УДК 519.624.3 DOI: 10.14529/mmp160312

НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СУММ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ РЕЛЕЯ – ШРЕДИНГЕРА ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин

Авторами статьи был разработан неитерационный метод вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, названный методом регуляризованных следов (РС). Он позволяет найти значения собственных функций возмущенных операторов, зная спектральные характеристики невозмущенного оператора и собственные числа возмущенного оператора. В отличие от известных методов нахождения собственных функций, метод РС не использует матрицы и значения собственных функций находятся по линейным формулам. Это значительно увеличивает его вычислительную эффективность по сравнению с классическими методами. Для применения метода РС на практике необходимо уметь суммировать функциональные ряды Релея – Шредингера возмущенных дискретных операторов. Ранее были получены формулы нахождения «взвешенных» поправок теории возмущений, что позволяло приближенно находить суммы функциональных рядов Релея – Шредингера, заменяя их частичными суммами, состоящими из этих поправок. В статье впервые получены формулы нахождения значений сумм функциональных рядов Релея – Шредингера возмущенных дискретных операторов в узловых точках. Проведены вычислительные эксперименты по нахождению значений собственных функций возмущенного одномерного оператора Лапласа. Результаты эксперимента показали высокую вычислительную эффективность разработанного метода суммирования рядов Релея – Шредингера.

Ключевые слова: возмущенные операторы; собственные числа; собственные функции; кратный спектр; суммы функциональнных рядов Релея – Шредингера, «взвешенные» поправки теории возмущений.

Введение

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения в D. Предположим, что известны собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, занумерованные в порядке неубывания их величин, и ортонормированные собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x \in D)$, отвечающие этим собственным числам и образующие базис в H. Обозначим через ν_n кратность собственного числа λ_n, а количество всех неравных друг другу λ_n, лежащих внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\lambda_{n_0+1} + \lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке неубывания их действительных частей, а $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x \in D)$ – соответствующие им собственные функции.

В работах [1–3] была получена система уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m_0} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0, x, y),\ x, y \in D,\ p = \overline{1, m_0}. \quad (1)$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p[K_T(x,z_k,\lambda)\circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k,y,\lambda)d\lambda$ – k-тые поправки теории возмущений к «взвешенной» спектральной функции оператора $T+P$ целого порядка p. Операция «$\circ$» вводится по правилу $(K\circ P\circ Q)(x,y,\lambda) = \int\limits_D K(x,z,\lambda)P_zQ(z,y,\lambda)dz$, где $K_T(x,y,\lambda)$ – ядро резольвенты $R_\lambda(T)$ оператора T.

Система уравнений (1) позволяет найти собственные функции $u_j(x)$ возмущенного оператора $T+P$, используя спектральные характеристики невозмущенного оператора T и собственные числа оператора $T+P$. Ранее авторами были доказаны теоремы, в которых получены формулы для нахождения «взвешенных» поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$ дискретных операторов, найдены оценки их погрешностей, доказана сходимость соответствующих функциональных рядов Релея – Шредингера [4].

В ряде случаев суммы функциональных рядов Релея – Шредингера $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$ удается приблизить, с необходимой степенью точности, первыми «взвешенными» поправками теории возмущений. Однако, при нахождении k-ой «взвешенной» поправки $\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$ по этим формулам, необходимо вычислять $k+1$ кратные числовые ряды, что значительно осложняет их вычисление. Поэтому возникла необходимость построить алгоритм нахождения сумм функциональных рядов Релея – Шредингера.

1. Нахождение сумм функциональных рядов «взвешенных» поправок теории возмущений

В следующей теореме получены формулы, удобные для нахождения сумм функциональных рядов Релея – Шредингера.

Теорема 1. *Пусть T – дискретный полуограниченный снизу оператор, P – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения в D. Если функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x\in D)$ образуют ортонормированный базис в H, то суммы функциональных рядов Релея – Шредингера находятся по формулам*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(p)}(m_0,x,y) = \sum_{k=1}^{m_0}\Big[\mu_k^p v_m(x)\overline{v}_m(y) - \lambda_k^p v_k(x)\overline{v}_k(y) -$$
$$-\mu_k^p\sum_{j,i=1}^{m-1}\Big\{\frac{\overline{V}_{im}\overline{\breve{A}_{ij}^{(k)}}}{\overline{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}}v_m(x)\overline{v}_j(y) + \frac{V_{im}\breve{A}_{ij}^{(k)}}{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}v_j(x)\overline{v}_m(y)\Big\}+ \qquad (2)$$
$$+\mu_k^p\sum_{j_1,j_2,i_1,i_2=1}^{m-1}\frac{V_{i_1m}\overline{V}_{i_2m}\breve{A}_{i_1j_1}^{(k)}\overline{\breve{A}_{i_2j_2}^{(k)}}}{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}\overline{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}}v_{j_1}(x)v_{j_2}(y)\Big] + \delta_m^{(p)}(m_0,x,y).$$

