УДК 519.633 DOI: 10.14529/mmp160313

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Р.В. Жалнин, М.Е. Ладонкина, В.Ф. Масягин, В.Ф. Тишкин

Предлагается новый численный алгоритм решения параболических начально-краевых задач в анизотропных средах на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями на треугольных сетках. Для применения метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения параболического уравнения с известными начально-краевыми условиями необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для этого вводятся вспомогательные переменные, представляющие собой компоненты потока. Характерной особенностью данного метода является рассмотрение вспомогательных переменных на двойственной сетке. Двойственная сетка состоит из медианных контрольных объемов и является сопряженной к исходной треугольной сетке. Потоковые значения величин на границе элементов предлагается вычислять с добавлением стабилизирующих добавок. Исследование численной методики проводится на примере решения двумерных параболических начально-краевых задач. Исследован вопрос сходимости и точности численной методики. Приведенные численные результаты показывают возможность применения предлагаемой методики для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках.

Ключевые слова: параболические уравнения; анизотропные среды; метод Галеркина с разрывными базисными функциями; сходимость и точность численного метода.

Введение

Данная работа посвящена решению параболических уравнений на треугольных сетках методом Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ), или Discontinuous Galerkin Method (DGM) [1, 2], который характеризуется высоким порядком точности получаемого решения [3–5]. Как принято при решении уравнений второго порядка разрывным методом Галеркина [5], в данной работе уравнения параболического типа записаны в виде системы уравнений первого порядка, и решение происходит в два этапа. На первом этапе вычисляются вспомогательные переменные, аппроксимация которых в пределах ячейки двойственной сетки находится в виде полиномов степени p с зависящими от времени коэффициентами [5, 6]. На следующем этапе находится само решение, аппроксимация которого в пределах ячейки основной сетки ищется в виде полиномов степени p с зависящими от времени коэффициентами. При этом на первом этапе не возникает никаких трудностей при вычислении потоков через границу элементов, в то время как на втором возникает такая проблема. В данной работе предложен алгоритм вычисления потоков на границе элементов, аналогично тому, как это сделано для уравнения теплопроводности [6], используя стабилизирующие добавки.

Для верификации работы предложенного способа вычисления потоков на границе элементов использовались задачи, где получено хорошее согласование результата расчетов с точным решением и показан высокий порядок точности схемы.

1. Разрывный метод Галеркина для тензорных коэффициентов

Рассматривается следующая параболическая начально-краевая задача в анизотропной среде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div} W = F, \quad (x,y) \in D, \quad 0 < t \le T,\\
&u(x,y,t) = g(x,y,t), \quad (x,y) \in \partial D,\\
&u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in D,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где D – область двумерного пространства с границей ∂D, u – определяемая величина, W – поток. Предполагается стандартная, определяемая экспериментально установленными законами связь функции и потока $W = -(\omega_x, \omega_y)$, $\omega_x = k_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}$, $\omega_y = k_{yx}\frac{\partial u}{\partial x} + k_{yy}\frac{\partial u}{\partial y}$, где $k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}$ – компоненты тензора, $g(x,y,t), u_0(x,y)$ – заданные функции.

Для применения разрывного метода Галеркина покроем область $D \cup \partial D$, на которой ищется решение, треугольной сеткой T_h. Все треугольники T_k из T_h имеют ненулевую площадь и пересекаются не более чем по образующим их вершинам или ребрам. В каждом из треугольников определим центр и середины сторон. В треугольнике T_k с вершинами в точках $T_k^1(x_1,y_1)$, $T_k^2(x_2,y_2)$, $T_k^3(x_3,y_3)$ центр (x_c, y_c) определим как: $x_c = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y_c = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. Также примем в рассмотрение двойственную сетку, составленную из медианных контрольных объемов вокруг узлов треугольной сетки, образованных отрезками, соединяющими центры треугольников с серединами сторон. Узел треугольной сетки будет являться центром для соответствующей ему ячейки двойственной сетки.

Для аппроксимации первого уравнения из (1) необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка [2]. Для этого отдельно рассмотрим потоковые переменные [5]. Тогда первое уравнение в исходной системе (1) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + F, \quad (x,y) \in D, \quad 0 < t \le T,\\
&\omega_x = \kappa_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x,y) \in D, \quad 0 < t \le T,\\
&\omega_y = \kappa_{yx}\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa_{yy}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x,y) \in D, \quad 0 < t \le T,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где ω_x, ω_y на границе расчетной области должны удовлетворять следующим соотношениям: $\omega_x = \kappa_{xx}\frac{\partial g}{\partial x} + \kappa_{xy}\frac{\partial g}{\partial y}, \omega_y = \kappa_{yx}\frac{\partial g}{\partial x} + \kappa_{yy}\frac{\partial g}{\partial y}, \quad (x,y) \in \partial D$.

