.Н. Сапожникова // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1989. – № 2. – С. 9–25.
10. Kuropatenko, V.F. A Method for Shock Calculation / V.F. Kuropatenko, M.N. Yakimova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2015. – V. 2, № 2. – P. 60–70.

Валентин Федорович Куропатенко, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Российская Федерация); профессор кафедры «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), v.f.kuropatenko@yandex.ru.

Елена Сергеевна Шестаковская, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), leshest@list.ru.

Марина Николаевна Якимова, ведущий инженер-математик, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина (г. Снежинск, Российская Федерация), yakimovamn@yandex.ru.

Поступила в редакцию 30 ноября 2015 г.

MSC 76N15

DOI: 10.14529/mmp160101

SHOCK WAVES IN GAS SPHERE

V.F. Kuropatenko, Russian Federal Nuclear Center–Zababakhin All–Russia Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation; South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, v.f.kuropatenko@yandex.ru,

E.S. Shestakovskaya, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, leshest@list.ru,

M.N. Yakimova, Russian Federal Nuclear Center–Zababakhin All–Russia Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russian Federation, yakimovamn@yandex.ru

Mathematical modelling is widely applied for researches in all natural sciences, industries, economy, biology and other areas. Already existing or new created models and numerical methods are used for the solution of specific problems. The most reliable way to check the adequacy of the differential scheme is to compare the numerical solution with the precise solution of the problem where it is possible. As an example of such "reference" solution we construct a precise solution for the problem of a convergent shock wave and dynamic gas compression in a spherical vessel with an impermeable wall. Initially, the external border of the gas begins to move stepwise with a negative velocity, and the shock wave begins to propagate from border to gas. Acceleration of the border and sphericity determine the motion of the shock wave and the structure of the gas flow between the shock front and border. The considered problem formulation is fundamentally different from previously known statements of the problem of self-similar shock wave convergence to the center of symmetry and its reflection from the center with no boundary of gas.

Keywords: shock wave; analytical solution; ideal gas; spherical symmetry.

References

1. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, 1942, vol. 19, no. 9, pp. 302–312.

2. Sedov L.I. [On the Transient Motion of a Compressible Fluid]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1945, vol. 47, no. 2, pp. 94–96. (in Russian)
3. Stanjukovich K.P. [Similar Solutions of the Equations of Fluid Mechanics, Possessing Central Symmetry]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1945, vol. 48, no. 5, pp. 331–333. (in Russian)
4. Brushlinskii K.V., Kazhdan Ja.M. On Auto-models in the Solution of Certain Problems of Gas Dynamics. *Russian Mathematical Surveys*, 1963, vol. 18, no. 2, pp. 1–22.
5. Sedov, L.I. *Metody podobiya i razmernosti v mehanike* [Methods of Similarity and Dimensionality in Mechanics]. Moscow, Teh. teor. lit., 1954. 326 p.
6. Sidorov A.F. [Processes Conical Shock-free Compression and Expansion of Gas]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol 58, no. 4, pp. 81–92. (in Russian)
7. Kraiko A.N. Rapid Cylindrically and Spherically Symmetric Strong Compression of a Perfect Gas. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 676–689.
8. Kuropatenko V.F. *Modeli Mehaniki Sploshnyh Sred* [Models of Continuum Mechanics]. Chelyabinsk, CSU, 2007. 302 p.
9. Kuropatenko V.F., Kuznecova V.I., Mihajlova G.N., Kovalenko G.V., Sapozhnikova G.N. [The Complex WAVE and Heterogeneous Software Difference Method for Calculating Unsteady Motion of Compressible Continua]. *Issues of Atomic Science and Physics Simulation Tehniki. Series: Mathematical Modeling of Physical Processes*, 1989, no. 2, pp. 9–25. (in Russian)
10. Kuropatenko V.F., Yakimova M.N. A Method for Shock Calculation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 60–70.

Received November 30, 2015