Здесь

$$\left|\delta_m^{(p)}(m_0,x,y)\right| \le \sum_{k=1}^{m_0}|\mu_k|^p\Big[2|C|\cdot|\varepsilon_k^{(m)}|\sum_{j=1}^{m}|x_j^{(k)}| + |\varepsilon_k^{(m)}|^2\Big],$$

$$x_l^{(k)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}\sum\limits_{i=1}^{m-1}V_{im}\breve{A}_{il}^{(k)}, & l=\overline{1,m-1};\\ 1, & l=m.\end{cases}$$

$C = \max\limits_{i=\overline{1,m}} |v_i(x)|$, $|\delta_m^{(p)}(m_0, x, y)| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\varepsilon_k^{(m)} = u_k(x) - u_k^{(m)}(x)$, $u_k^{(m)}(x)$ – *приближение собственной функции* $u_k(x)$, $\breve{\mathbf{A}}^{(k)} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $a_{ij} = V_{ij} + (\lambda_i - \mu_k)\delta_{ij}$, $V_{ij} = (Pv_i, v_j)$, δ_{ij} – *символ Кронеккера,* $\breve{A}_{ij}^{(k)}$ – *алгебраические дополнения к элементам матрицы* $\breve{\mathbf{A}}^{(k)}$. *Черта означает комплексное сопряжение.*

Доказательство. Пусть система собственных функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T образуют ортонормированный базис в H. Тогда собственные функции $u_k(x)$ оператора $T + P$ можно представить в виде

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(k)} v_i(x). \tag{3}$$

Обозначим $\varepsilon_k^{(m)} = u_k(x) - u_k^{(m)}(x)$, где $u_k^{(m)}(x)$ – m-ная частичная сумма функционального ряда (3).

Преобразуем элементы матрицы $\mathbf{A_{m\times m}} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, где $a_{ij} = \Big((T + P)v_i, v_j\Big)$. В силу уравнений $Tv_n = \lambda_n v_n$ и ортонормированности системы функций $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ запишем цепочку равенств:

$$a_{ij} = \Big((T + P)v_i, v_j\Big) = (Tv_i, v_j) + (Pv_i, v_j) =$$

$$= (\lambda_i v_i, v_j) + (Pv_i, v_j) = \lambda_i (v_i, v_j) + (Pv_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij} + V_{ij},$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера, $i, j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Собственный вектор $\mathbf{X}_k^{(m)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)})^T$ матрицы $\mathbf{A_{m\times m}}$ $(k = \overline{1, m})$, соответствующий собственному числу μ_k, должен удовлетворять матричному уравнению:

$$(\mathbf{A_{m\times m}} - \mu_k \mathbf{E})\mathbf{X}_k^{(m)} = 0. \tag{4}$$

Так как собственный вектор $\mathbf{X}_k^{(m)}$ задается с точностью до множителя, то положим компаненту $x_m^{(k)}$ вектора $\mathbf{X}_k^{(m)}$ равной единице. Отбросим последнее из уравнений системы (4), при этом оставшиеся уравнения будут линейно независимы. Полученную систему уравнений перепишем в матричной форме:

$$\breve{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{X}_k^{(m)} = \mathbf{B} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} - \mu_k & a_{12} & \dots & a_{1,m-1} \\ a_{21} & a_{22} - \mu_k & \dots & a_{2,m-1} \\ \dots & & & \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,m-1} - \mu_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_{m-1}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{1m} \\ -a_{2m} \\ \dots \\ -a_{m-1,m} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из вида матрицы $\mathbf{A_{m\times m}} - \mu_k \mathbf{E}$ следует, что $a_{im} = V_{im}$, $i = \overline{1, m-1}$.