Для решения полученной системы (2) воспользуемся разрывным методом Галеркина. На каждом треугольнике $T_k \in T_h$ введем систему линейных базисных функций $\{\phi_i\} \in P^1, i = 0,1,2, \quad \phi_0 = 1, \phi_1 = \frac{x-x_c}{\Delta x}, \phi_2 = \frac{y-y_c}{\Delta y}$, где (x_c, y_c) – центр соответствующего треугольника T_k, $\Delta x, \Delta y$ – проекции треугольника на соответствующие координатные оси.

На каждой ячейке D_k двойственной сетки введем систему линейных базисных функций $\{\psi_i\} \in P^1, i = 0,1,2, \quad \psi_0 = 1, \psi_1 = \frac{x-x_c^d}{\Delta x^d}, \psi_2 = \frac{y-y_c^d}{\Delta y^d}$, где (x_c^d, y_c^d) – центр соответствующей ячейки D_k, $\Delta x^d, \Delta y^d$ – проекции ячейки двойственной сетки на соответствующие координатные оси.

Приближенное решение u_k в разрывном методе Галеркина ищется в каждом треугольнике как разложение по соответствующему базису [1]:

$$u_k = u_{0k} + u_{1k}\frac{x - x_c}{\Delta x} + u_{2k}\frac{y - y_c}{\Delta y}, \quad u_{ik} = u_{ik}(t), \quad (x, y) \in T_k, \quad i = \overline{0, 2}.$$

Приближенные решения ω_{xk}, ω_{yk} будем искать в каждой ячейке D_k в виде разложения по соответсвующему базису:

$$\omega_{xk} = \omega_{x0k} + \omega_{x1k}\frac{x - x_c^d}{\Delta x^d} + \omega_{x2k}\frac{y - y_c^d}{\Delta y^d}, \quad \omega_{xik} = \omega_{xik}(t), \quad (x, y) \in D_k, \quad i = \overline{0, 2},$$
$$\omega_{yk} = \omega_{y0k} + \omega_{y1k}\frac{x - x_c^d}{\Delta x^d} + \omega_{y2k}\frac{y - y_c^d}{\Delta y^d}, \quad \omega_{yik} = \omega_{yik}(t), \quad (x, y) \in D_k, \quad i = \overline{0, 2}.$$

Умножим первое уравнение из (2) на пробную функцию $\phi_i, i = 0, 1, 2,$ и проинтегрируем произведение по треугольнику T_k, $k = 1, ..., N$, где N – число треугольников. Точное решение u заменим приближенным u_k [7]. Получаем следующую систему для определения коэффициентов разложения u_k по базису $\{\phi_i\}$:

$$\sum_{i=0}^{2}\frac{\partial u_{ik}}{\partial t}\int\limits_{T_k}\phi_i\phi_m ds = \oint\limits_{\partial T_k} n_x\omega_x^\Gamma\phi_m dl + \oint\limits_{\partial T_k} n_y\omega_y^\Gamma\phi_m dl -$$
$$- \int\limits_{T_k}\omega_x\frac{\partial\phi_m}{\partial x}ds - \int\limits_{T_k}\omega_y\frac{\partial\phi_m}{\partial y}ds + \int\limits_{T_k}F_k\phi_m ds, \quad m = \overline{0, 2}. \tag{3}$$

Умножим второе и третье уравнения из (2) на пробную функцию $\psi_i, i = 0, 1, 2,$ и проинтегрируем произведение по ячейке D_k, $k = 1, ..., M$, где M – число ячеек двойственной сетки. Получаем следующие системы для определения коэффициентов разложения ω_{xk}, ω_{yk} по базису $\{\psi_i\}$:

$$\sum_{i=0}^{2}\omega_{xik}\int\limits_{D_k}\phi_i\phi_m ds = \oint\limits_{\partial D_k} n_x\kappa_{xx}u^\Gamma\psi_m dl + \oint\limits_{\partial D_k} n_y\kappa_{xy}u^\Gamma\psi_m dl - \int\limits_{D_k}u_k\frac{\partial(\kappa_{xx}\psi_m)}{\partial x}ds -$$
$$- \int\limits_{D_k}u_k\frac{\partial(\kappa_{xy}\psi_m)}{\partial y}ds, \quad m = \overline{0, 2}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{2}\omega_{yik}\int\limits_{D_k}\phi_i\phi_m ds = \oint\limits_{\partial D_k} n_x\kappa_{yx}u^\Gamma\psi_m dl + \oint\limits_{\partial D_k} n_y\kappa_{yy}u^\Gamma\psi_m dl - \int\limits_{D_k}u_k\frac{\partial(\kappa_{yx}\psi_m)}{\partial x}ds -$$
$$- \int\limits_{D_k}u_k\frac{\partial(\kappa_{yy}\psi_m)}{\partial y}ds, \quad m = \overline{0, 2}. \tag{5}$$

Потоковые величины $u^\Gamma, \omega_x^\Gamma$ и ω_y^Γ на границе соответствующих элементов определены ниже.