Неоднородную систему уравнений (5) решим методом обратной матрицы:

$$(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ \dots, \ x_{m-1}^{(k)})^T = [\breve{\mathbf{A}}^{(k)}]^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\det \breve{\mathbf{A}}^{(k)}} \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{m-1} V_{im} \breve{A}_{i1}^{(k)} \\ -\sum\limits_{i=1}^{m-1} V_{im} \breve{A}_{i2}^{(k)} \\ \dots \\ -\sum\limits_{i=1}^{m-1} V_{im} \breve{A}_{i,m-1}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\breve{A}_{ij}^{(k)}$ – алгебраические дополнения к элементам матрицы $\breve{\mathbf{A}}^{(k)}$ $(i,j=\overline{1,m-1})$.

Таким образом, компаненты вектора $\mathbf{X}_k^{(m)}$ $(k=\overline{1,m})$ примут вид

$$x_l^{(k)}=\begin{cases} -\dfrac{1}{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}\sum\limits_{i=1}^{m-1}V_{im}\breve{A}_{il}^{(k)},\ l=\overline{1,m-1};\\ 1,\ l=m.\end{cases} \tag{6}$$

Разрешим систему уравнений (1) относительно $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)=\sum_{k=1}^{m_0}\Big[\mu_k^p u_k(x)\overline{u}_k(y)-\lambda_k^p v_k(x)\overline{v}_k(y)\Big]=$$

$$=\sum_{k=1}^{m_0}\Big[\mu_k^p u_k^{(m)}(x)\overline{u}_k^{(m)}(y)-\lambda_k^p v_k(x)\overline{v}_k(y)\Big]+\sum_{k=1}^{m_0}\mu_k^p\Big[\overline{\varepsilon}_k^{(m)}u_k^{(m)}(x)+\varepsilon_k^{(m)}\overline{u}_k^{(m)}(y)+\varepsilon_k^{(m)}\overline{\varepsilon}_k^{(m)}\Big]=$$

$$=\sum_{k=1}^{m_0}\Big[\mu_k^p u_k^{(m)}(x)\overline{u}_k^{(m)}(y)-\lambda_k^p v_k(x)\overline{v}_k(y)\Big]+\delta_m^{(p)}(m_0,x,y).$$

Разложим компаненты собственного вектора $\mathbf{X}_k^{(m)}$ по элементам ортонормированного базиса $\{v_i(x)\}_{i=1}^m$ $(x\in D)$, с учетом формул (6):

$$u_k^{(m)}(x)=\sum_{j=1}^{m}x_j^{(k)}v_j(x)=v_m(x)-\frac{1}{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}V_{im}\breve{A}_{ij}^{(k)}v_j(x). \tag{7}$$

Подставим формулы (7) в выражение для $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)=\sum_{k=1}^{m_0}\Big[\mu_k^p\Big(v_m(x)-\frac{1}{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}\sum_{j,i=1}^{m-1}V_{im}\breve{A}_{ij}^{(k)}v_j(x)\Big)\times$$

$$\times\Big(\overline{v}_m(y)-\frac{1}{\overline{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}}\sum_{j,i=1}^{m-1}\overline{V}_{im}\overline{\breve{A}_{ij}^{(k)}}\overline{v}_j(y)\Big)-\lambda_k^p v_k(x)\overline{v}_k(y)\Big]+\delta_m^{(p)}(m_0,x,y)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m_0}\Big[\mu_k^p v_m(x)\overline{v}_m(y)-\lambda_k^p v_k(x)\overline{v}_k(y)-\mu_k^p\sum_{j,i=1}^{m-1}\Big\{\frac{\overline{V}_{im}\overline{\breve{A}_{ij}^{(k)}}}{\overline{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}}v_m(x)\overline{v}_j(y)+\frac{V_{im}\breve{A}_{ij}^{(k)}}{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}v_j(x)\overline{v}_m(y)\Big\}+$$

$$+\mu_k^p\sum_{j_1,j_2,i_1,i_2=1}^{m-1}\frac{V_{i_1m}\overline{V}_{i_2m}\breve{A}_{i_1j_1}^{(k)}\overline{\breve{A}_{i_2j_2}^{(k)}}}{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}\overline{\det\breve{\mathbf{A}}^{(k)}}}v_{j_1}(x)v_{j_2}(y)\Big]+\delta_m^{(p)}(m_0,x,y).$$

Оценим остатки $|\delta_m^{(p)}(m_0,x,y)|$:

$$\Big|\delta_m^{(p)}(m_0,x,y)\Big|\leq\sum_{k=1}^{m_0}|\mu_k|^p\Big[|C\overline{\varepsilon}_k^{(m)}\sum_{j=1}^{m}x_j^{(k)}|+|C\varepsilon_k^{(m)}\sum_{j=1}^{m}\overline{x}_j^{(k)}|+|\varepsilon_k^{(m)}\overline{\varepsilon}_k^{(m)}|\Big]\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m_0}|\mu_k|^p\Big[2|C|\cdot|\varepsilon_k^{(m)}|\sum_{j=1}^{m}|x_j^{(k)}|+|\varepsilon_k^{(m)}|^2\Big].$$

Здесь $C=\max\limits_{i=\overline{1,m}}|v_i(x)|$, а $x_j^{(k)}$ вычисляются по формудам (6). □

2. Вычислительный эксперимент

Для проверки формул (2) был проведен вычислительный эксперимент. В качестве невозмущенного оператора T рассматривался одномерный оператор Лапласа, определенный на отрезке $[0, l]$. Его собственные числа λ_n и собственные функции $v_n(x)$, как известно, имеют вид:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ v_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

В качестве возмущающего оператора P брался оператор умножения на функцию $p(x)$.

Из системы уравнений (1), при $m_0 = n$, вычтем ее же, но при $m_0 = n - 1$. Полученное выражение разрешим относительно $u_n(x)\overline{u}_n(y)$:

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n^p}\Big[\lambda_n^p v_n(x)\overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n, x, y) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n-1, x, y)\Big]. \qquad (8)$$

Используя формулы (8) и (2), были найдены значения пятой и шестой собственных функций возмущенного оператора $T + P$. В таблицах 1 и 2 приведены значения левой и правой частей уравнения $(T + P)u_n = \mu_n u_n$.

Таблица 1

Значения $(T + P)u_5$ и $\mu_5 u_5$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $l = 1$ и $p(x) = x^2$

x_j	$(T+P)u_5(x_j)$	$\mu_5 u_5(x_j)$	$\lvert(T+P)u_5(x_j) - \mu_5 u_5(x_j)\rvert$	$\left\lvert\frac{(T+P)u_5(x_j) - \mu_5 u_5(x_j)}{\mu_5 u_5(x_j)}\right\rvert \times 100\%$
0,142857	272,83735198766	273,18110548326	0,34375	0,125834
0,285714	340,30702671043	340,65126665861	0,34424	0,101053
0,428571	151,51348751144	151,60407602055	0,09059	0,059753
0,571429	151,60114526407	151,60407602055	0,00293	0,001933
0,714286	340,89792225718	340,65126665861	0,24666	0,072407
0,857143	273,62712104909	273,18110548325	0,44602	0,163267

Таблица 2

Значения $(T + P)u_6$ и $\mu_6 u_6$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $l = 1$ и $p(x) = \sin\dfrac{x}{3} + 1$

x_j	$(T+P)u_6(x_j)$	$\mu_6 u_6(x_j)$	$\lvert(T+P)u_6(x_j) - \mu_6 u_6(x_j)\rvert$	$\left\lvert\frac{(T+P)u_6(x_j) - \mu_6 u_6(x_j)}{\mu_6 u_6(x_j)}\right\rvert \times 100\%$
0,142857	218,65994242645	218,73206609730	0,0721237	0,0329735
0,285714	394,06411361875	394,14156393128	0,0774503	0,0196504
0,428571	491,45509644760	491,48649119961	0,0313948	0,0063877
0,571429	491,51983562427	491,48649119961	0,0333444	0,0067844
0,714286	394,21974628211	394,14156393128	0,0781824	0,0198361
0,857143	218,80367419419	218,73206609730	0,0716081	0,0327378

В таблице 3 приведены значения невязки $\|(T + P)u_n - \mu_n u_n\|$ для первых 10 собственных функций u_n при различных возмущающих операторах P.