2. Аппроксимация потоков

В системе (3) на границе элемента необходимо вычислить потоковые значения величин ω_x^Γ и ω_y^Γ. Их предлагается вычислять аналогично тому, как это сделано для уравнения теплопроводности [6], используя стабилизирующие добавки:

$$\omega^\Gamma\left(u^+, u^-, n\right) = \omega + C_{11}\left((u^+ - u^-), n\right),$$

где величина, обозначенная через u^-, вычисляется на границе ∂T_k элемента T_k по значениям внутри элемента T_k, в то время как величины, обозначенные через u^+, вычисляются на границе ∂T_k по значениям в соседней к данному элементу T_k ячейке, n – единичная нормаль к ребру элемента.

В системах (4) и (5) потоковые значения величины u^Γ на внутренних ребрах известны за счет использования двойственной сетки, на граничных ребрах в случае периодических граничных условий будем брать полусумму величин из соседних к данному ребру ячеек, а в случае непериодических граничных условий будем брать значение из граничного условия.

3. Численные результаты

В качестве первой была выбрана следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div} W = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T,\\
&W = -K\nabla u,\\
&u(x,y,0) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,\\
&u(0,y,t) = u(1,y,t), \quad 0 < y < 1,\\
&u(x,0,t) = u(x,1,t), \quad 0 < x < 1,
\end{aligned} \tag{6}$$

с периодическими граничными условиями, где матрица тензора $K = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$.

Точное решение задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
&u^T = 0,5\exp^{-12\pi^2 t}\left(\sin(2\pi x)\sin(2\pi y) - \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)\right) +\\
&+0,5\exp^{-4\pi^2 t}\left(\sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)\right).
\end{aligned}$$

Полученное с помощью предлагаемого метода численное решение сравнивалось с точным на момент времени $T = 0,2$. Расчеты выполнены на равномерной сетке с шагами $h_x = h_y = 0,0666$, $0,0333$, $0,0166$ и $0,0083$ с одним и тем же числом Куранта. В табл. 1 параметр N – количество треугольников. Определены порядки точности исследуемого метода в нормах L^1 и L^2 на момент времени $T = 0,2$.

В качестве второй рассматривалась задача:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div} W = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T,\\
&W = -K\nabla u,\\
&u(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,\\
&u(0,y,t) = 0, \quad u(1,y,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1,\\
&u(x,0,t) = 0, \quad u(x,1,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,
\end{aligned} \tag{7}$$

где матрица тензора $K = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$. Расчет велся до момента времени $T = 0,32$. Расчеты выполнены на равномерной сетке с шагами $h_x = h_y = 0,0666,\ 0,0333,\ 0,0166$ и $0,0083$ с одним и тем же числом Куранта.

Во второй задаче, в которой не удается найти точное решение, порядки точности исследуемого метода в нормах L^1 и L^2 определены по формулам [8]:

$$r_{L^1} = \log_2 \frac{\left\|u_h - u_{h/2}\right\|_{L^1}}{\left\|u_{h/2} - u_{h/4}\right\|_{L^1}}, \quad \left\|u_h - u_{h/2}\right\|_{L^1} = \sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \left|u_h - u_{h/2}\right| ds,$$

$$r_{L^2} = \log_2 \frac{\left\|u_h - u_{h/2}\right\|_{L^2}}{\left\|u_{h/2} - u_{h/4}\right\|_{L^2}}, \quad \left\|u_h - u_{h/2}\right\|_{L^2} = \left(\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \left(u_h - u_{h/2}\right)^2 ds\right)^{1/2},$$

где $u_h, u_{h/2}, u_{h/4}$ – численные решения задачи на сетках с характеристическими размерами ячеек $h, h/2$ и $h/4$ соответственно, N – количество треугольников в расчетной области. В табл. 2 указан характеристический размер ячеек треугольной сетки h и порядки точности исследуемого метода в нормах L^1 и L^2, определенные по описанным выше формулам.

Таблица 1

N	L^1		L^2	
	ошибка	порядок	ошибка	порядок
450	$4,67e^{-6}$		$5,29e^{-6}$	
1800	$7,94e^{-7}$	2,56	$8,96e^{-7}$	2,56
7200	$1,44e^{-7}$	2,46	$1,63e^{-7}$	2,46
28800	$2,87e^{-8}$	2,33	$3,26^{-8}$	2,32

Таблица 2

h	r_{L^1}	r_{L^2}
0,0666	2,01	2,01
0,0333	1,97	1,98

Заключение

Выполнена серия расчетов на сходимость для модельных задач и получены порядки точности по правилу Рунге в случае, когда известно точное решение задачи и с помощью процесса Эйткена, когда точное решение задачи не удается найти. Результаты численных экспериментов показывают возможность применения исследуемой методики для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках. Применение описанной методики позволяет получать порядки точности, близкие ко вторым и выше.