Таблица 3

Значения невязки $\|(T+P)u_n - \mu_n u_n\|$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $l = 1$, $m = n$

n	$\|(T+P)u_n - \mu_n u_n\|$ при $p(x) = \sin\frac{x}{3} + 1$	$\|(T+P)u_n - \mu_n u_n\|$ при $p(x) = x^2$
1	$0,05933175453013449$	$0,18486186946562712$
2	$0,08722167298850077$	$0,26982226399384459$
3	$0,09141711850816346$	$0,28555566913308841$
4	$0,09283781270256698$	$0,29106235945347709$
5	$0,09348757188208574$	$0,29361116877997433$
6	$0,09383850642063260$	$0,29499570545892765$
7	$0,09404942961086482$	$0,29583053561545063$
8	$0,09418605494412680$	$0,29637237064820354$
9	$0,09427960126060587$	$0,29674384907194357$
10	$0,09434645249551450$	$0,29700956347750404$

Литература

1. Садовничий, В.А. Замечание об одном новом методе вычислений собственных значений и собственных функций дискретных операторов / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. – 1994. – Вып. 17. – С. 244–248.

2. Дубровский, В.В. Оценка разности спектральных функций самосопряженных операторов / В.В. Дубровский, А.И. Седов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2000. – Т. 5, № 5. – С. 10–13.

3. Дубровский, В.В. Теория возмущений и следы операторов: дисс. докт. физ.-мат. наук / В.В. Дубровский. – Москва: МГУ, 1992.

4. Кадченко, С.И. Численные методы регуляризованных следов спектрального анализа: монография / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2015. – 206 с.

Сергей Иванович Кадченко, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и информатика», Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация); кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), kadchenko@masu.ru.

Сергей Николаевич Какушкин, кандидат физико-математических наук, кафедра «Прикладная математика и информатика», Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова (г. Магнитогорск, Российская Федерация), kakushkin-sergei@mail.ru.

Поступила в редакцию 28 января 2016 г.

MSC 47A10 **DOI: 10.14529/mmp160312**

FINDING OF VALUES FOR SUMS OF FUNCTIONAL RAYLEIGH – SCHREDINGER SERIES FOR PERTURBED SELF-ADJOINT OPERATORS

S.I. Kadchenko, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk; South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, kadchenko@masu.ru**,**
S.N. Kakushkin, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, kakushkin-sergei@mail.ru

Authors of the article developed non-iteration method for calculating the values of eigenfunctions for perturbed self-adjoint operators, namely the method of regularized traces (RT). It allows to find the values of eigenfunctions of perturbed operators aware the spectral characteristics of unperturbed operator and the eigenvalues of the perturbed operator. In contrast to the known methods of finding the eigenfunctions, the RT method does not use the matrix, and the values of eigenfunctions are searched by linear formulas. This greatly increases its computational efficiency compared with classical methods. For application of the RT method in practice one should be able to summarize the functional Rayleigh – Schrodinger series of perturbed discrete operators. Previously authors obtained formulas for finding the "weighted" corrections of the perturbation theory, that allowed to approximate the sum of functional Rayleigh – Schrodinger series, by partial sums consisting of these corrections. In the article formulas for finding the values of sums of functional Rayleigh – Schrodinger series of perturbed discrete operators in the the nodal points were obtained. Computational experiments for finding the values of the eigenfunctions of the perturbed one-dimensional Laplace operator were conducted. The results of the experiment showed the high computational efficiency of this method of summation of the Rayleigh – Schrodinger series.

Keywords: perturbed operators; eigenvalues, eigenfunctions; multiple spectrum; the sum of functional Rayleigh – Schrodinger series, "weighted" corrections of the perturbation theory.

References

1. Sadovnichiy V.A., Dubrovskiy V.V. Remark on a New Method of Calculation of Eigenvalues and Eigenfunction For Discrete Operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, vol. 75, no. 3, pp. 1770–1772. DOI: 10.1007/BF02368675

2. Dubrovskiy V.V., Sedov A.I. An Estimate for the Difference of Spectral Functions of the Selfadjoint Operator. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [Electromagnetic Waves and Electronic Systems], 2000, vol. 5, no. 5, pp. 10–13.

3. Dubrovskiy V.V. *Teoriya vozmushcheniy i sledy operatorov* [Perturbation Theory and Traces of Operators. Dissertation of the Doctor of Physical and Mathematical Sciences]. Moscow, 1992.

4. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. *Chislennye metody regulyarizovannyh sledov spektral'nogo analiza* [Numerical Methods of Regularized Traces of Spectral Analysis]. Chelyabinsk, Publishing Center of the South Ural State University, 2015. 206 p.

Received January 28, 2016