Литература

1. Cockburn, B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems / B. Cockburn // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. – 1998. – V. 1697. – P. 151–268.
2. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988.
3. Жалнин, Р.В. О применении разрывного метода Галеркина для численного решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках / Р.В. Жалнин, В.Ф. Масягин, Е.Н. Панюшкина // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – Т. 6. – URL: www.science-education.ru/113-10929
4. Ладонкина, М.Е. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина / М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 12. – С. 124–128.
5. Bassi, F. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier – Stokes Equations / F. Bassi, S. Rebay // Journal of Computational Physics. – 1997. – V. 131. – P. 267–279.
6. Arnold, D.N. Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems / D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L.D. Marini // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – V. 29. – P. 1749–1779.
7. Cockburn, B. Runge – Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems / B. Cockburn, C.W. Shu // Journal of Scientific Computing. – 2001. – V. 3. – P. 173–261.
8. Ладонкина, М.Е. О связи разрывного метода Галеркина и методов типа Годунова высокого порядка точности / М.Е. Ладонкина, В.Ф. Тишкин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2014. – № 49. – 10 с. – URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-49

Руслан Викторович Жалнин, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой, кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева (г. Саранск, Российская Федерация), zhalnin@gmail.com.

Марина Евгеньевна Ладонкина, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация), ladonkina@imamod.ru.

Виктор Федорович Масягин, преподаватель, кафедра прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева (г. Саранск, Российская Федерация), vmasyagin@gmail.com.

Владимир Федорович Тишкин, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация), tishkin@imamod.ru.

Поступила в редакцию 21 сентября 2015 г.

MSC 35-04 DOI: 10.14529/mmp160313

DISCONTINUOUS FINITE-ELEMENT GALERKIN METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF PARABOLIC PROBLEMS IN ANISOTROPIC MEDIA ON TRIANGLE GRIDS

R.V. Zhalnin, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation, zhalnin@gmail.com**,**
M.E. Ladonkina, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russian Federation, ladonkina@imamod.ru**,**
V.F. Masyagin, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russian Federation, vmasyagin@gmail.com**,**
V.F. Tishkin, Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russian Federation, tishkin@imamod.ru

A new numerical algorithm for solving parabolic initial-boundary values problems in anisotropic media is proposed. The algorithm is based on Galerkin method with discontinuous basic functions on triangle meshes. The 2nd order derivatives can't be directly harmonized in a weak variational formulation using the discontinuous functions' space. Hence additional variables are introduced to reduce the initial 2nd-order equation to the system of the 1st-order equations. The special feature of this method is in consideration of additional variables within a dual mesh. The dual mesh consists of median control values and is conjugate to the initial triangle mesh. The stream values on the element boundaries are calculated with addition of stabilizing additives. The method is studied basing on the example of 2-dimensional parabolic boundary problems. Convergence and accuracy of the method are investigated. Calculations in model problem show the possibility to use the method discussed for solving parabolic problems in anisotropic media on triangle meshes.

Keywords: parabolic equations, anisotropic media, discontinuous Galerkin method, convergence and accuracy of the method.

References

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, 1998, vol. 1697, pp. 151–268. DOI: 10.1007/BFb0096353
2. Fletcher C.A.J. *Computational Galerkin Methods.* N.Y., Springer, 1984.
3. Zhalnin R.V., Masyagin V.F., Panyushkina E.N. Discontinuous Galerkin Method for Numerical Solution of Twodimensional Diffusion Problems on Unstructural Stagerred Grids. *Modern Problems of Science and Education*, 2013, vol. 6. Available at: www.science-education.ru/113-10929
4. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Research of the Impact of Different Limiting Functions on the Order of Solution Obtained by RKDG. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 346–349. DOI: 10.1134/S2070048213040091
5. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier – Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 1997, vol. 131, pp. 267–279. DOI: 10.1006/jcph.1996.5572
6. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D. Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2002, vol. 29, pp. 1749–1779. DOI: 10.1137/S0036142901384162

7. Cockburn B., Shu C.W. Runge – Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. *Journal of Scientific Computing*, 2001, vol. 3, pp. 173–261. DOI: 10.1023/A:1012873910884

8. Ladonkina M.E., Tishkin V.F. On the Connection of Discontinuous Galerkin Method and Godunov Type Methods of High Order Accuracy. *Preprints Keldysh Institute of Applied Mathematics*, 2014, no. 49, 10 p. Available at: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-49 (in Russian)

Received September 21, 2015